УДК 519.237

Л.Г. Раскин, О.В. Серая

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФУНКЦИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ БИНЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

Предложена методика получения описания семейства функций принадлежности, соответствующих заданному бинечеткому числу. Технология применения этой методики детально проиллюстрирована на простом примере отыскания семейства функции принадлежности треугольного нечеткого числа, один из параметров функции принадлежности которого также треугольное нечеткое число. Рассмотрен метод расчета ожидаемого значения степени принадлежности возможных значений бинечетких чисел с двухуровневой неопределенностью.

Ключевые слова*: нечеткая математика, бинечеткие числа, функция принадлежности, ожидаемое значение, аналитическое описание, двухуровневая неопределенность.*

Введение

Нечеткая математика предлагает эффективный инструментарий для построения моделей систем, процесс функционирования которых протекает в условиях неопределенности. Все более широкое использование технологий нечеткой математики объясняется простотой определения величин, непосредственно описывающих неопределенность состояния среды и системы. При этом необходимый и достаточный способ определения этих величин – задание функции принадлежности. Эта проблема, как известно, решается следующим образом: выбирают тип соответствующей функции и определяют ее параметры. Например, треугольное нечеткое число x задают следующей функцией принадлежности:

$$\mu_x(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ (x-a)/(c-a), & a\le x<c,\\ (b-x)/(b-c), & c\le x<b,\\ 0, & x>c.\end{cases}$$

Используемые при решении практических задач различные типы функций принадлежности (треугольные, трапециевидные, $L-R$ типа и т.д.) во многих случаях обеспечивают адекватное описание состояния среды и системы. Вместе с тем, на практике возникают задачи, требующие более тонких подходов к построению моделей реальных объектов.

Пусть, например, в стандартной задаче управления запасами требуется описание спроса на некоторый товар. Предположим, что этот спрос описывается треугольным нечетким числом. Однако, при практическом определении параметров соответствующей функции принадлежности выясняется, что эти параметры не могут быть заданы точно. Если для описания этих параметров использовать нечеткие числа, то исходное число x оказывается бинечетким. Такие нечеткие числа были введены в [1], возможности их использования для анализа систем обсуждались в [2, 3], но формальные технологии выполнения операций над ними не определены, что является естественным следствием отсутствия аналитического описания функций принадлежности таких нечетких величин.

Целью статьи является построение описания функции принадлежности бинечеткого числа.

Постановка задачи

Пусть, например, простейшая функция принадлежности нечеткого числа x имеет вид (1).

$$\mu_x(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ (x-a)/(c-a), & a\le x\le c,\\ 0, & x>c.\end{cases} \tag{1}$$

Предположим теперь, что, в частности, параметр a этой функции принадлежности $\mu_x(x)$ – есть треугольное нечеткое число (рис. 1) с функцией принадлежности $\mu_a(a)$, имеющей вид

$$\mu_a(a)=\begin{cases}0, & a<a_1,\\ (a-a_1)/(c_1-a_1), & a_1\le a<c_1,\\ (b_1-a)/(b_1-c_1), & c_1\le a\le b_1,\\ 0, & a>b_1.\end{cases} \tag{2}$$

Вид этой функции принадлежности представлен на рис. 1.

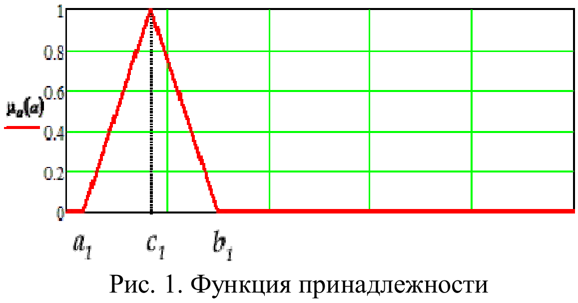

Рис. 1. Функция принадлежности треугольного нечеткого числа a

Рассмотрим задачу получения аналитического описания возникающего при этом бинечеткого числа.

