УДК 519.854

И.А. Лещинская

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков*

# О ПРЕДИКАТНЫХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯХ КЛАССИЧЕСКОЙ КАТЕГОРИИ

*Рассматривается задача анализа классической категории и ее модификации – предикатной категории, которая предоставляет бо́льшие возможности для приложений теории категорий в области компьютеризации и информатизации. В частности, предикатная категория является хорошей формальной базой для построения высокопроизводительных мозгоподобных компьютеров параллельного действия. В данной, третьей части работы, рассмотрена предикатная интерпретация классической категории.*

***Ключевые слова:*** *категория, предикатная интерпретация категории, модифицированная категория.*

## Вступление

В работе [1] были рассмотрены классическая абстрактная категория, безобъектная категория и категория с объектами. В работе [2] рассматриваются категорные диаграммы и алгебра предикатов. Данная статья посвящена продолжению построения и исследования свойств предикатной категории.

Анализ предикатной интерпретации классической категории приводит к неожиданному и важному выводу: оказывается, что механизм логики не вписывается полностью в прокрустово ложе теории классических категорий, вырывается за ее пределы. Поэтому исходное понятие классической категории приходится “подправлять”, подгонять под запросы компьютеризации и информатизации. Такая подгонка приводит к понятию модифицированной категории. Поскольку исходное понятие теории категорий видоизменяется, то при этом изменяется и сама теория категорий.

В результате получаем теорию модифицированных категорий, которая, как нам представляется, лучше соответствует характеру задач, решаемых в рамках компьютеризации и информатизации.

Почему потребовалась такая модификация, то есть ревизия, пересмотр определения понятия категории? Дело в том, что классическая теория категорий возникла задолго до того, как вошли в силу компьютеризация и информатизация. Она имеет собственные цели и задачи, никак не связанные ни с компьютеризацией, ни с информатизацией. Но сила и общность теории категорий оказались настолько большими, что она своим учением охватила значительную часть области компьютеризации и информатизации.

Однако компьютеризация и информатизация имеют дело тоже с очень обширным предметом, который не охватывается полностью даже теорией категорий.

## Предикатная интерпретация классической категории

Рассмотрим предикатную интерпретацию классической категории. Такую интерпретацию будем называть предикатной и обозначим ее именем $\mathrm{Pred}$.

Выберем какой-нибудь универсум предметов $U$. В роли объектов $A, B, C, \ldots$ категории $\mathrm{Pred}$ используем произвольные подмножества универсума $U$. В роли множества $\mathrm{Ob}$ категории $\mathrm{Pred}$ берем систему всех подмножеств универсума $U$. В роли морфизмов вида $f\colon A \to B$ категории $\mathrm{Pred}$ используем линейные логические операторы вида $F_f(P)=Q$. Каждый такой оператор преобразует одноместные предикаты $P$ в одноместные предикаты $Q$ и выражается в виде:

$$\exists x \in A\left(K_f(x,\ y)P(x)\right)=Q(y). \qquad (1)$$

В равенстве (1) предикаты $P$ и $Q$ – переменные. Предикат $P(x)$ задан на множестве $A$, предикат $Q(y)$ – на множестве $B$. Предикат $P(x)$ на $A$ рассматриваем как экземпляр объекта $A$, предикат $Q(y)$ на $B$ – как экземпляр объекта $B$. Таким образом, морфизм $f\colon A \to B$ преобразует экземпляры объекта $A$ в экземпляры объекта $B$. Естественнее было бы в роли объектов брать не множества $A, B, C, \ldots$ элементов универсума, а множества всех предикатов $P(x)$, $Q(y)$, $R(z), \ldots$, заданных соответственно на множествах $A, B, C, \ldots$, но это не обязательно. Поскольку между такими множествами существует взаимно однозначное соответствие, то они взаимозаменяемы. Взяв множества предикатов в роли объектов, мы могли бы элементы этих множеств брать в роли экземпляров объектов. Недостаток такой интерпретации заключается в том, что конструкция объектов в предикатной категории без необходимости переусложняется.

