

Математичні моделі та методи

УДК 004.272.2:519.63

О.А. Дмитриева^{1,2}

¹ Донецкий национальный технический университет, Красноармейск, Украина

² Исследовательский центр моделирующих технологий (SRC SimTech) университета Штуттгарта, Германия

КОЛЛОКАЦИОННЫЕ БЛОЧНЫЕ МЕТОДЫ С КОНТРОЛЕМ НА ШАГЕ

В статье рассматриваются вопросы создания эффективных параллельных методов моделирования динамических систем. Разрабатываемые подходы обеспечивают возможность автоматического управления шагом интегрирования, когда искомая функция (функции) на отдельных участках характеризуется различными скоростями изменения. Формирование расчетных схем осуществляется на основе многошаговых коллокационных блочных методов с неравномерным расположением узлов интерполирования в опорном и расчетных блоках, связанных между собой некоторыми коэффициентами пропорциональности. Для автоматического формирования вычислительных схем разработана программная система, основанная на использовании интегро-интерполяционного метода, позволяющая генерировать коэффициенты для разностных уравнений с произвольными размерностями расчетных и опорных блоков, с возможностью перехода на схемы растяжения – сжатия шага. При необходимости сокращения длины шага ранее посчитанные значения используются в расчетных схемах как промежуточные, что позволяет значительно сократить количество вычислительных операций. Полученные численные решения с разными порядками аппроксимации в совпадающих точках расчетного блока обеспечивают формирование оценки локальной погрешности численного интегрирования.

Ключевые слова: задача Коши, точки коллокации, интегро-интерполяционный метод, опорный блок, расчетный блок, шаг интегрирования, погрешность.

Введение

Несмотря на огромное количество исследований [1 – 3], проведенных в последние десятилетия и направленных на поиск эффективного численного решения задачи Коши (1), позволяющей моделировать поведение сложных динамических объектов с сосредоточенными параметрами, нельзя утверждать, что найдена оптимальная вычислительная процедура, обеспечивающая получение решения с заданной точностью и за приемлемое время. И если проблема сокращения времени получения численного решения может быть решена за счет привлечения параллельных вычислительных систем, то проблема получения результатов моделирования с заданной точностью остается [4, 5].

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0. \quad (1)$$

Об этом свидетельствуют исследования, связанные с разработкой параллельных стадийных методов [6], равнозначных блочных методов [5]. В представляемой работе продолжены исследования [7-12], посвященные вопросам создания эффективных параллельных методов моделирования динамических систем. Разрабатываемые подходы предполагают возможность автоматического управления шагом интегрирования, когда искомая функция

(функции) на отдельных участках интегрирования характеризуется различными скоростями изменения. В этом случае целесообразно использовать для интегрирования адаптируемый шаг, что не позволяет обеспечить расчетные коллокационные схемы [7, 8]. Рассмотренные ранее подходы [9, 10], связанные с контролем локальной погрешности на основе сопоставления решений, полученных с разными порядками в совпадающих точках блока, оказываются очень результативными при решении нежестких уравнений и систем, и могут быть использованы для оценки погрешности полученного решения. Если получить априорные оценки шага интегрирования для обеспечения заданной точности до начала счета, и осуществлять интегрирование с полученным шагом, то можно утверждать, что ни на каком участке интегрирования полученная погрешность не превзойдет заданную [7, 9]. Но, к сожалению, такой подход не может обеспечивать изменение шага интегрирования во время счета. Для устранения этого недостатка можно ввести новые расчетные схемы, которые также будут строиться на интерполяционных многочленах, степени которых совпадают с количеством точек коллокации, а значения многочленов в этих точках совпадают с правыми частями дифференциального уравнения в расчетных точках [11, 12].

Таким образом, целью данной работы является построение параллельных коллокационных многошаговых многоточечных блочных методов решения задачи Коши с автоматическим выбором шага интегрирования на основе контроля локальной погрешности.

Оценка вычислительной погрешности на основе вариации размерностей расчетного блока

В качестве точек коллокации в работе предлагается использование множества точек неравномерной сетки (рис. 1), при этом, желательно (но не обязательно), чтобы они были связаны между собой какими-либо коэффициентами пропорциональности, например, степенями двойки. Поскольку речь идет о многошаговых методах, необходимо выделить множество точек, формирующих опорный блок $t_{n,l} = t_{n,0} + i\tau_n \in [t_{n,-m+1}, t_{n,0}]$, $i = -(m-1), -(m-2), \dots, 0$, а также два множества точек, которые будут формировать расчетные блоки

$$t_{n,i}^{(1)} = t_{n,0} + i\tau_{n_1} \in [t_{n,0}, t_{n,s_1}], \quad i = 1, 2, \dots, s_1,$$

$$t_{n,i}^{(2)} = t_{n,0} + i\tau_{n_2} \in [t_{n,0}, t_{n,s_2}], \quad i = 1, 2, \dots, s_2.$$