Основные результаты. Методика построения функций принадлежности бинечетких чисел

Нечеткому числу x с функцией принадлежности (1) соответствует степень принадлежности универсуму $X=[a,c]$, равная четкому числу $\frac{x-a}{c-a}$. Если теперь a - есть нечеткое число, то эта степень принадлежности тоже становится нечетким числом, поскольку при нечетком a возникает множество функций принадлежности $\mu(x,a)$, каждая из которых для фиксированного x задает значение степени принадлежности числа x новому универсуму $X=[a_1,c]$. Это множество функций принадлежности отображено на рис. 2.

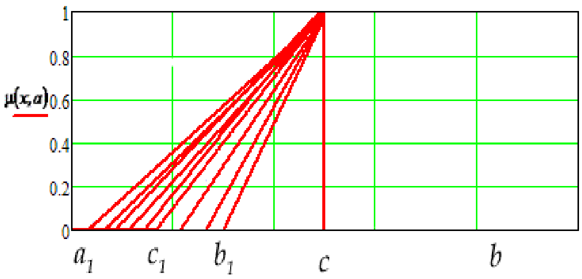

Рис. 2. Множество функций принадлежности $\mu(x,a)$ при нечетком значении a

Найдем функцию принадлежности нечеткого числа $u=\frac{x-a}{c-a}$, определяющую степень принадлежности бинечеткого числа x универсуму $X=[a_1,c]$ с учетом нечеткости параметра a.

Используя стандартную технологию [1, 4–5], а также правила выполнения операций над нечеткими числами имеем

$$u=f(a)=\frac{x-a}{c-a},$$

$$a=f^{-1}(u)=\frac{uc-x}{u-1}.$$

При этом

$$u\in\left[\frac{x-a_{max}}{c-a_{max}},\frac{x-a_{min}}{c-a_{min}}\right].$$

Тогда

$$\mu(u)=\mu_a(u).$$

Аналитическое выражение для $\mu_a(u)$ зависит от выбора значения x.

Пусть $x>b_1$. Тогда $a\in[a_1,b_1]$ и

$$\mu_a(u)=\begin{cases}0, & \frac{uc-x}{u-1}<a_1,\\ \frac{\frac{uc-x}{u-1}-a_1}{c_1-a_1}, & a_1\le\frac{uc-x}{u-1}<c_1,\\ \frac{b_1-\frac{uc-x}{u-1}}{b_1-c_1}, & c_1\le\frac{uc-x}{u-1}\le b_1,\\ 0, & \frac{uc-x}{u-1}>b_1.\end{cases} \qquad (3)$$

Пусть теперь $c_1<x<b_1$. Тогда $a\in[a_1,x]$ и

$$\mu_a(u)=\begin{cases}0, & \frac{uc-x}{u-1}<a_1,\\ \frac{\frac{uc-x}{u-1}-a_1}{c_1-a_1}, & a_1\le\frac{uc-x}{u-1}<c_1,\\ \frac{x-\frac{uc-x}{u-1}}{x-c_1}, & c_1\le\frac{uc-x}{u-1}\le x,\\ 0, & \frac{uc-x}{u-1}>x.\end{cases}$$

Наконец, если $a_1<x<c_1$, то

$$\mu_a(u)=\begin{cases}0, & \frac{uc-x}{u-1}<a_1,\\ \frac{\frac{uc-x}{u-1}-a_1}{x-a_1}, & a_1\le\frac{uc-x}{u-1}<x,\\ 0, & \frac{uc-x}{u-1}>x.\end{cases}$$

Вернемся к случаю, когда $x\in[b_1,c]$.

С целью придания соответствующей функции принадлежности (3) стандартного вида выполним некоторые подготовительные операции с учетом того, что $u\le 1$ и поэтому $u-1\le 0$. Имеем

$$\frac{uc-x}{u-1}-a_1=\frac{uc-x-ua_1+a_1}{u-1}=$$
$$=\frac{u(c-a_1)-(x-a_1)}{u-1}=$$
$$=c-a_1+\frac{c-x}{u-1}=c-a_1-\frac{c-x}{1-u};$$

$$b_1-\frac{uc-x}{u-1}=\frac{b_1u-b_1-uc+x}{u-1}=$$
$$=\frac{(x-b_1)-u(c-b_1)}{u-1}=\frac{c-x}{1-u}-(c-b_1).$$

Далее, из неравенства $(uc-x)/(u-1)<a_1$ следуют неравенства

$$\frac{uc-x}{u-1}-a_1<0,\quad \frac{uc-x-ua_1+a_1}{u-1}<0,$$

$$\frac{u(c-a_1)-(x-a_1)}{u-1}<0\,,$$

$$u(c-a_1)>x-a_1\,,\; u>\frac{x-a_1}{c-a_1}\,.$$

Поэтому из неравенства $\frac{uc-x}{u-1}\ge a_1$ следует неравенство $u\le\frac{x-a_1}{c-a_1}$.

