

УДК 519.6:001.5

Д.А. Левкин

Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени П. Василенко, Харьков

## РЕЗУЛЬТАТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В МНОГОСЛОЙНОМ БИООБЪЕКТЕ

В статье проведена численная реализация расчетной математической модели, описывающей процесс действия лазерного луча на многослойный микробиологический материал, для многослойного (3-х слойного) микробиологического объекта (эмбриона). В основе расчетной математической модели лежит смешанная задача системы четырех дифференциальных уравнений теплопроводности в сферической системе координат. Используя аналитический метод разделенных переменных, найдены температуры нагрева слоев эмбриона. Зная температуру нагрева слоя клеток blastomera и наперед заданную допустимую температуру лазерного нагрева слоя клеток, можно перейти к подсчету числа жизнеспособных клеток.

**Ключевые слова:** метод разделенных переменных, послойное распределение, температурное поле, клетки.

### Введение

Успешное решение задач расчёта и оптимизации физических полей в многослойных системах, которые находятся под воздействием сосредоточенных подвижных источников, требует разработки и исследования соответствующих адекватных математических моделей.

В статье в качестве многослойной системы рассмотрим состоящий из трех неоднородных по своим теплофизическим характеристикам слоев: зоны пеллюцида, перивителлированного пространства и слоя клеток blastomera – сферический микробиологический объект (эмбрион), подвергаемый действию на него лазерного излучения для осуществления его деления.

Зона пеллюцида представляет собой защитную наружную оболочку эмбриона. По-своему химическому составу, зона пеллюцида на 90% состоит из воды, 5% занимают белковые молекулы и низкомолекулярные вещества.

Перивителлированное пространство занимает промежуточное место между зоной пеллюцида и слоем клеток blastomera.

По своему химическому составу перивителлированное пространство состоит преимущественно из воды. Поэтому значения коэффициентов теплопроводности, плотности и теплоемкости перивителлированного пространства и зоны пеллюцида можно брать близкими к значениям вышеупомянутых параметров для воды. Внутреннее пространство эмбриона занимает слой клеток blastomera, который имеет белковую природу.

При этом ставится основная задача: оптимизация параметров теплового воздействия по ограничениям на характер распределения температурного

поля в многослойной системе с обеспечением жизнеспособности сегментов эмбриона.

Такая постановка основной задачи характерна для: повышения качества процесса раскроя искусственной и натуральной кожи при лечении обширных ожогов; сварки биоматериала; деления ранних элитных эмбрионов, с целью последующей трансплантации частей эмбрионов; для использования методики в практике микрохирургии, офтальмологии, косметологии и других отраслях.

Научная актуальность этой задачи и её практическая значимость привлекали внимание к этим вопросам многих учёных: Комяка В.М. [1], Пуяткина В.П. [2], Сметанкиной Н.В. [3], Стояна Ю.Г. [2], Antinori S. [4], Panci C. [4], Douglas D.H. [5]. Однако, полученные на сегодня результаты исследований носят, в основном, узкопрофессиональный характер и задача не рассматривалась в целом. Для решения поставленной задачи в статье предложен метод расчета послойного распределения температурного поля эмбриона.

Это позволяет по значениям температурного поля в клетках эмбриона и наперед заданным допустимым значениям перейти к подсчету числа жизнеспособных клеток.

Расчет послойного распределения температурного поля эмбриона возможен в случае реализации расчетной математической модели, описывающей процесс действия лазерного луча на многослойный (3-х слойный) микробиологический объект (эмбрион).

В основе расчетной математической модели лежит смешанная задача четырех дифференциальных уравнений теплопроводности в сферической системе координат с соответствующими граничными и начальными условиями.

**Основной материал**

Согласно результатам работы [5], мощность действия лазерного луча в 140 мВт и длительность теплового воздействия в 3 мс являются рациональными значениями данных технических параметров, обеспечивающих лазерную резку эмбриона.

С целью расчета послойного распределения температурного поля в эмбрионе при указанных величинах мощности и длительности действия лазерного луча, необходимо реализовать данную расчетную математическую модель.

Для построения смешанной задачи сформулируем данные о входящих в нее параметрах. Значения коэффициентов плотности и теплоемкости слоев эмбриона возьмем из справочной литературы [4]. Для задания значений коэффициентов теплопроводности слоев эмбриона рассмотрим значения проводимости, полученные с помощью метода кондуктометрии в работе [6] и характерные для многих структур эмбриона:

$$\{\gamma_e\}_{e=1}^4 = \{0,88; 1,28; 1,34; 1,39\}, \quad (1)$$

где 0,88 – в перивителлированном пространстве;  
1,28; 1,34; 1,39 – в слое клеток бластомера эмбриона.