При этом проще всего связать шаги интегрирования τ_{n_1} и τ_{n_2} соотношениями $\tau_{n_1} = 2\tau_{n_2}$. Тогда между размерностями расчетных блоков должно будет выполняться соотношение $s_2 = 2s_1$. Счет, как

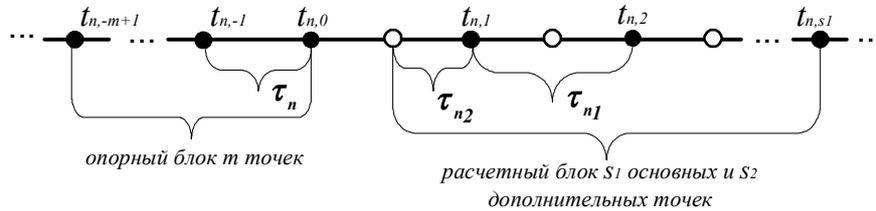


Рис. 1. Схема закрепления опорных, расчетных и промежуточных точек

Для разграничения рассчитанных и искомых точек введем соответствующие обозначения и представим их в виде векторов

$U_n = (u_{n,j})$, $n = 1, 2, \dots$, $j = 1 - m, 2 - m, \dots, 0$ – вектор посчитанных точек

$U_{n+1} = (u_{n,j})$, $n = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, s_1$ – вектор искомых точек для размерности блока s_1 ,

$V_{n+1} = (u_{n,j})$, $n = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, s_2$ – вектор искомых точек для размерности блока s_2 ,

$F_n = (t_n + j\tau_n, u_{n,j})$, $n = 1, 2, \dots$, $j = 1 - m, 2 - m, \dots, 0$,

$F_{n+1} = (t_n + j\tau_{n_1}, u_{n,j})$, $n = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, s_1$,

$\Psi_{n+1} = (t_n + j\tau_{n_2}, u_{n,j})$, $n = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, s_2$ – соответственно, правые части уравнения (1) в из-

и в [11], будет выполняться параллельно для двух расчетных схем, но при этом размерности опорных блоков будут одинаковыми, а размерности расчетных блоков будут различаться s_2 / s_1 раз. Канонический вид многошаговых коллокационных методов с числом опорных точек m и числом расчетных точек s_1 и s_2 соответственно, будет иметь вид

$$u_{n,i}^{(1)} = u_{n,0} + \tau_n \sum_{j=1-m}^0 b_{i,j}^{(1)} F_{n,j} + \tau_{n_1} \sum_{j=1}^{s_1} a_{i,j}^{(1)} F_{n,j}^{(1)},$$

$$i = 1, 2, \dots, s_1, \quad (2)$$

$$u_{n,i}^{(2)} = u_{n,0} + \tau_n \sum_{j=1-m}^0 b_{i,j}^{(2)} F_{n,j} + \tau_{n_2} \sum_{j=1}^{s_2} a_{i,j}^{(2)} F_{n,j}^{(2)},$$

$$i = 1, 2, \dots, s_2,$$

где $u_{n,i}^{(1)}, u_{n,i}^{(2)}$ – в точках $t_{n,i}^{(1)}, t_{n,i}^{(2)}$ приближенные значения решения задачи Коши (1) соответственно, $\tau_n, \tau_{n_1}, \tau_{n_2}$ – шаги интегрирования в опорном блоке, в блоках размерностью s_1 и s_2 соответственно.

$F_{n,j} = f(t_n + j\tau_n, u_{n,j})$ – правые части уравнения (1) в точках, $j = -(m-1), -(m-2), \dots, 0$,

$F_{n,j}^{(1)} = f(t_n + j\tau_{n_1}, u_{n,j})$, $j = 1, 2, \dots, s_1$,

$F_{n,j}^{(2)} = f(t_n + j\tau_{n_2}, u_{n,j})$, $j = 1, 2, \dots, s_2$,

$a_{i,j}^{(1)}, b_{i,j}^{(1)}, a_{i,j}^{(2)}, b_{i,j}^{(2)}$ – коэффициенты расчетных схем (2).

вестных и искомых точках с разными размерностями блоков.