Действуя аналогично,

из неравенства $\frac{uc-x}{u-1}<c_1$ получим $u>\frac{x-c_1}{c-c_1}$;

из неравенства $\frac{uc-x}{u-1}\ge c_1$ получим $u\le\frac{x-c_1}{c-c_1}$;

из неравенства $\frac{uc-x}{u-1}\le b_1$ получим $u\ge\frac{x-b_1}{c-b_1}$;

из неравенства $\frac{uc-x}{u-1}>b_1$ получим $u<\frac{x-b_1}{c-b_1}$.

С учетом этих соотношений запишем функцию принадлежности (3) следующим образом:

$$\mu_a(u)=\begin{cases}0, & u<\frac{x-b_1}{c-b_1},\\ \dfrac{\frac{c-x}{1-u}-(c-b_1)}{b_1-c_1}, & \frac{x-b_1}{c-b_1}\le u\le\frac{x-c_1}{c-c_1},\\ \dfrac{c-a_1-\frac{c-x}{1-u}}{c_1-a_1}, & \frac{x-c_1}{c-c_1}<u\le\frac{x-a_1}{c-a_1},\\ 0, & u>\frac{x-a_1}{c-a_1}.\end{cases}\qquad(4)$$

Теперь преобразуем (4) к окончательному виду

$$\mu_a(u)=\begin{cases}0, & u<\frac{x-b_1}{c-b_1},\\ \dfrac{u(c-b_1)-(x-b_1)}{(b_1-c_1)-u(b_1-c_1)}, & \frac{x-b_1}{c-b_1}\le u\le\frac{x-c_1}{c-c_1},\\ \dfrac{(x-a_1)-u(c-a_1)}{(c_1-a_1)-u(c_1-a_1)}, & \frac{x-c_1}{c-c_1}<u\le\frac{x-a_1}{c-a_1},\\ 0, & u>\frac{x-a_1}{c-a_1}.\end{cases}\qquad(5)$$

Пусть теперь $c_1\le x\le b_1$. Действуя аналогично предыдущему, получим

$$\mu_a(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ \dfrac{u(c-x)}{(x-c_1)-u(x-c_1)}, & 0\le u\le\frac{x-c_1}{c-c_1},\\ \dfrac{(x-a_1)-u(c-a_1)}{(c_1-a_1)-u(c_1-a_1)}, & \frac{x-c_1}{c-c_1}<u\le\frac{x-a_1}{c-a_1},\\ 0, & u>\frac{x-a_1}{c-a_1}.\end{cases}\qquad(6)$$

Наконец, если $a_1<x<c_1$, то

$$\mu_a(u)=\begin{cases}0, & u<0,\\ \dfrac{(x-a_1)-u(c-a_1)}{(1-u)(x-a_1)}, & 0\le u<\frac{x-a_1}{c-a_1},\\ 0, & u>\frac{x-a_1}{c-a_1}.\end{cases}\qquad(7)$$

Теперь, используя (5), (6) и (7), построим графики значений функции принадлежности для некоторых конкретных значений x. При этом, график $\mu_a(x)$, $x\in[b_1,c]$, имеет вид, приведенный на рис. 3; график $\mu_a(x)$, $x\in[c_1,b_1]$, – на рис. 4; график $\mu_a(x)$, $x\in[a_1,c_1]$, – на рис. 5.