Применяя закон Видемана-Франца

$$\lambda = 2,49 \left(\frac{k}{e}\right)^2 T\gamma, \quad (2)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  
 $k$  – постоянная Больцмана;  
 $e$  – заряд электрона;  
 $T$  – температура в градусах Кельвина;  
 $\gamma$  – проводимость,

к значениям проводимости (1), получим значения коэффициентов теплопроводности слоев эмбриона:

$$\{\lambda_e\}_{e=1}^4 = \{0,71; 0,96; 0,94; 0,91\}. \quad (3)$$

В работах [7, 8] с помощью формул равномерной и неравномерной сетки получены временные и пространственные координаты распределения температурных полей на слоях эмбриона, соответственно:

$$\{r_e\}_{e=1}^5 = \{20; 30; 40; 50; 60\},$$

$$\{t_e\}_{e=1}^5 = \{403; 1500; 2250; 2550; 2800\}. \quad (4)$$

Имея вышеуказанные численные данные, построим систему четырех дифференциальных уравнений теплопроводности смешанной задачи:

$$\begin{cases} 5.46 \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0.71 \left( \frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + 55.02; \\ 5.44 \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0.96 \left( \frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r_2} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + 94.1; \\ 5.3 \frac{\partial T_3}{\partial t} = 0.94 \left( \frac{\partial^2 T_3}{\partial r^2} + \frac{2}{r_3} \frac{\partial T_3}{\partial r} \right) + 390.25; \\ 5.1 \frac{\partial T_4}{\partial t} = 0.91 \left( \frac{\partial^2 T_4}{\partial r^2} + \frac{2}{r_4} \frac{\partial T_4}{\partial r} \right) + 452.4. \end{cases} \quad (5)$$

Согласно работе [4], на зону пеллюцида эмбриона действует лазерный луч с температурой теплового воздействия в 100 °С, а температура необходимая для обеспечения жизнеспособности слоя клеток составляет 37 °С. В связи с этим фактом, граничные условия на зоне пеллюцида и слое клеток бластомера, соответственно, имеют вид:

$$\begin{cases} T(0; 0) = 100 \text{ } ^\circ\text{C}; \\ T(53; 2550) = 37 \text{ } ^\circ\text{C}. \end{cases} \quad (6)$$

В соответствии с тем, что эмбрион помещен в канюлю с питательной средой, поддерживающейся при температуре 20 °С [7], граничные условия на поверхности раздела сред зоны пеллюцида эмбриона и питательной среды имеют вид:

$$-0,67 \frac{\partial T_1}{\partial r}(0, t) = 4,4, \quad (7)$$

где длительность  $t \in [1; 3]$  действия лазерного луча.

На этапе математического моделирования для учета многослойной (3-х слойной) структуры эмбриона вводятся равенства раздела сред и равенства непрерывности по временным координатам (4), соответственно, точек контроля температурных полей на слоях эмбриона:

$$\begin{cases} T_1(20; 400) = T_2(30; 403), -0,71 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -0,96 \frac{\partial T_2}{\partial r}, r \in [20; 30]; \\ T_2(30; 403) = T_3(40; 1500), -0,96 \frac{\partial T_2}{\partial r} = -0,94 \frac{\partial T_3}{\partial r}, r \in [30; 40]; \\ T_3(40; 1500) = T_4(50; 2250), -0,94 \frac{\partial T_3}{\partial r} = -0,91 \frac{\partial T_4}{\partial r}, r \in [40; 50]; \\ T_4(50; 2250) = T_5(60; 2500), -0,91 \frac{\partial T_4}{\partial r} = -0,9 \frac{\partial T_5}{\partial r}, r \in [50; 60], \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} T(20; 400 - 0) = T(20; 400 + 0); \\ T(30; 403 - 0) = T(30; 403 + 0); \\ T(40; 1500 - 0) = T(40; 1500 + 0); \\ T(50; 2250 - 0) = T(50; 2250 + 0); \\ T(60; 2550 - 0) = T(60; 2550 + 0). \end{cases} \quad (9)$$

Используя метод разделенных переменных, рассмотренный в научных работах [9, 10], получим, что решение дифференциального уравнения теплопроводности системы (5) представимо в виде суммы общего однородного и частного неоднородного решения, которые имеют вид:

$$T_{o.o.}(r, t) = (c_1 u_1(r) + c_2 u_2(r)) e^{ct}. \quad (10)$$

$$T_{ч.н.}(r, t) = -\frac{q_e}{6a_e} r^2 g(t), \quad (11)$$

где  $q_e$  – удельная плотность мощности тепловых нагрузок точек в  $e$ -м слое многослойного (3-х слойного) микробиологического объекта (эмбриона);

$a_e = \frac{\lambda_e}{\rho_e c_e}$  – коэффициент пропорциональности;

