УДК 629.764

В.П. Гусынин[1], А.В. Гусынин[2], Я.О. Замирец[3]

[1] *Alcântara Cyclone Space, Бразилиа, Бразилия*
[2] *Национальный технический университет Украины «КПИ», Киев*
[3] *ГП Научно-исследовательский технологический институт приборостроения, Харьков*

МОДЕЛЬ ОПТИМИЗАЦИИ МНОГОЭТАПНОГО ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ ЛЕТАТЕЛЬНЫМ АППАРАТОМ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Предложена модель оптимизации многоэтапного процесса управления летательным аппаратом, построенная на дифференциально-тейлоровских преобразованиях математической модели задачи оптимального управления. Преимуществом модели является возможность моделирования процессов оптимального управления с кусочно-непрерывными функциями, находить оптимальное управление без использования численных методов интегрирования дифференциальных уравнений, а также значительно сократить объем вычислений в процессе получения решения в численном виде.

Ключевые слова: *летательные аппараты, оптимальное управление, дифференциальные преобразования.*

Введение

Многие прикладные задачи в области управления летательными аппаратами (ЛА) описываются в виде математических моделей оптимизации динамических процессов. Особое место занимают задачи терминального управления, которые заключаются в приведении ЛА в конечное (терминальное) состояние с заданными значениями параметров движения и необходимой точностью. При этом должны выполняться различные целевые ограничения, которые накладываются на параметры движения и управления. К таким задачам относятся: выведение ракет-носителей с космическим аппаратом на заданную орбиту, наведение ракет в заданную точку, посадка самолета в заданную точку взлетно-посадочной полосы, причаливание дирижабля к мачте.

Высокие требования к качеству процессов терминального управления, наиболее жесткими из которых являются требования к точности приведения ЛА в заданную точку фазового пространства с учетом накладываемых ограничений, приводят к необходимости их оптимизации. Оптимизация управления ЛА при выполнении данных задач позволяет повысить эффективность, реализовать его максимально возможные характеристики и способствует повышению надежности полета вследствие увеличения устойчивости алгоритмов управления к возмущающим воздействиям.

Особенностью приведения многих ЛА в терминальные условия является многоэтапный (многорежимный) характер их движения, который характеризуется изменением параметров объекта (изменение массы ракет-носителей в моменты разделения ступеней и сброса головного обтекателя), режима работы двигателей (посадка самолета в заданную точку взлетно-посадочной полосы, взлет и причаливание дирижабля к мачте), а также системы управления (наведение ракет в заданную точку). Траектория движения таких ЛА состоит из нескольких временных участков (этапов), внутри которых переменные вектора состояния являются непрерывными, а на границах участков может происходить их прерывистое изменение, не выходя за пределы принятых ограничений. При этом каждый этап описывается своей математической моделью в форме системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а момент окончания предыдущего этапа является моментом начала следующего этапа. Задан функционал как функция, зависящая от состояния процесса на последнем этапе в конечный момент времени, который необходимо минимизировать. Это позволяет сформировать задачу оптимизации многоэтапного процесса и приводит к необходимости построения кусочно-непрерывного оптимального управления многоэтапным процессом.

Задачи синтеза оптимальных многоэтапных процессов управления обычно решаются с применением традиционных методов оптимизации [1 – 3] и их модификаций [4]. Наибольшее распространение получили критерии оптимальности, характеризующие точность управления в конечный (терминальный) момент времени управляемого процесса (задача Майера) и качество управления на всем временном интервале управляемого процесса (задача Лагранжа). Использование при оптимизации терминального управления необходимых условий оптимальности приводит к трудноразрешимой двухточечной краевой задачи, а воздействие параметрических возмущений и окружающей среды требуют непрерывной оптимизации траектории полета в реальном времени. При этом недостаток применения известных методов оптимизации к решению задачи терминального управления связан с синтезом алгоритмов управления в виде функции времени и требует для своей реализации численного интегрирования дифференциальных уравнений движения ЛА, что сопряжено с необходимостью преодоления ряда математических и вычислительных трудностей.