Обозначим дополнительно $U_{n,0} = (u_{n,0})e$ – решение в точке $t_{n,0}$, e – единичный вектор размерности s . Тогда в векторной форме система уравнений (2) для нашего случая будет иметь вид

$$U_{n+1} = U_{n,0} + \tau_n B^{(1)} F_n + \tau_{n_1} A^{(1)} F_{n+1};$$

$$V_{n+1} = U_{n,0} + \tau_n B^{(2)} F_n + \tau_{n_2} A^{(2)} \Psi_{n+1}. \quad (3)$$

Для начала расчета необходимо ввести множество опорных значений

$$U_0 = (u_{0,j}), \quad j = 1 - m, 2 - m, \dots, 0,$$

которые могут быть определены одношаговым методом, обеспечивающим требуемую точность расчетов. Тогда поиск численного решения может быть

сведен к решению на каждом шаге двух нелинейных систем уравнений (3), с последовательным определением векторов $U_1, V_1, U_2, V_2, \dots$. Для определения неизвестных коэффициентов в (2) можно использовать либо условия аппроксимации [7], либо интегроинтерполяционный метод [7, 9]. После определения неизвестных коэффициентов и формирования матриц $A^{(1)}, B^{(1)}$ с размерностями $s_1 \times m$ и $s_1 \times s_1$, $A^{(2)}, B^{(2)}$ с размерностями $s_2 \times m$ и $s_2 \times s_2$, вычисления многошаговым блочным методом, представленным в виде систем нелинейных уравнений (3), можно свести к следующим итерационным процессам

$$\begin{aligned} U_{n+1}^{(1)} &= U_{n,0} + \tau_n B^{(1)} F_n, \\ U_{n+1}^{(k+1)} &= (U_{n,0} + \tau_n B^{(1)} F_n) + \tau_{n1} A^{(1)} F_{n+1}^{(k)}, \\ n &= 1, 2, \dots, k = 1, \dots, s_1, \\ V_{n+1}^{(1)} &= U_{n,0} + \tau_n B^{(2)} F_n, \\ V_{n+1}^{(k+1)} &= (U_{n,0} + \tau_n B^{(2)} F_n) + \tau_{n2} A^{(2)} \Psi_{n+1}^{(k)}, \\ n &= 1, 2, \dots, k = 1, \dots, s_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Системы в (4) требуют предварительно определения значений вектора U_0 в опорных точках начального блока. Определение начальных значений $U_{n+1}^{(1)}, V_{n+1}^{(1)}$ в расчетных блоках осуществляется на основе многошагового предикторного метода Адамса, что позволяет повысить точность начального приближения. Вычисление приближенных значений $U_{n+1}^{(k+1)}, V_{n+1}^{(k+1)}$ решения задачи Коши в каждом следующем расчетном блоке осуществляется итерационно и независимо. После получения решения в очередном блоке проводится сопоставление полученных значений в совпадающих точках. Величина нормы расхождений между значениями приближенных решений в совпадающих узлах основного блока является определяющей для принятия решения о выборе размера шага.

Основным является метод $(m \times s_1)$, локальная погрешность которого в i -ом узле блока определяется на основе соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{n,i}^{(m,s_1)} &= u_{n,i}^{(m,s_1)} - x(t_{n,i}) \approx \varphi^{(s_1+m+1)}(t_{n,0}, x_{n,0}) \tau^{s_1+m+1}, \\ \tau &= \max(\tau_1, \tau_2), \quad i = 1, 2, \dots, s_1, \end{aligned} \quad (5)$$

где $x(t_{n,i})$ – точное решения в i -й точке n -го блока, $u_{n,i}^{(m,s_1)}$ – численное решение задачи Коши (1) $(m \times s_1)$ методом, полученное для i -той точки n -го блока.

Если принять к сведению, что в расчетном блоке должны быть совпадающие точки, значения в которых посчитаны двумя различными схемами (4), и связать размерности блоков коэффициентами про-

порциональности, самый простой из которых можно выбрать равным 2, то для $(m \times s_2)$ метода, при условии, что $s_2 = 2s_1$, локальная погрешность в тех же узлах будет определяться как

$$\begin{aligned} \gamma_{n,i}^{(m,s_2)} &= u_{n,i}^{(m,s_2)} - x(t_{n,i}) \approx \\ &\approx \varphi^{(2s_1+m+1)}(t_{n,0}, x_{n,0}) \tau^{2s_1+m+1}, \\ \tau &= \max(\tau_1, \tau_2), \quad i = 1, 2, \dots, s_2, \end{aligned} \quad (6)$$