Предикат $K_f(x,y)$ называется ядром линейного логического оператора, он полностью определяет вид преобразования (1). Предикат $K_f(x,y)$ фиксирован, он задан на $A\times B$. Морфизм $f$ вида (1) полностью определяется предикатом $K_f(x,y)$. В роли множества $\mathrm{Mor}(A,B)$ всех морфизмов вида $f:A\to B$ берем систему всевозможных операций вида (1). В категории Pred каждому морфизму $f\in\mathrm{Pred}$ взаимно однозначно соответствует ядро $K_f(x,y)$ преобразования (1). Каждый морфизм $f:A\to B$ категории Pred можно задать, указав соответствующий ему предикат $K_f(x,y)$ на $A\times B$. Множество $\mathrm{Mor(Pred)}$ получаем объединением всех множеств вида $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Pred}}(A,B)$, где $(A,B)$ – всевозможные пары множеств $A,B\subseteq U$, или же как совокупность преобразований вида (1) со всевозможными ядрами $K(x,y)$, заданными на всевозможных декартовых произведениях $A\times B$ множеств $A,B\subseteq U$.

Примером ядра морфизма категории Pred может служить предикат

$$K(x,y)=(x^a\vee x^b)\,y^1\vee x^a(y^2\vee y^3)\vee x^e y^3, \qquad (а)$$

заданный на декартовом произведении $A\times B$ множеств $A=\{a,b,c,d,e\}$ и $B=\{1,2,3,4\}$. На рис. 1 изображен двудольный граф предиката $K(x,y)$. Линейный логический оператор с этим ядром запишется как

$$Q(y)=\exists x\in\{a,b,c,d,e\}\;(((x^a\vee x^b)y^1\vee x^d(y^2\vee y^3)\vee x^e y^3)P(x). \qquad (б)$$

Определим, к примеру, реакцию $Q(x)$ морфизма (б) на предикат

$$P(x)=x^a\vee x^b\vee x^e. \qquad (в)$$

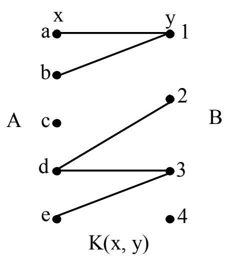


Рис. 1. Двудольный граф предиката $K(x,y)$

По формуле (б) находим:

$$\begin{aligned}Q(y)=\exists x\in\{a,b,c,d,e\}\\ (((x^a\vee x^b)y^1\vee x^d(y^2\vee y^3)\vee\\ \vee x^e y^3)(x^a\vee x^b\vee x^e)=y^1\vee y^3.\end{aligned} \qquad (г)$$

Этот же результат можно получить также и графически (рис. 2). Для получения множества Q собираем вместе все те элементы $y$, которые связаны ребрами графа $K(x,y)$ с элементами $x$, образующими множество $P$.

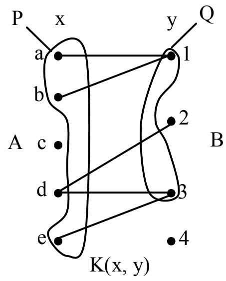


Рис. 2. Реакция $Q(x)$ морфизма на предикат $P(x)$

В итоге получаем $Q=\{1,3\}$. Таким образом, морфизм (б) преобразует множество $P=\{a,b,e\}$ в множество $Q=\{1,3\}$.

Переходим теперь к предикатной интерпретации произведения морфизмов. Определим морфизм $f:A\to B$ как операцию (1) $F_f(P)=Q$, а морфизм $g:B\to C$ – как операцию $F_g(Q)=R$, определяемую равенством:

$$\exists x\in B(K_g(y,z)\,Q(y))=R(z). \qquad (2)$$

Переменный предикат $R(z)$ задан на множестве $C$, а фиксированный предикат $K_g(y,z)$ – на $B\times C$. Образуем операцию $F_h(P)=R$ посредством суперпозиции операций $F_f(P)=Q$ и $F_g(Q)=R$: $F_h(P)=F_g(F_f(P))=R$. Подставляя (1) в (2), получаем выражение для преобразования $F_h$:

$$\exists y\in B(K_g(y,z)(\exists x\in A(K_f(x,y)\,P(y))))=R(z), \qquad (3)$$

которое превращает предикат $P(x)$ на $A$ в предикат $R(z)$ на $C$. После тождественных преобразований равенство (3) приобретает вид:

$$\exists x\in A((\exists y\in B(K_f(x,y)\,K_g(y,z)))\,P(x))=R(z). \qquad (4)$$

Равенство (3) представляет собой линейный логический оператор. В роли его ядра выступает предикат

$$K_h(x,z)=\exists y\in B(K_f(x,y)\,K_g(y,z)) \qquad (5)$$

на $A\times C$ с аргументами $x\in A$ и $z\in C$. Теперь преобразование (3) можно записать более кратко:

$$\exists x\in A(K_h(x,z)\,P(x))=R(z). \qquad (6)$$

Преобразование (6) будем понимать как морфизм $h:A\to C$ категории Pred. Его мы принимаем в роли произведения $fg$ морфизмов $f$ и $g$. Таким, образом, $fg=h$.