Математический аппарат дифференциальных преобразований функций и уравнений [5, 6] не требует для своей реализации численного интегрирования дифференциальных уравнений движения динамического объекта, допускает аналитическое решение проблемы и позволяет существенно снизить объем вычислений, необходимый для построения оптимальных траекторий и моделирования оптимальных процессов управления [7]. При этом, задача синтеза алгоритма оптимального терминального управления сводится к решению системы нелинейных уравнений относительно его свободных параметров [8].

Область применения дифференциальных преобразований ограничена классом аналитических функций. В общем случае, задачи оптимального управления требуют реализации произвольных кусочно-непрерывных управлений [9]. В работе [10] предложен подход к расширению области применения дифференциальных преобразований на процессы оптимального управления, описываемые кусочно-аналитическими функциями. Это дает возможность применить дифференциальные преобразования для решения задач оптимизации многоэтапных процессов терминального управления с кусочно-непрерывными функциями.

Целью статьи является построение модели оптимизации многоэтапного процесса терминального управления движением ЛА на основе дифференциальных преобразований.

Классические принципы терминального управления

В настоящее время широкое распространение получили два классических принципа терминального управления движением динамических объектов – принципы "жестких" и "гибких" траекторий [11, 12]. Принцип "жестких" траекторий заключается в стабилизации заранее рассчитанной "жесткой" программной (номинальной) траектории движения объекта, обеспечивающей достижение терминальной цели управления при "идеальных" условиях движения. Здесь алгоритм управления состоит из программного управления как заданной функции времени, реализующего требуемое невозмущенное движение, и дополнительного управляющего воздействия, обеспечивающего компенсацию отклонения фактической траектории от программной, вызванное действием возмущающих факторов. При этом расчет программных траекторий может осуществляться априорно (жесткое программирование) или непосредственно в процессе управления (свободное программирование). Способ управления по принципу "жестких" траекторий именуется коррекцией по заданной программе. Реализация управления на основе принципа "жестких" траекторий оправдана лишь при малых отклонениях возмущенной траектории от номинальной.

Принцип "гибких" траекторий состоит в реализации "гибкой", постоянно обновляемой (пересчитываемой) с заданной периодичностью, программной траектории движения объекта, обеспечивающей выполнение терминальной цели управления в "реальных условиях" движения. "Гибкие" траектории позволяют удовлетворить заданные терминальные требования и выполнить ограничения без возврата ЛА на номинальную траекторию полета. Если под воздействием возмущений ЛА отклоняется от номинальной траектории, но оказывается на другой траектории, удовлетворяющей заданным терминальным условиям и принятым ограничениям, то нет необходимости возвращать ЛА на номинальную траекторию и можно продолжать управление ЛА по текущей траектории. Если же возмущенная траектория не удовлетворяет терминальным условиям и принятым ограничениям, то энергетически выгоднее перевести ЛА на ближайшую траекторию, удовлетворяющую этим требованиям, чем выполнять возврат ее на номинальную траекторию [13]. Способ управления по принципу "гибких" траекторий именуется коррекцией по конечному состоянию. Одним из наиболее распространенных способов реализации данного принципа терминального управления является “размораживание" начальных условий, при котором алгоритм управления строится для фиксированного начального момента времени и начального состояния, а затем время и начальные условия заменяются текущими значениями.

Постановка задачи оптимизации многоэтапного терминального управления

Весь многоэтапный процесс управления на отрезке $[t_0, T]$ разобьем на r заданных временных интервалов (этапов). Полагаем, что внутри каждого временного интервала переменные вектора состояния являются непрерывными, а все разрывы происходят на границах заданных временных интервалов:

$$T_i = t_i - t_{i-1},\ i = \overline{1,r},\ \sum\nolimits_{i=1}^{r} T_i = T,$$

где T – время управляемого процесса, которое в зависимости от постановки задачи может быть задано или не фиксировано.