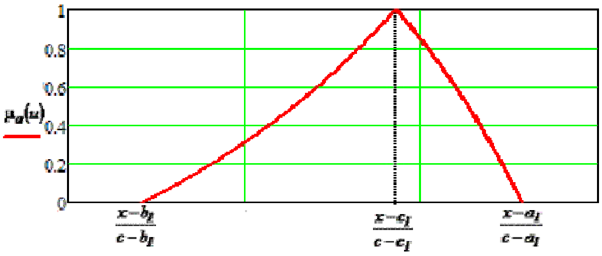

Рис. 3. График функции принадлежности (5)

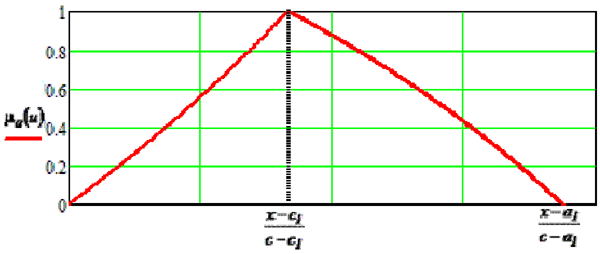

Рис. 4. График функции принадлежности (6)

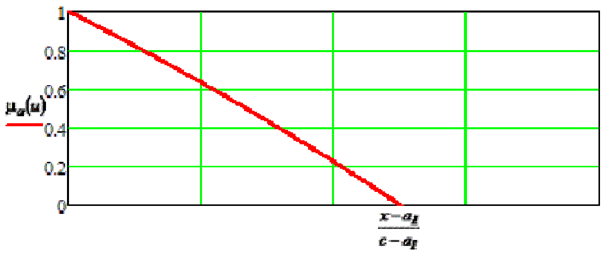

Рис. 5. График функции принадлежности (7)

Понятно, что полученные результаты неудобны для практического использования. Дело в том, что описанная выше технология для выбранного фиксированного значения нечеткого числа x обеспечивает возможность получения описания множества возможных значений степени принадлежности $u(x)$ этого числа в виде соответствующей функции принадлежности $\mu(u(x))$. Однако, остающаяся при этом неопределенность относительно нечеткого значения $u(x)$ для нечеткого числа x не позволяет решать многие практические задачи, в которых для каждого нечеткого x соответствующую степень принадлежности $u(x)$ необходимо определить возможно более точно. В качестве такой детерминированной характеристики нечеткого числа $u(x)$ естественно использовать ожидаемое значение этого числа. Это значение может быть определено по формуле, являющейся естественным аналогом соотношения, применяемого в теории вероятностей для расчета математического ожидания случайной величины,

$$M\left[\tilde{\mu}(u(x))\right]=\int_0^1 u\tilde{\mu}(u(x))du=$$

$$=\frac{\int_0^1 u\mu(u(x))du}{\int_0^1 \mu(u(x))du}=\frac{A(x)}{S(x)}. \qquad (8)$$

Формула (8) получена с учетом того, что функция

$$\widetilde{M}(u(x))=\frac{\mu(u)}{\int_0^1 \mu(u)du}$$

обладает всеми свойствами одного из основных формализмов теории вероятностей – плотности распределения случайной величины: она всюду неотрицательна и

$$\int_0^1 \tilde{\mu}(u)du=1 .$$

При этом, понятно, что соотношение (8) имеет смысл только в том случае, если интеграл $\int_0^1 \mu(u)du$ не является расходящимся.

Здесь и далее, для краткости аргумент x в записи $u(x)$ опущен. Подробный анализ этого соотношения вместе с примерами расчета приведен в [6].

Проведем необходимые выкладки для $x\in[b_1,c]$ с использованием (5).

$$S(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\mu(u)du=$$

$$=\int_{\frac{x-b_1}{c-b_1}}^{\frac{x-c_1}{c-c_1}}\frac{u(c-b_1)-(x-b_1)}{(b_1-c_1)-u(b_1-c_1)}du+$$

$$+\int_{\frac{x-c_1}{c-c_1}}^{\frac{x-a_1}{c-a_1}}\frac{(x-a_1)-u(c-a_1)}{(c_1-a_1)-u(c_1-a_1)}du=$$

$$=\int_{d_1}^{d_2}\frac{u\frac{c-b_1}{b_1-c_1}-\frac{x-b_1}{b_1-c_1}}{1-u}du+$$

$$+\int_{d_2}^{d_3}\frac{\frac{x-a_1}{c_1-a_1}-u\frac{c-a_1}{c_1-a_{11}}}{1-u}du=$$