Найдем, к примеру, произведение каких-нибудь двух морфизмов категории Pred. Находим $K_h(x,z)$ графически. Двудольные графы ядер $K_f(x,y)$ и $K_g(y,z)$ морфизмов $f$ и $g$ изображены на рис. 3 слева.

Они могут быть преобразованы в двудольный граф ядра $K_h(x,z)$ произведения $fg$ морфизмов $f$ и $g$ следующим образом.

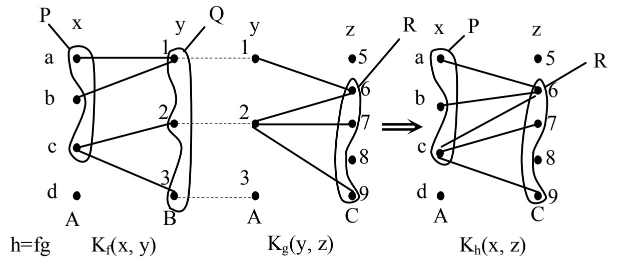


Рис. 3. Произведение двух морфизмов категории Pred

На первом этапе вводим горизонтальные связи (прочерчены пунктиром) между одноименными точками одинаковых множеств $B$, расположенных рядом в соседних графах $K_f(x,y)$ и $K_g(y,z)$. На втором этапе превращаем пару графов $K_f(x,y)$ и $K_g(y,z)$, которые мы соединили последовательно, в равносильный им один граф $K_h(x,z)$. Для формирования ребер графа $K_h(x,z)$ выявляем все пути от точек множества $A$ к точкам множества $C$ в цепочке графов $K_f(x,y)$ и $K_g(y,z)$. Каждому из таких путей ставим в соответствие ребро графа $K_h(x,z)$. Полученный в результате этих действий граф $K_h(x,z)$ изображен на рис. 3 справа.

То же самое ядро $K_h(x,z)$ морфизма $h$ можно получить для этого примера также и аналитически, производя вычисления по формуле (5). Имеем: $A=\{a,b,c,d\}$; $B=\{1,2,3\}$; $C=\{5,6,7,8,9\}$;

$$K_f(x,\ y)=(x^a\vee x^b)y^1\vee x^c(y^2\vee y^3); \qquad (д)$$

$$K_g(y,z)=y^1z^6\vee y^2(z^6\vee z^7\vee z^9). \qquad (е)$$

Отыскиваем предикат $K_h$:

$$\begin{aligned}&K_h(x,z)=\exists y\in\{1,2,3\}\\&(((x^a\vee x^b)y^1\vee x^c(y^2\vee y^3))\wedge\\&\wedge(y^1z^6\vee y^2(z^6\vee z^7\vee z^9)))=\\&=(x^a\vee x^b)z^6\vee x^c(z^6\vee z^7\vee z^9)\vee x^c\times 0=\\&=(x^a\vee x^b)z^6\vee x^c(z^6\vee z^7\vee z^9).\end{aligned} \qquad (ж)$$

Мы получили то же самое ядро $K_h(x,z)$, которое изображено на рис. 3 в виде двудольного графа.

Определим теперь реакцию рассмотренных в вышеприведенном примере произведения морфизмов $fg$ и равносильного ему морфизма $h$. Пусть, к примеру, $P(x)=x^a\vee x^c$. Сначала находим реакцию морфизма $fg$ на предикат $P(x)$. Вычисляем реакцию $Q(y)$ морфизма $f$ на предикат $P(x)$ по формуле (1):

$$\begin{aligned}&Q(y)=\exists x\in\{a,b,c,d\}(K_f(x,y)P(x))=\\&\exists x\in\{a,b,c,d\}(((x^a\vee x^b)y^1\vee x^c(y^2\vee y^3))(x^a\vee x^c))=\\&y^1\cdot 1\vee y^1\cdot 0\vee(y^2\vee y^3)\cdot 1\vee 0\cdot 0=y^1\vee y^2\vee y^3=Q(y).\end{aligned} \qquad (з)$$