Предположим, что на каждом временном интервале движение объекта описывается векторным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_i, u_i, v_i),\ \ x_i(t_{i-1}) = x_i^0,\ \ i = \overline{1,r}. \qquad (1)$$

Здесь x_i – n-мерный вектор состояния; u_i – m-мерный вектор управления; v_i – ℓ-мерный вектор возмущений; f_i – непрерывная и непрерывно дифференцируемая по совокупности переменных t, x_i, u_i, v_i на каждом временном интервале вектор-функция обобщенной силы; $t \in (t_i - t_{i-1})$ – текущее время внутри i-го интервала.

Задача терминального управления заключается в переводе объекта из заданного начального состояния $x_i(t_0) = x_{i_0}$ в конечное (терминальное) состояние $x_r(T)$, определенное в момент времени $t = T$ q-мерным $(q \le n)$ векторным уравнением:

$$S\left[x_r(T), T\right] = 0 . \qquad (2)$$

Качество процесса выведения будем оценивать функционалом:

$$I = G\left[x_r(T), T\right] + \sum_{i=1}^{r} \int_{t_0}^{T} \Phi_i(t, x_i, u_i, v_i)dt, \qquad (3)$$

где заданные функции G и Φ_i имеют непрерывные частные производные по x_i, u_i, v_i на каждом временном интервале. Предполагаем, что ограничения на векторы состояния и управления учитываются в процессе выбора вида функционала (3).

В соответствии с принятой концепцией оптимизации многоэтапного управления сопряжение граничных и начальных условий этапов производим в форме заданных краевых условий:

$$\varphi_i\left[x_i(T_i), x_{i+1}^0; u_i(T_i), u_{i+1}^0; T_i\right] = 0, i = \overline{1, r}. \qquad (4)$$

Задачу многоэтапного терминального управления (1) – (4) решаем в следующей последовательности. Сначала решаем задачу определения оптимального управления $u_1(t)$ на отрезке $t_0 \le t \le t_1$ с начальным условием вектора состояния $x_1(t_0) = x_{1_0}$. Решение уравнения (1) в точке t_1 имеет значение $x_1(t_1)$. На втором этапе решаем задачу определения оптимального управления $u_2(t)$ на отрезке $t_i \le t \le t_2$ с начальным условием $x_1(t_1) = x_{2_0}$ вектора состояния. Решение уравнения (1) в точке t_2 имеет значение $x_2(t_2)$. Построенные таким образом решение $x(t)$ и управление $u(t)$ непрерывно во всех точках интервала $t_0 \le t \le t_2$ и в точке сопряжения интервалов t_1. Продолжая этот процесс на всем заданном интервале $[t_0, T]$ получим непрерывное и кусочно-дифференцируемое решение уравнения (1) и соответствующее оптимальное управление, которые при заданных дифференциальных связях (1), граничных условиях (2) и условиях сопряжения граничных и начальных условий (4) оптимизируют функционал (3) при отсутствии действия возмущений. В реальных условиях воздействие внешней среды $v_i(t)$ на динамику движения АКС может привести к значительным терминальным ошибкам в момент окончания процесса управления по программе $u = u(t)$. С целью компенсации действия возмущений на следующем шаге необходимо синтезировать алгоритм оптимального по критерию (3) управления с обратной связью вида $u = u(x, t)$, который в каждый момент времени t использует информацию о текущем состоянии $x(t)$ ОС АКС. Управление с обратной связью обеспечивает приведение ОС из произвольного начального состояния в конечное при воздействии возмущений.

Определение оптимального управления

Рассмотрим применение дифференциально-тейлоровских преобразований к решению задачи оптимизации многоэтапного управления ЛА.

Данные преобразования позволяют заменить функции $x(t)$ непрерывного аргумента t их моделями в виде дискретных функций $X(k)$ целочисленного аргумента $k = 0, 1, 2, ...$ согласно выражению:

$$\underline{x(t)} = X(k) = \frac{h^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=t_0}, \qquad (5)$$

где $x(t)$ – вещественная аналитическая функция вещественного аргумента; $X(k)$ – дискретная функция целочисленного аргумента k, которая называется дифференциальным спектром функции $x(t)$ в точке $t = t_0$; h – масштабная постоянная, имеющая размерность аргумента t; черта снизу – символ преобразования.