$$=\int_{d_1}^{d_2}\frac{u\frac{b_1-c}{b_1-c_1}+\frac{x-b_1}{b_1-c_1}}{u-1}du+$$

$$+\int_{d_2}^{d_3}\frac{u\frac{c-a_1}{c_1-a_1}+\frac{a_1-x}{c_1-a_1}}{u-1}du=$$

$$=\int_{d_1}^{d_2}\left(\alpha_1+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{u-1}\right)du+\int_{d_2}^{d_3}\left(\beta_1+\frac{\beta_1+\beta_2}{u-1}\right)du=$$

$$=\alpha_1 u\Big|_{d_1}^{d_2}+(\alpha_1+\alpha_2)\ln(u-1)\Big|_{d_1}^{d_2}+$$

$$+\beta_1 u\Big|_{d_2}^{d_3}+(\beta_1+\beta_2)\ln(u-1)\Big|_{d_2}^{d_3}=$$

$$=\alpha_1(d_2-d_1)+(\alpha_1+\alpha_2)\ln\frac{d_2-1}{d_1-1}+$$
$$+\beta_1(d_3-d_2)+(\beta_1+\beta_2)\ln\frac{d_3-1}{d_2-1}. \qquad (9)$$

Здесь $d_1=\frac{x-b_1}{c-b_1}$, $d_2=\frac{x-c_1}{c-c_1}$, $d_3=\frac{x-a_1}{c-a_1}$,

$\alpha_1=\frac{b_1-c}{b_1-c_1}$, $\alpha_2=\frac{x-b_1}{b_1-c_1}$, $\beta_1=\frac{c-a_1}{c_1-a_1}$, $\beta_2=\frac{a_1-x}{c_1-a_1}$.

Далее

$$A(x)=\int_{-\infty}^{\infty}u\text{м}(u)du=\int_{d_1}^{d_2}\frac{u^2(c-b_1)-u(x-b_1)}{(b_1-c_1)-u(b_1-c_1)}du+$$

$$+\int_{d_2}^{d_3}\frac{u(x-a_1)-u^2(c-a_1)}{(c_1-a_1)-u(c_1-a_1)}du=$$

$$=\int_{d_1}^{d_2}\frac{u^2\frac{c-b_1}{b_1-c_1}-u\frac{x-b_1}{b_1-c_1}}{1-u}du+$$

$$+\int_{d_2}^{d_3}\frac{u\frac{x-a_1}{c_1-a_1}-u^2\frac{c-a_1}{c_1-a_{11}}}{1-u}du=$$

$$=\int_{d_1}^{d_2}\frac{u^2\frac{b_1-c}{b_1-c_1}+u\frac{x-b_1}{b_1-c_1}}{u-1}du+$$

$$+\int_{d_2}^{d_3}\frac{u^2\frac{c-a_1}{c_1-a_1}+u\frac{a_1-x}{c_1-a_1}}{u-1}du=$$

$$= \int_{d_1}^{d_2} (\alpha_1 u + \alpha_1 + \alpha_2) du + \int_{d_1}^{d_2} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{u - 1} du +$$

$$+ \int_{d_2}^{d_3} (\beta_1 u + \beta_1 + \beta_2) du + \int_{d_2}^{d_3} \frac{\beta_1 + \beta_2}{u - 1} du =$$

$$= \alpha_1 \frac{u^2}{2}\Bigg|_{d_1}^{d_2} + (\alpha_1 + \alpha_2) u \Bigg|_{d_1}^{d_2} +$$

$$+ (\alpha_1 + \alpha_2) \ln(u - 1)\Bigg|_{d_1}^{d_2} + \beta_1 \frac{u^2}{2}\Bigg|_{d_2}^{d_3} +$$

$$+ (\beta_1 + \beta_2) u \Bigg|_{d_2}^{d_3} + (\beta_1 + \beta_2) \ln(u - 1)\Bigg|_{d_2}^{d_3} =$$

$$= (d_2 - d_1)\left[\frac{\alpha_1}{2}(d_2 + d_1) + (\alpha_1 + \alpha_2)\right] +$$

$$+ (\alpha_1 + \alpha_2) \ln \frac{d_2 - 1}{d_1 - 1} + (d_3 - d_2) \times$$

$$\times \left[\frac{\beta_1}{2}(d_3 + d_2) + (\beta_1 + \beta_2)\right] + \qquad (10)$$

$$+ (\beta_1 + \beta_2) \ln \frac{d_3 - 1}{d_2 - 1}.$$

Теперь, объединяя (8)-(10), получим

$$M[u(x)] = A(x)/S(x).$$

Аналогичные расчеты проведем для $x \in [c_1, b_1]$ с использованием (6) и для $x \in [a_1, c_1]$ с использованием (7). Объединяя полученные результаты, для конкретного набора значений (a_1, b_1, c_1, c) построим график функции $M[u(x)]$, $x \in [a_1, c]$, который приведен на рис. 6.

