

УДК 006.91

О.А. Боцюра, И.П. Захаров

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ ТИПА А НА ОСНОВЕ БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА

Описана ревизия GUM, рассмотрены основные особенности оценивания стандартной и расширенной неопределенности измерений типа А на основе Байесовского подхода.

Ключевые слова: неопределенность измерений, Байесовский подход, функция плотности вероятности.

Введение

В 1992 году Рабочая группа ISO, состоящая из экспертов BIPM, ISO, OIML и IEC, обнародовала «Руководство по выражению неопределенности измерений» (GUM:1993) [1], которое в настоящее время является фактическим международным стандартом выражения качества измерений в аккредитованных на соответствие требованиям ISO/IEC 17025 [2] лабораториях. GUM был переиздан в 2008 году [3] с незначительными исправлениями, хотя в процессе его использования в деятельности лабораторий накапливались вопросы по его применению в сложных ситуациях и претензии к достоверности получаемых оценок. Это поставило задачу перед рабочей группой объединенного комитета по руководствам в метрологии JCGM WG1 о ревизии GUM [4]. Ключевым вопросом при этом является поиск правильного баланса между точностью изложения материала и простотой применения для среднего пользователя.

JCGM-WG 1 считает, что наиболее простым и интуитивно понятным способом преодолеть упомянутые трудности, было принять в новом Руководстве Байесовский подход к оцениванию неопределенности измерений, используемый в приложениях GUM-S1 и GUM-S2 [5-6]. В этих документах функции плотности вероятности (PDF) связаны с входными величинами в модели измерения и трансформируются через нее, используя метод Монте-Карло. Результатом этой процедуры является численное приближение к PDF для измеряемой величины, или совместное PDF для многомерных измеряемых величин. PDF является универсальным способом выражения состояния знаний экспериментатора об измеряемой величине [7]. Из PDF могут быть извлечены такие параметры как математическое ожидание и стандартное отклонение, принимаемые, соответственно, в качестве оценок истинного значения измеряемой величины и связанной с ним стандартной неопределенностью. Кроме того, из PDF может быть получен интервал охвата (обычно наименьший или вероятностно симметричный) для любой вероятности охвата.

В [4] отмечается, что «В действующем руководстве Байесовский вывод не используется, и Байесовский подход принимается только как способ рассмотрения нестатистических вкладов в неопределенность, так называемых оценок типа В. В самом деле, в процедуре Руководства дисперсии распределений используются и распространяются таким же образом, как и в частотном методе. Соответственно, степени свободы закреплены за этими оценками либо закономерно, для оценок типа А, или искусственно, для оценок типа В (см [1], G.4.2). Таким образом, в действующем Руководстве Байесовский подход введен только для того, чтобы избежать трудностей, но частотный взгляд является доминирующим. Этот подход включает в себя ряд осложнений, особенно в построении интервала охвата. Кроме того, предложенная процедура страдает от отсутствия общности».

Таким образом, основным мотивом для принятия решения о пересмотре Руководства являлось то, что Руководство после принятия приложений GUM-S1 и GUM-S2 больше не согласуется с ними в части оценивания составляющих типа А.

Целью статьи является рассмотрение особенностей оценивания неопределенности измерений типа А в соответствии с Байесовским подходом.

1. Функция плотности вероятности для статистических вкладов неопределенности и ее параметры

Исходными данными для оценки стандартной неопределенности типа А входной величины X_j являются результаты ее многократных измерений $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn_j}$, где n_j – количество этих измерений. Чаще всего за оценку x_j величины X_j принимают их среднее арифметическое:

$$x_j = \bar{x}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ji}. \quad (1)$$

Такая оценка является состоятельной и несмещенной при любом законе распределения $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jn_j}$ и эффективной для нормального за-

кона [8], который принимается для результатов измерений исходя из центральной предельной теоремы теории вероятности в предположении, что на результат каждого измерения воздействует множество факторов, вызывающих его отклонение от среднего значения.

За несмещенную оценку дисперсии отдельных измерений принимают величину:

$$s^2(x_{ji}) = \frac{1}{n_j - 1} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ji} - \bar{x}_j)^2. \quad (2)$$

Оценка стандартного отклонения среднего арифметического будет равна:

$$s(\bar{x}_j) = s(x_{ij}) / \sqrt{n_j} \quad (3)$$

и принимается в [1] равной стандартной неопределенности типа А.