Математические модели, полученные на основе дифференциальных преобразований (5), называются спектральными моделями. В дальнейшем полагаем, что функции времени, описывающие процессы управления в задаче (1) – (4) внутри каждого временного интервала, являются аналитическими, а на границах интервалов могут иметь разрывы первого рода.

Синтез оптимального многоэтапного управления с обратной связью выполним методом замыкания оптимального управления $u = u(t)$ для произвольного текущего состояния объекта [8]. Сначала рассмотрим невозмущенное движение объекта. Выберем внутри каждого этапа процесса управления программное управление $u_i(\tau, A_i)$ в классе аналитических функций, где $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, ... a_{in})$ - вектор свободных параметров, τ – локальный временной аргумент.

Дифференциальные преобразования (5) функции $u_i(\tau, A_i)$ определяют при $h = T_i$ и $\tau = 0$ ее дифференциальный спектр в виде:

$$\underline{u_i}(\tau, A_i) = U_i(k, A_i) = \frac{T_i^k}{k!}\left[\frac{d^k u_i(t_{i-1} + \tau, A_i)}{dt^k}\right]_{\tau=0}. \qquad (6)$$

Векторное дифференциальное уравнение траекторного движения ЛА (1) на основе дифференциальных преобразований (5) в области изображений представляется в форме спектральной модели:

$$X_i(k+1, A_i, X_i^0) = \frac{T_i}{k+1} \underline{f_i}\left[T_i, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)\right], \quad (7)$$

$$X_i(0) = X_i^0(A_{i-1}, A_{i-2}, ..., A_1); X_1(0) = X_1^0 = x_0; i = \overline{1, r}$$

Спектральная модель (7) имеет универсальный характер и может быть применена для решения задач управления различных типов ЛА. Отметим, что поскольку дифференциальные преобразования (5) являются точным операционным методом, то спектральная модель (7) не имеет методических ошибок и потенциально позволяет получить точное решение векторного дифференциального уравнения (1). Данная спектральная модель является рекуррентным выражением, которое дает возможность по дифференциальному спектру (6) функции $u_i(\tau, A_i)$ сформировать дифференциальный спектр $X_i(k, A_i, X_i^0)$ вектора состояния $x_i(t)$.

Воспользуемся свойством дифференциальных преобразований, согласно которому алгебраическая сумма всех компонент (дискрет) дифференциального спектра любой аналитической функции в точке $t = t_v$ равна нулевой дискрете дифференциального спектра функции в точке $t_{v+1} = t_v + h$ или значению оригинала функции в той же точке:

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_v(k) = X_{v+1}(0) = x(t_v + h). \quad (8)$$

Из соотношения (8) при $t_v = t_{i-1}$ и $h = T_i$ находим вектор состояния в конце каждого i-го временного участка процесса управления:

$$x_i(T_i, A_i, x_i^0) = \sum_{k=0}^{\infty} X_i(k, A_i, X_i^0), i = \overline{1, r}. \quad (9)$$

Тогда уравнение конечного состояния (2) всего процесса управления с учетом выражения для сопряжения граничных и начальных участков процесса выведения (4), а также выражения для вектора состояния в конце каждого i-ого временного участка управления (9) преобразуется к виду:

$$S\left[A_1, A_2, ..., A_r\right] = 0. \quad (10)$$

Данное граничное условие в неявной форме определяет q компонент вектора свободных параметров A_i, $i = \overline{1, r}$ для i-го временного интервала и qr компонент для всего процесса управления в виде функций T_i и x_i^0.