$\lambda_e$  – коэффициент теплопроводности  $e$ -го слоя эмбриона;  
 $\rho_e$  – коэффициент плотности;  
 $c_e$  – коэффициент теплоемкости,  
 функция  $g(t)$ , с учетом граничных условий (6), (7) представима в следующем виде:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \leq t_0; \\ 0 & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (12)$$

Применяя результаты научных работ [9, 10] и используя метод разделенных переменных, получено решение системы (5) уравнений теплопроводности:

$$T(r, t) = T(0, 0) e^{ct} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k r^{2k}}{a_e^k ((2k+1)!!)^2} - \frac{q_e}{6a_e} r^2 g(t). \quad (13)$$

На рис. 1 представлен график распределения температурного поля внутри эмбриона согласно (13). Значения температуры нагрева в слоях эмбриона на рисунке соответствуют мощности действия лазерного луча в 140 мВт и длительности импульса 3 мс. Для построения графика найдем константу  $c$  из уравнения (13) в точках контроля температурных полей (4) на слоях эмбриона.

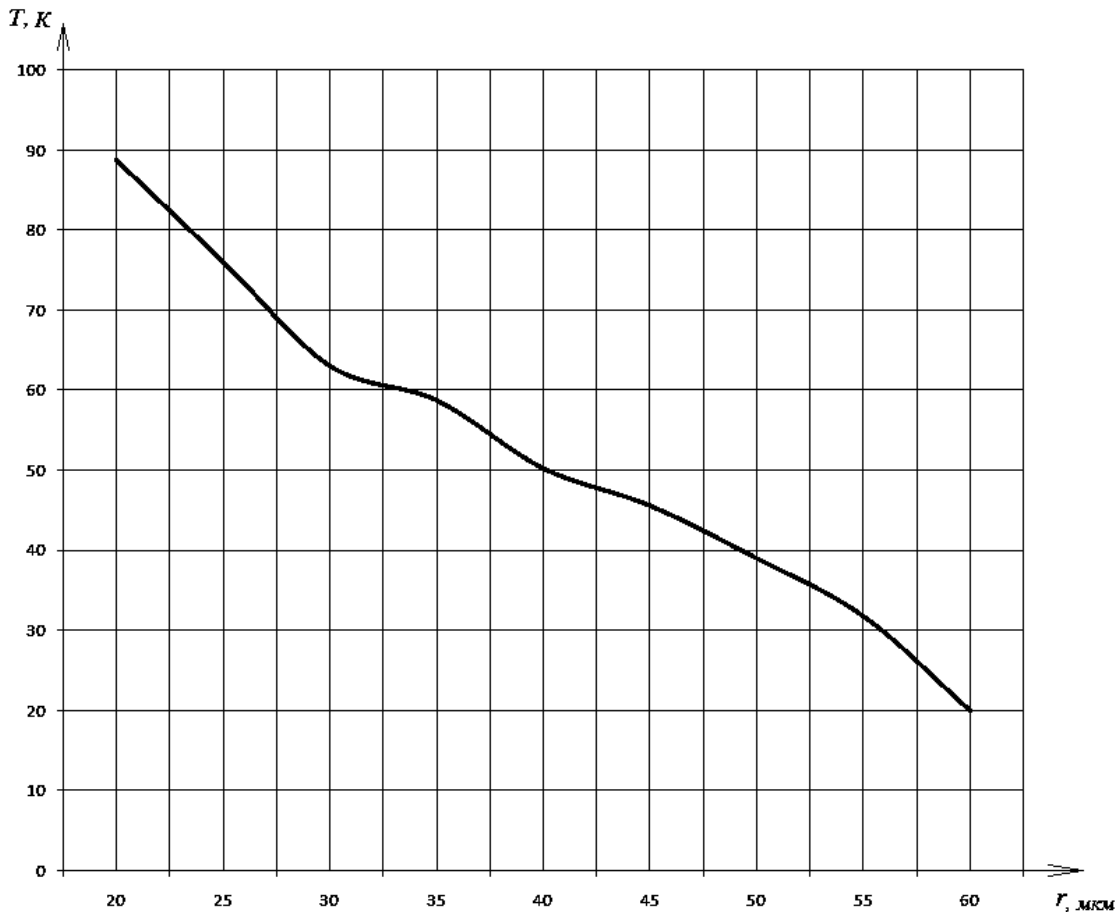


Рис. 1. График распределения температурного поля внутри эмбриона

С учетом граничных условий (6), (7), значения функции  $g(t)$  (12) получим, что константа  $c$  равна  $0,005$  мс.

Температура нагрева перивителлированного пространства  $88,7^\circ\text{C}$ .