Границы интервала охвата для X_j в этом случае имеют вид [7]:

$$\bar{x}_j - t_p(v_j) \cdot s(\bar{x}_j) \leq X_j \leq \bar{x}_j + t_p(v_j) \cdot s(\bar{x}_j), \quad (4)$$

где $t_p(v_j)$ – коэффициент Стьюдента для вероятности p и числа степеней свободы $v_j = n_j - 1$. Этот коэффициент рассчитывается из равенства:

$$\int_0^{t_p(v_j)} p(t, v_j) dt = \frac{p}{2}, \quad (5)$$

где
$$p(t, v_j) = \frac{1}{\sqrt{\pi v_j}} \frac{\Gamma\left(\frac{v_j + 1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v_j}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{v_j}\right)^{-\frac{v_j + 1}{2}} \quad (6)$$

распределения Стьюдента (t-распределение).

Это распределение имеет нулевое математическое ожидание и дисперсию

$$\alpha_j^2 = \frac{v_j}{v_j - 2}. \quad (7)$$

Теоретические $\alpha_{\text{теор}}$ и рассчитанные методом Монте-Карло $\bar{\alpha}$ значения α приведены в табл. 1.

Байесовский подход предполагает оценку неопределенности измерений как стандартного отклонения распределения X_j . Таким образом, стандартная неопределенность типа А будет равна:

$$u_A(x_j) = \alpha_j \cdot s(\bar{x}_j) = \sqrt{\frac{(n_j - 1)}{(n_j - 3)}} s(\bar{x}_j), \quad (8)$$

Зависимость коэффициента α от n приведена на рис. 1. Из рис. 1 видно, что максимальное отличие $u_A(x_i)$ от $s(\bar{x}_j)$ достигается при $n=4$ и равно $\sqrt{3}$. При $n \rightarrow \infty$ коэффициент $\alpha \rightarrow 1$, а оценка $u_A(x_i)$ стремится к $s(\bar{x}_j)$, предписанной в [1].

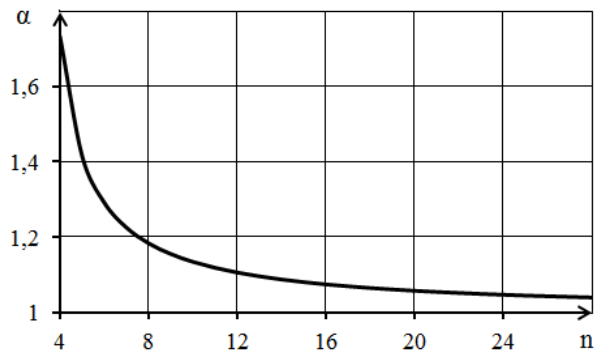


Рис. 1. Зависимость коэффициента α от числа измерений n

Необходимо отметить, что оценка (8) будет существовать только при $n > 3$. Это условие вынудило ограничить определение многократных измерений, принятое в [9], четырьмя измерениями. Однако в метрологической практике довольно часто число производимых измерений принимается равным трем (например, при измерениях, сопряженных с большими временными затратами) [10].

Следует отметить, что численный эксперимент, проведенный методом Монте-Карло с объемом выборок $N=10^7$ все же показывает наличие у распределения Стьюдента с $v = 2$ стабильного значения стандартного отклонения α , в среднем равного 4 (табл. 1).

Таблица 1

Стандартные отклонения распределения Стьюдента α для степеней свободы $v=1 \dots 6$

i	v=1	v=2	v=3	v=4	v=5	v=6
1	1920	4,231	1,723	1,415	1,290	1,224
2	6505	3,877	1,721	1,415	1,291	1,225
3	7032	3,692	1,729	1,414	1,291	1,225
4	1530	4,299	1,731	1,414	1,291	1,225
5	1032	4,032	1,743	1,414	1,290	1,225
6	1933	4,089	1,738	1,415	1,290	1,224
7	6514	3,923	1,729	1,416	1,291	1,225
8	6910	4,209	1,736	1,415	1,290	1,224
9	6127	3,806	1,744	1,416	1,292	1,225
10	2626	3,851	1,734	1,414	1,290	1,224
$\bar{\alpha}$	4213	4,001	1,7328	1,4148	1,2906	1,2246
$s(\bar{\alpha})$	25768	0,203	0,0077	0,0008	0,0007	0,0005
$\alpha_{\text{теор}}$	–	–	1,7321	1,4142	1,2910	1,2247

Однако стандартное отклонение его оказывается в 25 раз больше, чем для $v = 3$ и в 250 раз больше, чем для $v \geq 4$. Этот же эксперимент показал, что для $v = 1$ α не имеет стабильного значения (табл. 1).

В работе [7] отмечается, что расширенная неопределенность $U_A(p)$, понимаемая как полуширина интервала охвата, существует для любых $n \geq 2$ и равна

$$U_A(p) = t_p(n_j - 1) \cdot s(\bar{x}_j). \quad (9)$$

С другой стороны, эта неопределенность может быть вычислена как

$$U_A(p) = k_p \cdot u_A(x_j) = k_p \cdot \alpha_j \cdot s(\bar{x}_j), \quad (10)$$

где k_p – коэффициент охвата, откуда

$$k_p = \frac{t_p(n_j - 1)}{\alpha_j} = t_p(n_j - 1) \sqrt{\frac{n_j - 3}{n_j - 1}}. \quad (11)$$

Зависимость k_p для неопределенности типа А для разных уровней значимости p и числа измерений $n > 3$ имеет вид, представленный на рис. 2.