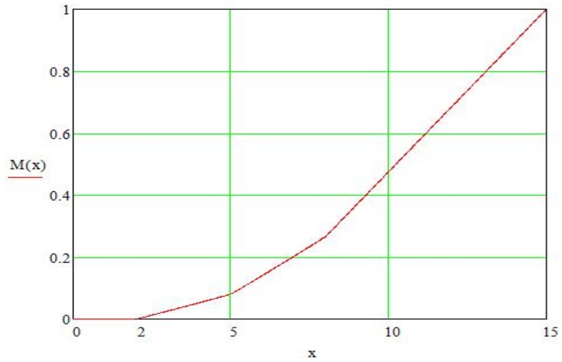

Рис. 6. График $M[u(x)]$, $a_1 = 2$, $b_1 = 5$, $c_1 = 8$, $c = 15$

Выводы

Таким образом, предложена методика получения аналитического описания семейства функций принадлежности бинечетких чисел.

Определена функция $M[u(x)]$, отображающая зависимость ожидаемого значения нечеткой степени принадлежности $u(x)$ от значения бинечеткой переменной x. Эти соотношения дают возможность аналитического решения задач, параметры которых – бинечеткие числа.

Список литературы

1. Zadeh L. Fuzzy Sets / L. Zadeh // Information and Control. – 1965. – Vol 8(3). – P. 338-353.

2. Liu B. Toward fuzzy optimization without mathematical ambiquity / B. Liu // Fuzzy optimization and decision making. – 2002. – Vol. 1. – No. 1. – P. 43-63.

3. Zhou J. Analysis and algorithms of bifuzzy systems / J. Zhou, B.Liu // Technical Report. – 2001. – Vol. 2. – P. 45-55.

4. Лю Б. Теория и практика неопределенного программирования / Б. Лю. – М.: БИНОМ, 2005. – 416 с.

5. Раскин Л.Г. Бинечеткие модели неопределенности в задачах исследования сложных систем / Л.Г. Раскин, О.В. Серая // Системний аналіз та інформаційні технології: тез. допов. Міжн. НТК.. – К., 2009. – С. 37.

6. Серая О.В. Многомерные модели логистики в условиях неопределенности / О.В. Серая. – Х.: ФОП Стеценко И.И., 2010. – 512 с.

Поступила в редколлегию 8.04.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.А. Кучук, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ФУНКЦІЙ ПРИНАЛЕЖНОСТІ БІНЕЧІТКИХ ЧИСЕЛ

Л.Г. Раскін, О.В. Сіра

Запропоновано методику отримання опису сімейства функцій приналежності, відповідних заданому бінечеткому числу. Технологія застосування цієї методики детально проілюстрована на простому прикладі відшукання сімейства функції приналежності трикутного нечіткого числа, один з параметрів функції належності якого також трикутне нечітке число. Розглянуто метод розрахунку очікуваного значення ступеня приналежності можливих значень бінечеткіх чисел з дворівневої невизначеністю.

Ключові слова: *нечітка математика, бінечіткі числа, функція приналежності, очікуване значення, аналітичний опис, дворівнева невизначеність.*

ANALYTICAL DESCRIPTION OF THE BE FUZZY NUMBERS FUNCTIONS

L.G. Raskin, O.V. Sira

A method for a description of a family of membership functions corresponding to the specified number of binechetkomu . Technology application of this technique in detail illustrated by a simple example of finding a family of membership functions of triangular fuzzy number, one of the parameters of the membership functions which are also triangular fuzzy number. The method of calculating the expected value of membership possible values befuzzy numbers with two-level uncertainty.

Keywords: *fuzzy math, be fuzzy numbers, membership function, expected value, an analytical description, a two-level uncertainty.*