Вычисляем реакцию $R(z)$ морфизма $g$ на предикат

$$Q(y)=y^1\vee y^2\vee y^3 \qquad (и)$$

по формуле (3):

$$\begin{aligned}&R(z)=\exists y\in\{1,\ 2,\ 3\}\big(K_g(y,\ z)Q(y)\big)=\exists y\in\{1,\ 2,\ 3\}\\&((y^1z^6\vee y^2(z^6\vee z^7\vee z^9))(y^1\vee y^2\vee y^3))=\\&=z^6\times 1\vee(z^6\vee z^7\vee z^9)\times 1\vee 0\times 1=z^6\vee z^7\vee z^9.\end{aligned} \qquad (к)$$

Итак:

$$R(z)=z^6\vee z^7\vee z^9. \qquad (л)$$

Теперь вычислим реакцию $R(z)$ морфизма $h$ по формуле (6):

$$\begin{aligned}&R(z)=\exists x\in\{a,b,c,d\}\big(K_h(x,\ z)P(x)\big)=\\&=\exists x\in\{a,b,c,d\}(((x^a\vee x^b)z^6\vee x^c(z^6\vee\\&\vee z^7\vee z^9))(x^a\vee x^c))=z^6\times 1\vee z^6\times 0\vee\\&\vee(z^6\vee z^7\vee z^9)\times 1\vee 0\times 0=z^6\vee z^7\vee z^9.\end{aligned} \qquad (м)$$

Получили совпадение реакций морфизмов $fg$ и $h$, демонстрирующее их тождественность.

Введем, далее, тождественные морфизмы в категории $\mathrm{Pred}$. В роли ядра тождественного морфизма $e_A{:}A\to A$ в категории $\mathrm{Pred}$ принимаем предикат равенства $D_A(x,y)$ на $A\times A$:

$$D_A(x,y)=\bigvee_{a\in A} x^a y^a. \qquad (7)$$

Приведем пример тождественного морфизма в категории $\mathrm{Pred}$. Пусть $A=\{1,2,3\}$. По формуле (7) находим:

$$D_A(x,y)=x^1y^1\vee x^2y^2\vee x^3y^3. \qquad (н)$$

Тождественных морфизмов в предикатной категории много. Их столько же, сколько предикатов равенства $D_A(x,y)$. Каждому подмножеству $A$ универсума $U$ соответствует свой тождественный морфизм $e_A{:}A\to A$. Для каждого морфизма $f{:}A\to B$ категории $\mathrm{Pred}$ существует единственный правый тождественный морфизм $e$ и единственный левый тождественный морфизм $e'$, такие, что $fe=f$ и $e'f=f$, причем $e=e_B$ и $e'=e_A$. Любой тождественный морфизм $e$ предикатной категории обладает свойством $ee=e$. Произведение $fg$ морфизмов $f{:}A\to B$ и $g{:}B\to C$ в категории $\mathrm{Pred}$ всегда существует, причем $\mathrm{Dom}f=A$ и $\mathrm{Cod}f=C$. Закон ассоциативности для умножения морфизмов в предикатной категории выполняется. Его справедливость можно наглядно продемонстрировать на двудольных графах. Присоединяем справа второй двудольный граф к первому, а затем к полученной цепочке графов справа присоединяем третий граф. В результате получаем некоторый двудольный граф. Точно такой же граф получится, если присоединить справа ко второму графу третий, а затем полученную цепочку графов присоединить справа к первому графу.

В свете только что сказанного, можно прийти к выводу, что предикатная категория подчиняется всем требованиям, предъявляемым к классической категории, и альтернативы этому выводу нет. Однако, если присмотреться повнимательнее, то можно обнаружить некоторые обстоятельства, дающие повод усомниться в этом. Равенствами (1)-(6) мы определили произведение fg морфизмов f и g в предикатной категории только для случаев когда $f{:}A\to B$ и $g{:}B\to C$. Вопрос о том, существует или нет произведение fg морфизмов $f{:}A\to B$ и $g{:}B\to C$ в общем случае, когда $B\neq C$, остался пока без ответа. Однако, вне зависимости от того, каким будет ответ на этот вопрос, никто нам не может запретить принять решение не образовывать произведения fg морфизмов $f{:}A\to B$ и $g{:}B\to C$ во всех тех случаях, когда $B\neq C$. Если так сделать, тогда мы получаем предикатную категорию, подчиняющуюся всем требованиям, предъявляемым к классической категории. Если окажется, что такого рода произведения морфизмов формировать невозможно, то это решение будет вынужденным. А если можно? Тогда откроется путь для иного, альтернативного определения предикатной категории, не вписывающегося в понятие классической категории.