Продлав аналогичные вычисления, найдем значения температуры нагрева слоя клеток blastomera эмбриона. Так температура нагрева лазерным лучом слоя клеток blastomera составляет от  $20^\circ\text{C}$  до  $63,04^\circ\text{C}$ . Зона жизнеспособности blastomeres внутри эмбриона лежит в пределах от 50 до 75 мкм.

### Заключение

В статье рассмотрена численная реализация расчетной математической модели, описывающей процесс действия лазерного луча на многослойный микробиологический материал для многослойного (3 - х слойного) микробиологического объекта (эмбриона). С этой целью проводится детальное исследование теплового режима лазерного нагрева эмбриона. Это позволяет по значениям температурного поля в клетках blastomera и наперед заданным допустимым значениям температуры перейти к подсчету числа жизнеспособных клеток.

### Список литературы

1. Котуак В.М. Geometrical design elements in solving applied problems / V.M. Kutyak // Прикладна геометрія та інженерна графіка. – К.: КНУБА, 2002. – Вип. 70. – С. 126-131.
2. Стоян Ю.Г. Оптимизация технических систем с источниками физических полей / Ю.Г. Стоян, В.П. Пуятин. – К.: Наук. думка, 1988. – С. 44-48.

3. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек: монография / Н.В. Сметанкина. – Х.: Миськоруж, 2011. – 376 с.

4. Zona thinning with the use of laser: a new approach to assisted hatching in humans / [Antinori S., Panci C., Selman H. и др.] // Human Reproduction. – 1996. – V. 11, №. 3. – P. 590-594.

5. Douglas-Hamilton D.H. Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling / D.H. Douglas-Hamilton, J. Conia // J. Biomed Opt. – 2001. – № 6(2). – P. 205-213.

6. Measuring and modeling assessments conductivity cell: Proceedings 23th National scientific symposium [“Metrology and metrology assurance 2013”], (Sozopol, Bulgaria, 9-13.09.2013) / [Y.E. Megely, V.A. Shigimaga, D.A. Levkin, I.I. Kalimanova и др]. – Sozopol, Bulgaria, 2013. – P. 260-267.

7. Левкин Д.А. Расчет распределения температуры в многослойной структуре эмбриона / Д.А. Левкин // Восточно-Европейский Журнал передовых технологий. – Х., 2013. – № 1/4 (58). – С. 18-21.

8. Левкин Д.А. Математическая модель распределения температуры в эмбрионе: материалы наук. – практ. конф. [“Наукові підсумки 2012”] (Харків, ХПІ 2012 р.) / Д.А. Левкин // Технологический аудит и резервы производства. – Х., 2012. – № 6/3(8). – С. 29-31.

9. Лантев Г.И. Уравнения математической физики / Г.И. Лантев, Г.Г. Лантев. – М.: Наука, 2003. – 327 с.

10. Mamadaliev N.K. On the Representation of the Solution of a Modified Cauchy Problem / N.K. Mamadaliev // Sibirsk. Mat. Zh. – 2000. – Vol. 41, no. 5. – P. 1087-1097.

Поступила в редколлегию 17.06.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.А. Можаяев, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

### РЕЗУЛЬТАТИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ТЕМПЕРАТУРИ В БАГАТОШАРОВОМУ БІОБ'ЄКТІ

Д.А. Левкін

У статті проведена чисельна реалізація розрахункової математичної моделі, яка описує процес дії лазерного променя на багатошаровий микробиологічний матеріал, для багатошарового (3-х шарового) микробиологічного об'єкта (ембриона). В основі розрахункової математичної моделі лежить змішана задача системи чотирьох диференціальних рівнянь теплопровідності в сферичній системі координат. Використовуючи аналітичний метод відокремлення змінних знайдено температури нагріву шарів ембриона. Знаючи температуру нагрівання шару клітин blastomera і наперед задану допустиму температуру лазерного нагріву шару клітин, можна перейти до підрахунку числа життєздатних клітин

**Ключові слова:** метод відокремлення змінних, пошарове розподіл, температурне поле, клітини.

### RESULTS OF MATHEMATICAL MODELING OF TEMPERATURE DISTRIBUTION IN THE MULTILAYER BIOBJECT

D.A. Levkin

In the article the numerical realization of the estimated mathematical model describing the process of the laser beam on the multi-layered microbial material for multi-layer (3-layer) microbiological object (embryo). The basis of the calculation of the mathematical model is a mixed problem a system of four differential equations of heat conduction in a spherical coordinate system. Using analytical methods of separation of variables found the temperature of heating the layers of the embryo. Knowing the temperature of the heating layer cell blastomere and preassigned allowable temperature laser heating layer of cells can proceed to counting the number of viable cells.

**Keywords:** separation of variables, stratified distribution, temperature field, the cell.