где $u_{n,i}^{(m,s_2)}$ – численное решение задачи Коши (1) $(m \times s_2)$ методом, полученное для i -той точки n -го блока. Тогда из соотношений (5) и (6) можно получить представление главного члена погрешности метода $(m \times s_1)$

$$\begin{aligned} \gamma_{n,i}^{(m,s)} &= u_{n,i}^{(m,s_1)} - u_{n,i}^{(m,s_2)} \approx \\ &\approx \varphi^{(s_1+m+1)}(t_{n,0}, x_{n,0}) \tau^{s_1+m+1}, \\ \tau &= \max(\tau_1, \tau_2), \quad i = 1, 2, \dots, s_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Управление шагом интегрирования для предложенного подхода обеспечивается контролем локальной погрешности (7). После получения значений $u_{n,i}^{(m,s_1)}$ и $u_{n,i}^{(m,s_2)}$, которые вычисляются параллельно и независимо друг от друга с использованием ньютоновских итераций, оценивается норма вектора расхождений в совпадающих точках, которая сравнивается с заданным значением локальной точности. Если локальная погрешность не превышена, формируются вектор решений и новое значение шага. Шаг при этом может оставаться прежним (рис. 2), а может быть принято решение о его увеличении (рис. 3), если на протяжении нескольких предшествующих шагов не было сокращения шага, и расхождение между достигнутой локальной погрешностью и заданной предельной составляет не менее порядка. Если локальная погрешность превышена, вектор решений не формируются, схема $(m \times s_2)$ становится основной (рис. 4), но из множества посчитанных по ней значений оставляются только первые s_1 , которые будут определять возможное решение. Дополнительно рассчитываются значения в сокращенном блоке по схеме $(m \times s_2)$ с новым шагом τ_{n2} .

Если после сокращения шага в опорном блоке локальная погрешность пришла в норму, формируется вектор решений с измененными размерностями шагов и соответствующими им значениями, осуществляется переход на стандартную расчетную схему (рис. 2). В том случае, если локальная погрешность все еще превышает заданную, осуществляется попытка сокращения шага в опорном блоке (рис. 5). Последовательное применение схем, приведенных

на рис. 4 и 5, позволяет обеспечить заданную точность нужного порядка. После формирования реше-

ния, достигнутого с заданной точностью, расчеты переводятся на схему сохранения шага (рис. 2).

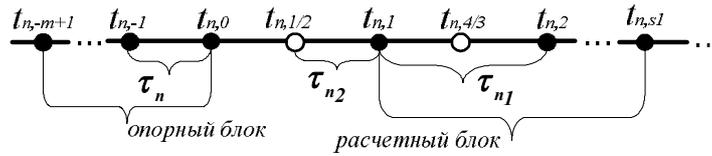


Рис. 2. Схема сохранения шага в расчетном блоке с основными соотношениями между шагами интегрирования $\tau_{n1} = \tau_n, \tau_{n2} = \tau_{n1} / 2$

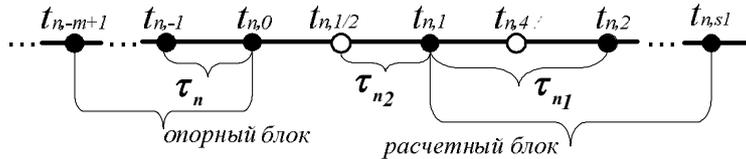


Рис. 3. Схема увеличения шага в расчетном блоке с соотношениями между шагами интегрирования $\tau_{n1} = 2\tau_n, \tau_{n2} = \tau_{n1} / 2$

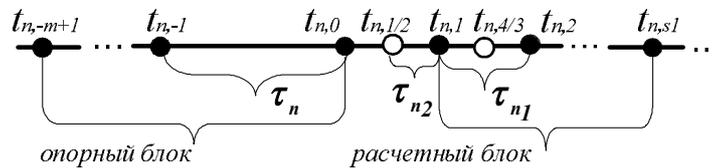


Рис. 4. Схема сокращения шага в расчетном блоке с соотношениями между шагами интегрирования $\tau_{n1} = \tau_n / 2, \tau_{n2} = \tau_{n1} / 2$.

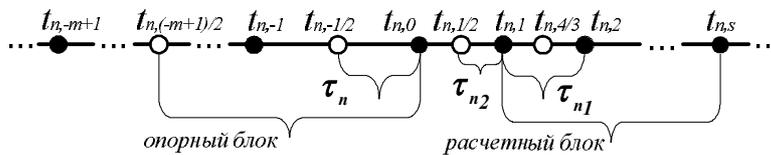


Рис. 5. Схема сокращения шага в опорном блоке с соотношениями между шагами интегрирования $\tau = \tau / 2, \tau_{n1} = \tau, \tau_{n2} = \tau_{n1} / 2$