Попытаемся ответить на поставленный вопрос. Для начала возьмем два тождественных морфизма $e_A{:}A\to A$ и $e_B{:}B\to B$ $(A\neq B)$. Из определения классической категории следует, что произведение $e_Ae_B$ не существует. А как обстоит дело в предикатной категории? Обратимся к конкретному примеру. Пусть $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{b,c,d,e\}$. Пробуем получить произведение $e_Ae_B$ морфизмов $e_A$ и $e_B$, графическим методом, описанным выше. (Аналитический метод применить невозможно, поскольку определения умножения морфизмов в математических терминах для данного случая в предикатной категории мы пока не имеем). Оказывается, что графический метод успешно срабатывает, причем без каких бы то ни было осложнений, и дает в результате вполне определенное произведение морфизмов. На рис. 4 слева изображены двудольные графы ядер морфизмов $e_A$ и $e_B$. Вводим горизонтальные связи между одноименными точками, но теперь уже не одинаковых, а различных множеств A и B, расположенных рядом в соседних графах, помеченных символами $e_A$ и $e_B$. Далее превращаем пару графов $e_A$ и $e_B$, которые мы соединили последовательно, в равносильный им один граф, помеченный нами символом $e_{AB}$. В результате получаем произведение $e_{AB}=e_Ae_B$. Граф $e_{AB}$ изображен на рис. 4 справа. Важно отметить, что полученный морфизм $e_{AB}$ не является тождественным.

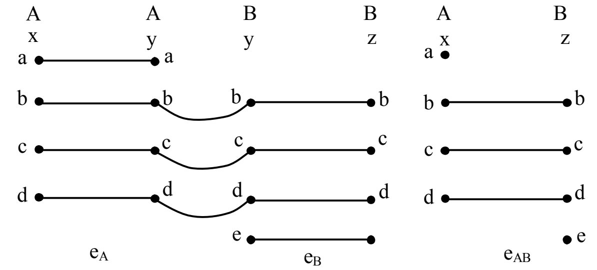


Рис. 4. Двудольные графы ядер морфизмов $e_A$ и $e_B$

Ясно, что точно таким же способом можно получить произведение любых морфизмов $f{:}A\to B$ и $g{:}C\to D$ во всех тех случаях, когда $B\neq C$. Соответствующий пример представлен на рис. 5.

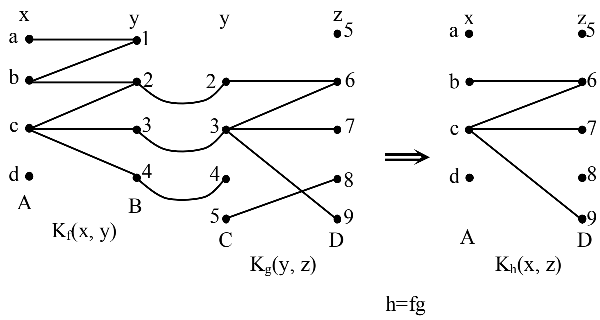


Рис. 5. Произведение любых морфизмов, когда $B\neq C$

Итак, никаких запретов на образование произведения любых морфизмов в предикатной категории нет. Это значит, что умножение в ней можно считать всюду определенным. Этот факт, однако, не препятствует считать умножение в предикатной категории частичным. А это означает, что возможны два различных определения предикатной категории. Одно из них использует частичное умножение морфизмов, оно охватывается понятием классической категории. Такую предикатную категорию назовем классической. Второе определение предикатной категории использует всюду определенное умножение. Оно не охватывается понятием классической категории. Такую предикатную категорию назовем модифицированной. Каждый из вариантов предикатной категории заслуживает внимания, может представлять интерес для теоретической разработки и практических приложений. Мы считаем также, что имеет смысл абстрагироваться от понятия модифицированной предикатной категории и сформировать в результате, как альтернативу общему понятию классической категории, общее понятие модифицированной категории. Имеет смысл развивать, кроме теории классических категорий, также и теорию модифицированных категорий.