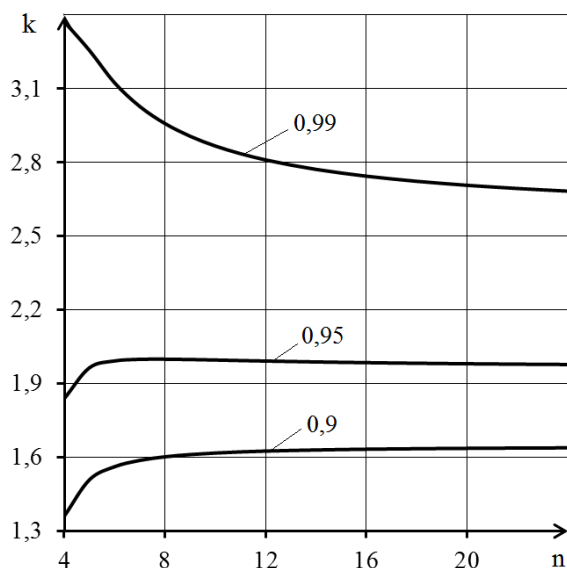


Рис. 2. Зависимость коэффициентов охвата для разных уровней значимости p и числа измерений n

Из рис. 2 видно, что для вероятности 0,95 значения коэффициента охвата изменяются в диапазоне от 1,84 (при $n=3$) до 2,0 (при $n=8$) и с дальнейшим увеличением стремится к 1,96. Если приблизительно считать $k_{0,95}=1,96$, погрешность вычисления расширенной неопределенности будет находиться в пределах от 6,7 до -1,9 %. Принятие $k_{0,95}=1,915$ симметрирует границы погрешности вычисления расширенной неопределенности для всех значений $n > 3$ до $\pm 4,2$ %. Для других вероятностей ($p=0,9$ или $p=0,99$) использование единого коэффициента охвата для всех n приводит к существенным погрешностям вычисления расширенной неопределенности, поэтому не применимо. Следует отметить, что применение вероятности 0,95 для вычисления расширенной неопределенности рекомендует MRA [11].

2. Комбинация вкладов неопределенности типа А

В общем виде модель измерений описывается выражением [1]:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_m), \quad (12)$$

где Y – измеряемая величина, X_1, X_2, \dots, X_m – входные величины.

В этом случае выражение для суммарной стандартной неопределенности Y при отсутствии корреляции между аргументами будет иметь вид:

$$u_{cA}(y) = \sqrt{\sum_{j=1}^m c_j^2 u_A^2(\bar{x}_j)}, \quad (13)$$

где c_j – соответствующие коэффициенты чувствительности.

Расширенную неопределенность типа А можно вычислить по формуле:

$$U_A(p) = k_p u_{cA}(y) = k_p \sqrt{\sum_{j=1}^m c_j^2 \alpha_j^2 s^2(\bar{x}_j)}, \quad (14)$$

где k_p – коэффициент охвата.

В частном случае, при $n_j = n$, будем иметь

$$U_A(p) = k_p \alpha \sqrt{\sum_{j=1}^m c_j^2 s^2(\bar{x}_j)}. \quad (15)$$

Общий коэффициент α , вынесенный за корень, говорит о том, что PDF для измеряемой величины в этом случае – распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\nu = n - 1$.

В общем случае приблизительно можно принять в выражении (14) $k_p = 1,96$ с указанной выше погрешностью.

Более точно значение k_p можно вычислить исходя из следующих рассуждений.

В работе [12] показано, что расширенная неопределенность для вероятности $p=0,95$ композиции законов распределения Стьюдента, определяется выражением (т.н. закон распространения расширенной неопределенности):

$$U_A(p) = \sqrt{\sum_{j=1}^m U_p^2(x_j)} = \sqrt{\sum_{j=1}^m t_{0,95}^2(\nu_i) c_j^2 s^2(\bar{x}_j)}. \quad (16)$$

В частном случае, при $n_j = n$, будем иметь

$$U_A(p) = t_{0,95}(n-1) \sqrt{\sum_{j=1}^m c_j^2 s^2(\bar{x}_j)}, \quad (17)$$

что хорошо согласуется с выводами, сделанными после выражения (15).