Формирование разностных схем с изменением размерностей расчетного блока

В отличие от подхода к оценке погрешности, который основывался на введении дополнительной точки в опорный блок [9] и требовал генерирования двух расчетных схем : основной для метода $(m \times s)$ и дополнительной для метода $((m + 1) \times s)$, предлагаемый подход требует большего количества расчетных схем. В частности, необходимо сгенерировать базовые расчетные схемы, соответствующие интегрированию с неизменным шагом, затем предусмотреть схемы для увеличения и сокращения шагов. Причем схемы сокращения необходимо подготовить как для расчетного, так и для опорного блоков. Фактически генерирование этих схем сводится к определению расчетных коэффициентов и осуществляется один раз, до начала вычислений, подразумевая их многократное использование при решении раз-

личных задач. Для автоматического формирования вычислительных схем разработана программная система, основанная на использовании интегроинтерполяционного метода, позволяющая генерировать коэффициенты для разностных уравнений с произвольными размерностями расчетных и опорных блоков. Кроме того, программно учтены возможные соотношения, возникающие между размерностями шагов основного и вспомогательного методов в основных и в опорном блоках, поэтому в расчетных схемах используется шаг интегрирования τ , а коэффициенты матриц $A^{(1)}, B^{(1)}, A^{(2)}, B^{(2)}$ учитывают переходы на схемы растяжения – сжатия или постоянства шага.

В качестве примера можно привести расчетные схемы для метода $((m \times s_1) \times (m \times s_2))$ со значениями параметров $m = 2, s_1 = 2, s_2 = 4$. Для получения разностных схем можно использовать интегроинтерполяционный метод. Формирование разност-

ных схем методов $(m \times s_1)$ и $(m \times s_2)$ подразумевает интегрирование в пределах $(t_{n,0}, t_{n,i})$, с соответствующими значениями индексов $i = 1, 2, \dots, s_1$, $i = 1, 2, \dots, s_2$ и размерностями расчетных блоков s .

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \int_{t_{n,0}}^{t_{n,i}} L_{m+s-1}(t) dt.$$

Основные расчетные схемы для метода $(m \times s_1)$ с узлами интерполяции

$\{t_n - \tau, F_{n,-1}\}, \{t_n, F_{n,0}\}, \{t_n + \tau, F_{n,1}\}, \{t_n + 2\tau, F_{n,2}\}$ примут вид

$$u_{n,1} = u_{n,0} - \frac{\tau}{24} (F_{n,-1} - 13 F_{n,0} - 13 F_{n,1} + F_{n,2}), \quad (8)$$

$$u_{n,2} = u_{n,0} + \frac{\tau}{3} (F_{n,0} + 4 F_{n,1} + 4 F_{n,2}).$$

Для метода $(m \times s_2)$ используются узлы интерполяции:

$\{t_n - \tau, F_{n,-1}\}, \{t_n, F_{n,0}\}, \{t_n + \tau/2, F_{n,1/2}\},$
 $\{t_n + \tau, F_{n,1}\}, \{t_n + 3\tau/2, F_{n,3/2}\}, \{t_n + 2\tau, F_{n,2}\}$.

Из-за громоздкости расчетных формул имеет смысл привести только основные разностные схемы, вспомогательные схемы здесь и далее будут опущены. Сокращение шага основным методом $(m \times s_1)$:

$$u_{n,1/2} = u_{n,0} - \frac{\tau}{192} (F_{n,-1} - 46 F_{n,0} - 56 F_{n,1/2} + 5 F_{n,1}), \quad (9)$$

$$u_{n,1} = u_{n,0} + \frac{\tau}{6} (F_{n,0} + 4 F_{n,1/2} + 5 F_{n,1}),$$

увеличение шага основным методом $(m \times s_1)$:

$$u_{n,2} = u_{n,0} - \frac{\tau}{15} (4 F_{n,-1} - 20 F_{n,0} - 15 F_{n,2} + F_{n,4}), \quad (10)$$

$$u_{n,4} = u_{n,0} + \frac{2\tau}{3} (F_{n,0} + 4 F_{n,2} + 4 F_{n,4}),$$

Такого же типа схемы генерируются и для возможного сжатия и растяжения шага вспомогательными методами с учетом количества узлов интерполяции и их размещения. Кроме того, учитывая итерационный характер (4), для ускорения сходимости на первом шаге итерационного процесса используются предикторные формулы Адамса [3], которые также должны быть предварительно сгенерированы для всех вариантов изменения шага (растяжение, сжатие, постоянство).