Дадим теперь математическое определение умножения морфизмов в модифицированной предикатной категории. Тот же результат, который мы получили графически на произвольных графах (рис. 5), можно получить также и аналитически по следующей формуле:

$$K_h(x,z)=\exists y\in B\cap C(K_f(x,y)K_g(y,z)). \qquad (8)$$

Здесь $h=fg$, $f:A\to B$ и $g:C\to D$, $A,B,C,D$ – произвольно выбираемые подмножества универсума $U$. Предикат $K_f(x,y)$ задан на $A\times B$, предикат $K_g(y,z)$ – на $C\times D$, а предикат $K_h(x,z)$ – на $A\times D$. Определим произведение fg морфизмов f и g в модифицированной предикатной категории для примера, представленного на рис. 4. Принимаем

$$A=\{a,b,c,d\};\ B=\{1,2,3,4\};$$

$$C=\{2,3,4,5\},\ D=\{5,6,7,8,9\}.$$

Ядра морфизмов f и g записываются в виде:

$$K_f(x,\ y)=x^a y^1\vee x^b(y^1\vee y^2)\vee x^c(y^2\vee y^3\vee y^4); \quad (о)$$

$$K_g(y,\ z)=(y^2\vee y^3)z^6\vee y^3(z^7\vee z^9)\vee y^5z^8. \quad (п)$$

Ядро $K_h(x,z)$ произведения $h=fg$ определяем по формуле (8):

$$\begin{gathered}K_h(x,z)=\exists y\in\{2,3,4\}(x^a\,y^1\vee x^b(y^1\vee y^2)\vee\\ \vee x^c(y^2\vee y^3\vee y^4))((y^2\vee y^3)z^6\vee y^3(z^7\vee z^9)\vee\\ \vee y^5y^8)=(x^b\vee x^c)\vee z^6\vee x^c(z^7\vee z^9).\end{gathered} \quad (р)$$

Как видим, результат расчетов по формуле в точности соответствует графу $K_h(x,z)$, который был получен ранее графическим методом (рис. 5).

## Выводы

Нам осталось сравнить свойства модифицированной предикатной категории со свойствами классической. В классической категории умножение морфизмов частично, в модифицированной – всюду определено. В обеих категориях для каждого морфизма f существует единственный тождественный морфизм e, удовлетворяющий равенству $fe=f$, и единственный тождественный морфизм e', удовлетворяющий равенству $e'f=f$. В обеих категориях любой тождественный морфизм e удовлетворяет равенству $ee=e$. Понятие классической единицы, как оно представлено в моноиде, определяется следующим образом: единица e одна, и она обладает свойствами $fe=f$ и $ef=f$ при любом f. Как в классической, так и в модифицированной предикатных категориях понятие единицы несколько деформируется. В обеих категориях вместо одной появляется много единиц.

В классической категории тождества $fe=f$ и $ef=f$ сохраняют силу для любой из единиц e и для любого морфизма f, но только тогда, когда произведения fe и ef существуют. В модифицированной категории произведения fe и ef существуют при любых e и f, однако равенства $fe=f$ и $ef=f$ выполняются не всегда. Все, что можно обнаружить в классической категории, можно наблюдать и в категории модифицированной.

В модифицированной же категории область наблюдаемого шире, там можно обнаружить нечто такое, чего вообще нет в классической категории.

Таким образом, в некотором смысле модифицированная категория является расширением категории классической.

## Список литературы


*1. Лещинская, И.А. Анализ безобъектной категории и категории с объектами для построения категорной алгебры [Текст] / И.А. Лещинская // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2015. – Вип. 4(129). – С. 68-71.*

*2. Лещинская, И.А. Анализ категорных диаграмм и алгебры предикатов как базы предикатной категории [Текст] / И.А. Лещинская // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУПС, 2015. – Вип. 2(43). –. С. 107-111.*



*Поступила в редколлегию 1.04.2015*

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. С.Ф. Чалый, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.


### ПРО ПРЕДИКАТНІ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ КЛАСИЧНОЇ КАТЕГОРІЇ

І.А. Лещінська


*Розглядається задача аналізу класичної категорії та її модифікації – предикатної категорії, яка надає більші можливості для додатків теорії категорій в області комп'ютеризації та інформатизації. Зокрема, предикатна категорія є гарною формальної базою для побудови високопродуктивних мозкоподібних комп'ютерів паралельної дії. У даній, другої частини роботи, розглянуті категорна діаграма і необхідний в контексті дослідження апарат алгебри скінченних предикатів.*



***Ключові слова:*** *категорія, предикатна інтерпретація категорії, модифікована категорія.*


### ABOUT PREDICATE INTERPRETATIONS OF THE CLASSIC CATEGORIES

I.A. Leschynskaya


*The problem of analyzing the classical category and its modifications - predicate category, which offers more opportunities for applications of category theory in the field of computerization and information. In particular, the predicate category is a good formal basis for building high-performance brain-like computers parallel action. In this, the second part of the work, considered categorical chart and necessary in the context of the research the finite predicates algebra apparatus.*



***Keywords:*** *category, predicate interpretation category, the modified category.*