Дифференциальные преобразования (5) функционала (3) с учетом дифференциальных спектров (6) и (7) позволяют представить данный функционал в виде функции векторов свободных параметров A_i:

$$I(A_1, A_2, ..., A_r) = G\left[A_1, A_2, ..., A_r\right] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{r} T_i \sum_{r=0}^{\infty} \underline{\Phi}_i \left[T_i, X_i(k, A_i, X_i^0), U_i(k, A_i)\right] \Big/ (k+1). \quad (11)$$

Необходимые условия оптимальности функции (11) дают возможность получить систему уравнений для определения остальных $n - q$ компонентов векторов свободных параметров для i-го временного интервала и $(n - q)r$ компонентов для всего процесса [14]:

$$\frac{\partial I(A_1, A_2, ..., A_r)}{\partial a_{ij}} = 0;\ i = \overline{1, r};\ j = \overline{q+1, n}. \quad (12)$$

Полученная система нелинейных уравнений (10) и (12) в неявной форме определяет все компоненты вектора свободных параметров управления $A = (A_1, A_2, ..., A_r)$ как функции от вектора произвольного начального состояния $x_o = x_i(t_{i_0})$. Таким образом, в неявной форме устанавливается нелинейная связь оптимального программного управления $u\left[t, A(T, x_0)\right]$ с вектором начального состояния $x_o = x_i(t_{i_0})$, моментом времени t_{i_0} и временем .многоэтапного процесса управления T. В случае действия возмущений найденное управление нельзя применять на всем интервале времени T, так как оно может быть использовано для управления только в начальный момент времени t_{i_0}. Таким образом, дифференциальные преобразования (5) позволяют получить в аналитической форме систему уравнений (10) и (12) для произвольных значений начального состояния $x_o = x_i(t_{i_0})$, моментом времени t_{i_0} и временем многоэтапного процесса управления T.

При воздействии возмущений объект постоянно отклоняется от оптимальной программной траектории. В этом случае управление $u\left[t, A(T, x)\right]$ вычисляется из системы уравнений (10) и (12) для текущих значений времени t и состояния $x(t)$. Таким образом, непрерывное во времени решение системы уравнений (10) и (12) позволяет сформировать замкнутый закон многоэтапного терминального управления вида $u = u(t, x)$. Решение системы уравнений (10) и (12) для каждого текущего момента времени t и состояния x(t) динамического объекта, находящегося под действием возмущения, непрерывно дает управление $u = u(t, x)$, связывающее текущее состояние $x(t)$ динамического объекта с граничными (терминальными) условиями (2). В замкнутом контуре управления используется только текущее значение управления $u\left[t, A(T, x)\right]$, которое в следующий момент времени пересчитывается по системе уравнений (10) и (12). Этим обеспечивается "гибкая" адаптация оптимальной траектории движения объекта к действию заранее неизвестных возмущающих факторов $v(t)$.

Если кроме вектора оптимального программного управления необходимо определить компоненты вектора состояния $x_i(\tau, A_i)$, то они могут быть получены по дифференциальному спектру (7) в виде отрезков рядов Тейлора или на основе обратных дифференциальных преобразований в форме многочленов Лежандра, Чебышева, рядов Фурье и в виде комбинации различных аппроксимирующих функций [5, 6]. Свободные параметры аппроксимирующих функций определяются из сравнения дифференциальных спектров компонент вектора состояния с дифференциальными спектрами аппроксимирующих функций. Необходимо отметить, что эффективность построенной модели снижается с ростом размерности вектора свободных параметров управления. Поэтому, при решении конкретных задач целесообразно ограничиться низкой размерностью данного вектора. Также необходимо проверять существование экстремума функции (11) по достаточным условиям оптимальности.

Выводы

Построена модель оптимизации многоэтапного терминального управления движением ЛА на основе дифференциально-тейлоровских преобразований. Преимуществом данной модели является исключение зависимости переменных от временного аргумента, возможность находить оптимальное управление и фазовые траектории без использования численных методов интегрирования дифференциальных уравнений и строить алгоритмы оптимального управления в реальном времени. При этом допускается аналитическое решение проблемы, что значительно сокращает объем вычислений в процессе получения решения в численном виде.