Исходя из соотношения (7) оценим погрешность по основным расчетным формулам (8-10), принимая во внимание, что максимальный порядок аппроксимации составляет величину $m+s_1$, поэтому для случая (2×2) при разложении решений в ряды Тейлора ограничимся членами порядка $O[\tau^5]$, тогда

оценку погрешности для точек расчетного блока можно будет представить в виде:

$$\left\{ -\frac{11 x^{(5)}[t_n] \tau^4}{720} + O[\tau^5], \frac{x^{(5)}[t_n] \tau^4}{90} + O[\tau^5] \right\}. \quad (11)$$

С помощью разработанной программной системы такого же рода расчетные схемы и оценки погрешности для всех точек блоков можно получить при любых соотношениях между размерностями шагов и с любым количеством расчетных и опорных точек. Этот вопрос носит принципиальный характер, так как при решении жестких систем резкое увеличение размера шага, например, вдвое, может привести к тому, что от шага придется отказаться, а резкое сокращение может значительно увеличить объем вычислений.

Тестовая реализация параллельных алгоритмов управления шагом

В качестве примера рассмотрим тестовую задачу [5, 13] вида

$$x'(t) = \lambda (\sin(4t) - x(t)) + 4 \cos(4t), \quad (12)$$

$$x(0) = 1, \quad 0 \leq t \leq 10$$

с известным точным решением $x(t) = e^{-\lambda t} + \sin(4t)$.

При малых значениях параметра λ задача может быть решена и без вариации шага. Но при значениях $\lambda = 40$ и более полученные реальные оценки погрешности значительно расходятся с априорными (11), что не дает возможности обеспечить заявленную точность вычислений.

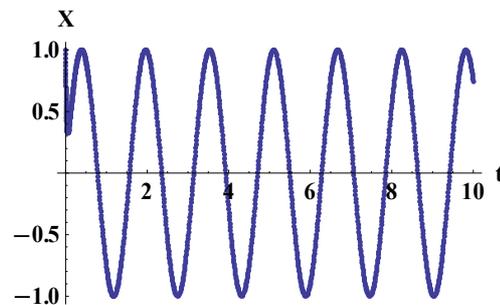


Рис. 6. Точное и численное решение (12), $\lambda = 40$

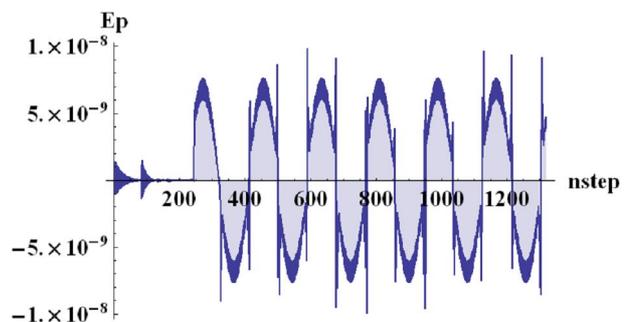


Рис. 7. Локальная погрешность решения (12) методами (8-10), $\lambda = 40$

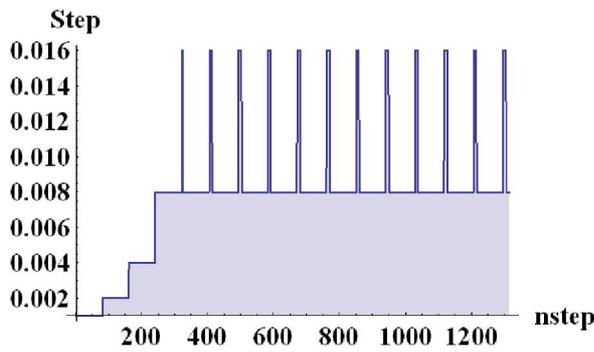


Рис. 8. Автоматическое изменение шага интегрирования, $\lambda = 40$

Поскольку точное решение известно, то в качестве стартовых значений в m начальных точках используются точные решения, в противном случае для получения стартовых значений в опорном блоке можно использовать одношаговый метод соизмеримой точности. В качестве расчетных используются основные (8-10) с размерностями опорного и расчетных блоков (2×2) и (2×4) , и вспомогательные разностные схемы. Соотношение между локальной погрешностью E_p и глобальной Tol задавалось на уровне $Tol \leq 10 E_p$ (на рис. 6-11 $E_p = 10^{-8}$). При проведении численных экспериментов кроме основных показателей, к которым относят локальную и глобальную погрешности численного решения, размеры и количество шагов интегрирования, оценивалась еще отношение количества результативных шагов к общему числу посчитанных.