С другой стороны $U_A(p)$ определяется выражением (14), поэтому

$$k_p = \sqrt{\sum_{j=1}^m t_{0,95}^2(v_j) c_j^2 s^2(\bar{x}_j)} / \sqrt{\sum_{j=1}^m c_j^2 \alpha_j^2 s^2(\bar{x}_j)}. \quad (18)$$

При наличии коррелированных входных величин, например X_j и X_k следует рассчитать их суммарную стандартную неопределенность типа А по формуле:

$$\begin{aligned} u_{jk}(y) &= \\ &= \sqrt{c_j^2 u_A^2(\bar{x}_j) + 2\rho_{jk} c_j c_k u_A(\bar{x}_j) + c_k^2 u_A^2(\bar{x}_k)} = \\ &= \alpha_{jk} \sqrt{c_j^2 s^2(\bar{x}_j) + 2\rho_{jk} c_j c_k s(\bar{x}_j) s(\bar{x}_k) + c_k^2 s^2(\bar{x}_k)}, \quad (19) \end{aligned}$$

где ρ_{jk} – коэффициент корреляции между данными измерений X_j и X_k , α_{jk} – стандартное отклонение для распределения Стьюдента с числом степеней свободы ν_{jk} , одинаковым для обеих входных величин. После расчета $u_{jk}(y)$ ее можно подставить вместо вкладов неопределенности $u_{jk}(y)$ и $u_{jk}(y)$ в формулу (13). Все остальные выражения (14)-(18) будут справедливы для этого случая.

Выводы

1. Ревизия GUM, проводимая JCGM WG1 вызвана тем, что GUM после принятия приложений GUM-S1 и GUM-S2 больше не согласуется с ними. В основу нового Руководства будет положен Байесовский подход к оцениванию неопределенности измерений, опирающийся на распределения входных величин.

2. Рассмотрена функция плотности вероятности для статистических вкладов неопределенности и ее параметры. Показано, что этот подход применим для числа многократных измерений больше четырех, однако его применение возможно и для трех измерений, поскольку методом Монте-Карло показано, что распределение Стьюдента для числа степеней свободы два имеет стабильное стандартное отклонение, равное 4.

3. Получены выражения для оценивания суммарной стандартной и расширенной неопределенности для комбинации вкладов неопределенности типа А. Показано, что эти выражения могут быть использованы при отсутствии и наличии корреляции между результатами измерений входных величин.

ности для комбинации вкладов неопределенности типа А. Показано, что эти выражения могут быть использованы при отсутствии и наличии корреляции между результатами измерений входных величин.

Список литературы

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, ISO, Geneva, First Edition, – 1995 – 101 p.*
2. *ISO/IEC 17025:2005. General requirements for the competence of testing and calibration laboratories.*
3. *JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data – Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – JCGM, 2008. – 120 p.*
4. *Bich et al. Revision of the «Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement»// Metrologia. – 2012. – Vol. 49, pp. 702–705.*
5. *JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. – JCGM, 2008. – 88 p.*
6. *JCGM 102:2011 Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities. – JCGM, 2011. – 72 p.*
7. *Вебер В. Информация о измеряемой величине как основа для формирования плотности вероятности / В. Вебер // Измерительная техника. – 2003. – № 9. – С. 3-9.*
8. *Крамер Г. Математические методы статистики / Г. Крамер. – М.: Мир, 1975. – 648 с.*
9. *ГОСТ Р 8.736 – 2011. ГСИ. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения. – М.: Стандартинформ, 2013 – 24 с.*
10. *Мироновский Л.А. Алгоритмы оценивания результата трех измерений / Л.А. Мироновский, В.А. Слаев. – СПб.: Професионал, 2010 – 192 с.*
11. *Mutual recognition of national measurement standards and of calibration and measurement certificates issued by national metrology institutes. Paris, 1999 – 48 p.*
12. *Захаров И.П. Композиция законов распределения Стьюдента / И.П. Захаров // Системи обробки інформації. – 2005. – Вип. 8. – С. 28-35.*

Поступила в редколлегию 1.04.2015

Рецензент: д-р техн. наук. проф. Ю.П. Мачехин, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

ОСОБЛИВОСТІ ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ ЗА ТИПОМ А НА ОСНОВІ БАЙЄСІВСЬКОГО ПІДХОДУ

О.А. Боцюра, І.П. Захаров

Описано ревізію GUM, розглянуто основні особливості оцінювання стандартної та розширеної невизначеності вимірювань за типом А на основі Байєсівського підходу.

Ключові слова: невизначеність вимірювань, Байєсівський підхід, функція щільності ймовірності.

PECULIARITIES OF EVALUATION OF MEASUREMENT UNCERTAINTY TYPE A BASED ON A BAYESIAN APPROACH

O.A. Botsiura, I.P. Zakharov

The revision of GUM is described, the basic peculiarities of evaluation of standard and extended measurement uncertainties of type A based on the Bayesian approach is reviewed.

Keywords: measurement uncertainty, Bayesian approach, probability density function.