Список литературы

1. *Габелко К.Н. Оптимизация многоэтапных процессов: автореф.дис. ... канд.физ.-мат.наук [Текст] / К.Н. Габелко. – Иркутск: ИГУ, 1975. – 18 с.*
2. *Приближенные методы оптимизации управления летательными аппаратами [Текст] / В.И. Гурман, В.Н. Квоков, М.Ю. Ухин // Автоматика и телемеханика. – 2008. – №4. – С. 191-201.*
3. *Гурман В.И. Эволюция и перспективы приближенных методов оптимального управления [Текст] / В.И. Гурман, И.И. Расина, А.О. Блинов // Программные системы: теория и приложение. – 2001. – №2(6). – С. 11-29.*
4. *Батурин В.А. Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления [Текст] / В.А. Батурин, А.А. Лемперт // Вычислительные технологии. – 2003. – Т.8. – С. 103-108.*
5. *Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов [Текст] / Г.Е. Пухов. – К.: Наук. думка, 1986. – 160 с.*
6. *Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений [Текст] / Г.Е. Пухов. – К.: Наук. думка, 1980. – 419 с.*
7. *Баранов В.Л. Моделирование задач терминального управления методом дифференциальных преобразований [Текст] / В.Л. Баранов, О.С. Уруский, Г.Л. Баранов // Электронное моделирование. – 1995. – Т.17, №2. – С. 12-16.*
8. *Уруский О.С. Синтез замкнутых законов терминального управления на основе дифференциальных преобразований [Текст] / О.С. Уруский, В.Л. Баранов // Электронное моделирование. – 1996. – №3. – С. 3-8.*
9. *Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Фоменко. – М.: Физматгиз, 1961. – 392 с.*
10. *Баранов В.Л. Дифференциально-тейлоровская модель оптимальных процессов управления [Текст] / В.Л. Баранов // Электронное моделирование. – 2000. – Т.22, №6. – С. 3-17.*
11. *Батенко А.П. Системы терминального управления [Текст] / А.П. Батенко. – М.: Радио и связь, 1984. – 160 с.*
12. *Теряев Е.Д. Развитие концепции гибких траекторий в задачах терминального управления подвижными объектами [Текст] / Е.Д. Теряев, К.В. Петрин, А.Б. Филимонов, Н.Б. Филимонов // 13-я межд. конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах»: мат. конф., 15-17 июня 2011. – Самара, Россия. – С. 18-23.*
13. *Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика летательных аппаратов [Текст] / Ю.Г. Сихарулидзе. – М.: Наука, 1982. – 357 с.*
14. *Гусынин В.П. Численно-аналитический метод синтеза управления выведением многорежимной авиационно-космической системы на орбиту [Текст] / В.П. Гусынин // Киевский институт военно-воздушный сил: сб. науч.тр. – К.: КІВПС, 1999. – Вып.6. – С. 32-38.*

Поступила в редколлегию 6.06.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. О.С. Бутенко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.

МОДЕЛЬ ОПТИМІЗАЦІЇ БАГАТОЕТАПНОГО ПРОЦЕСУ УПРАВЛІННЯ ЛІТАЛЬНИМ АПАРАТОМ НА ОСНОВІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

В.П. Гусинін, А.В. Гусинін, Я.О. Замірець

Запропоновано модель оптимізації багатоетапного процесу керування літальним апаратом, що побудовано на диференціально-тейлорівських перетвореннях математичної моделі задачі оптимального керування. Перевагою моделі є можливість моделювання процесів оптимального керування з кусочно-безперервними функціями, знаходити оптимальне керування без використання чисельних методів інтегрування диференціальних рівнянь, а також значно скорочує обсяг обчислень в процесі отримання розв'язку в чисельному вигляді.

Ключові слова: *літальні апарати, оптимальне управління, диференціальні перетворення.*

MODEL OF OPTIMIZATION OF A MULTISTAGE PROCESS OF MANAGEMENT AIRCRAFT ON BASIS OF DIFFERENTIAL TRANSFORMATIONS

V.P. Gusynin1, A.V. Gusynin, Ya.O. Zamirec

The model of multiphase optimization of vehicle control process based on differential-and-taylor transformations of mathematical model of optimal control task is offered. The advantage of the model is the possibility of simulation processes of optimal control with piecewise continuous functions, find optimal control without using numerical methods of integration of differential equations and also essentially decreases the calculation volume during decision obtaining in numerical view.

Keywords: *aircrafts, optimum management, differential transformations.*