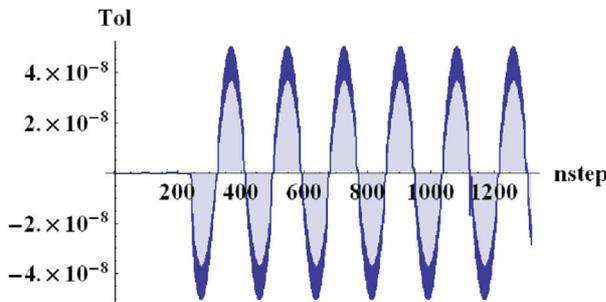


Рис. 9. Накопленная погрешность решения (12) методами (8 – 10), $\lambda = 40$

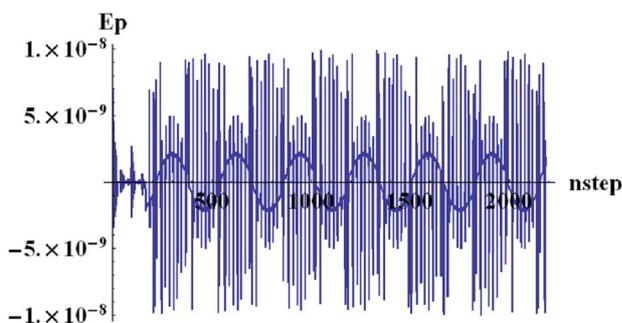


Рис. 10. Локальная погрешность решения (12) методами (8 – 10), $\lambda = 100$

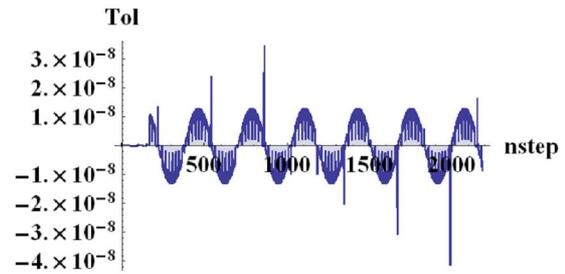


Рис. 11. Накопленная погрешность решения (12) методами (8 – 10), $\lambda = 100$.

Как видно из рис. 9, 11, накопленная погрешность ни на каком шаге интегрирования не превышает заданную Tol . Кроме того, при проведении экспериментов с различными значениями индикаторов, которые обеспечивают принятие решения об изменении размера шага (параметр инерционности, количество итераций для уточнения решения методом Ньютона, близость текущей локальной погрешности к предельному отношению Tol/E_p и т.п.), получены отношения между количеством результативных шагов к общему числу посчитанных, близкие к единице.

Заключение

Проведенные исследования позволили предложить новый подход к решению проблемы параллельного управления точностью интегрирования на основе вариации длины шага. Предлагаемый подход основывался на использовании многшаговых многоточечных коллокационных блочных методов с изменяемыми размерностями опорных и расчетных блоков с неравномерным расположением узлов, связанных между собой некоторыми коэффициентами пропорциональности. Локальная погрешность численного интегрирования оценивалась как норма расхождений решений, полученных с разными порядками аппроксимации в совпадающих точках расчетного блока. Величина полученной погрешности и состояния значений индикаторов использовались для принятия решения о размере очередного шага интегрирования. Для автоматического формирования вычислительных схем разработана программная система, основанная на использовании интегрирующего интерполяционного метода, позволяющая генерировать коэффициенты разностных уравнений с произвольными размерностями расчетных и опорных блоков, с возможностью перехода на схемы растяжения – сжатия шага. При необходимости сокращения длины шага ранее посчитанные значения использовались в расчетных схемах как промежуточные, что позволило значительно сократить количество вычислительных операций. Численное решение для каждого расчетного блока осуществлялось с помощью итерационного процесса, для ускорения сходимости начальные приближения определялись с помощью предикторного метода Адамса. Теорети-

ческие положения, приведенные в работе, подкреплены экспериментальными исследованиями на тестовых задачах с известными точными решениями.

Список литературы

1. Griffiths D. F. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations: Initial Value Problems* / D. F. Griffiths, D. J. Higham. – Berlin: Springer - Verlag, 2010. – P. 285. – ISBN 978-0857291479
2. Kendall E. A. *Numerical solution of ordinary differential equations* / E. Kendall, H. Weimin, D. Stewart. – Hoboken, New Jersey: John Wiley and Sons, 2007. – 252 p.
3. Hairer E., Nørsett S., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems* Springer [Text] / E. Hairer, S. Nørsett, G. Wanner. – Springer Verlag, 1993. – 528 p. – ISBN 5-03-001179.
4. Hairer E. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems* [Text] / E. Hairer, G. Wanner. – Springer-Verlag, 1999. – 685p. – ISBN 5-03-003117.
5. Вайнер Р. Эффективное управление точностью численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений и оптимальные интерполяционные равнозначные методы с переменным шагом [Текст] / Р. Вайнер, Г. Ю. Куликов // Журнал вычислительной математики и математической физики – 2014. – Т. 54, № 4. – P. 591–607.
6. Cong N. H. *Parallel-iterated pseudo two-step Runge-Kutta methods with step size control* [Text] / N. H. Cong, N. T. Thuy // *Jap. Journal of Industrial and Applied Mathematics*. – 2014. – № 31. – P. 441–460.
7. Дмитриева О.А. Разработка и исследование параллельных колокационных блочных методов [Текст] / О. А. Дмитриева, Л. П. Фельдман // *Научные труды Донецкого национального технического университета*. – 2012. – № 16(204). – С. 28–35.
8. Дмитриева О.А. Разработка и обоснование устойчивости параллельных методов моделирования динамических систем с введением колоцирования [Текст] / О. А. Дмитриева // *Искусственный интеллект*. – 2014. – № 3 (61). – С. 488 – 494.
9. Дмитриева О.А. Параллельне моделювання динамічних об'єктів зі сконцентрованими параметрами [Текст] / О.А. Дмитриева. – Х.: Ноулідж. – 336 с.
10. Dmitrieva O. *Parallel Step Control. Development of parallel algorithms of the step variation for simulation of stiff dynamic systems* [Text] / O. Dmitrieva, L. Feldman. – LAP. – 2013. – 72 p.
11. Дмитриева О.А. Управление шагом интегрирования при параллельной реализации обобщенных колокационных блочных методов [Текст] / О. А. Дмитриева // *Радиоэлектронные и компьютерные системы*. – 2014. – № 5 (69). – С. 119–123.
12. Дмитриева О.А. Разработка многошаговых параллельных колокационных блочных методов с использованием интерполяционных полиномов Эрмита [Текст] / О. А. Дмитриева // *Радиоэлектронные и компьютерные системы*. – 2013. – № 5 (64). – С. 243–249.
13. Prothero A. *On the stability and accuracy of onestep methods for solving stiff systems of ordinary differential equations* [Text] / A. Prothero, A. Robinson // *Mathematics of Computation*. – 1974. – Vol. 28, № 125. – P. 145–162.

Поступила в редколлегию 9.03.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Л. П. Фельдман, Донецкий национальный технический университет, Красноармейск.

КОЛОКАЦІЙНІ БЛОКОВІ МЕТОДИ З КОНТРОЛЕМ НА КРОЦІ

О.А. Дмитрієва

У статті розглядаються питання створення ефективних паралельних методів моделювання динамічних систем. Підходи, що розробляються, припускають можливість автоматичного керування кроком інтегрування, коли шукана функція (функції) на окремих ділянках характеризується різними швидкостями зміни. Формування розрахункових схем здійснюється на основі багатокрокових колокаційних блокових методів з нерівномірним розташуванням вузлів інтерполяції в опорному й розрахунковому блоках, зв'язаних між собою деякими коефіцієнтами пропорційності. Для автоматичного формування обчислювальних схем розроблена програмна система, заснована на використанні інтегро-інтерполяційного методу, що дозволяє генерувати коефіцієнти для різницевих рівнянь із довільними розмірностями розрахункових і опорних блоків, з можливістю переходу на схеми розширення – стискання кроку. При необхідності скорочення довжини кроку раніше полічені значення використовуються в розрахункових схемах як проміжні, що дозволяє значно скоротити кількість обчислювальних операцій. Отримані чисельні розв'язки з різними порядками апроксимації в співпадаючих точках розрахункового блоку забезпечують формування оцінки похибки чисельного інтегрування.

Ключові слова: задача Коші, точки колокації, інтегро-інтерполяційний метод, опорний блок, розрахунковий блок, крок інтегрування, похибка.

COLLOCATION BLOCK METHOD WITH MONITORING ON STEP

O.A. Dmitrieva

The article considers the questions with the creation of effective methods of parallel simulation of dynamic systems. Developed approaches suggest the possibility of automatic control integration step when the desired function (s) in certain areas characterized by different rates of change. Formation of calculation schemes is based on the multi-step collocation methods block with nonuniform arrangement of interpolation nodes in the support and settlement blocks, interconnected by any proportionality factor. For automatic generation of numerical schemes developed a software system based on the use of integro-interpolation method, which allows to generate coefficients for difference equations with arbitrary dimensions calculated and reference blocks, with the possibility of switching to the scheme stretching - compression step. If necessary, reduce the length of the step previously calculated values are used in the calculation scheme as intermediate, which can significantly reduce the number of computational operations. The obtained numerical solutions with different orders of approximation in the coinciding points calculated block formation provide error estimates for numerical integration.

Key words: Cauchy problem, point collocation, integro-interpolation method, a support unit, settlement unit, integration step, the error.