УДК 621.37:621.391

А.А. Белокуров, О.И. Вотяков, В.С. Кузниченко, Г.Г. Писарёнок

ГП Центральное конструкторское бюро «Протон», Харьков

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОБХОДИМОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ МНОГОЧАСТОТНЫХ СИГНАЛОВ ДЛЯ ИХ АНАЛИЗА МЕТОДАМИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Рассматривается задача определения количества и номиналов частот сложных сигналов, которая отличается от известных использованием методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Предложено использовать показатель диагонального преобладания для априорного определения требуемого размера информационных цифровых выборок многочастотных сигналов для качественного решения задачи их идентификации с использованием методов линейной алгебры

Ключевые слова: *многочастотные сигналы, цифровая обработка, система линейных алгебраических уравнений, метод наименьших квадратов.*

Введение

Актуальность проблемы. При решении задач, связанных с обработкой экспериментальных данных, возникает необходимость анализа породивших эти данные временных процессов. Таковой при решении некоторых динамических задач в технике является проблема спектрального анализа и оценки развития (прогноза) волновых процессов, содержащих периодические компоненты. Примерами рассматриваемого типа процессов могут являться: сигналы в радиотехнике звуковой, ультразвуковой и радио частот, сигнал телеметрии или управления некоторым объектом, в которых полезная информация заключена в колебаниях с заданными частотами; речевой сигнал с известными индивидуальными несущими частотами; метеорологические процессы, включающие в себя их суточные и сезонные колебания.. Во многих случаях эти процессы являются многочастотными и имеют сложную структуру. Например, в современных средствах и системах радиосвязи с переходом на цифровые технологии стали применять сложные радиосигналы ППРЧ (псевдослучайная перестройка рабочей частоты), OFDM (Orthogonal Frequency Division with Multiplexing) и другие [1]. Это подтверждается их использованием во всех новых проектах стандартов (например, 802.11n, 802.16m или 802.11ac). Новый парк программируемых цифровых средств радиосвязи использует разнообразные протоколы для организации вхождения в связь и передачи информации, которые обеспечивают достаточно высокую энергетическую, структурную и информационную скрытность. Сложность структуры таких протоколов является одной из причин усложнения разработки и использования устройств и алгоритмов цифровой обработки для обнаружения и различения таких сигналов и измерения их параметров [2]. Поэтому задача развития программно-аппаратных средств цифровой обработки сигналов на основе методов новых информационных технологий является актуальной.

Анализ последних исследований. Традиционным методом первичного выявления параметров контролируемых сигналов в настоящее время является Фурье-анализ на основе быстрых алгоритмов преобразования [1]. Однако, анализ многочастотных сигналов сложной структуры требует для обеспечения приемлемой точности оценок высокого качества цифрового представления выборок: (2^{12} –2^{14} уровней квантования при частоте дискретизации в 2–3 раза превышающей частоту Найквиста). Это является причиной большого объема вычислительных затрат и, как следствие, приводит к снижению точности обработки сигналов в реальном временном масштабе. В связи с этим, развитие программно-аппаратных средств цифровой обработки сигналов, ориентированных только на использование алгоритмов Фурье-анализа не всегда является оправданным.

Основным недостатком традиционных методов является сравнительно низкое разрешение по частоте. Разрешение можно повысить путем использования априорной информации о параметрах обрабатываемых сигналов. На этом основаны нетрадиционные методы спектрального анализа, которые активно разрабатываются в последнее время [2]. Суть большинства из них в том, что на основе априорных сведений строится модель, аппроксимирующая сигнал. При этом оценке подлежит конечное число параметров. Например, в [3, 4] для определения списка рабочих частот сигнала при полной априорной неопределенности и решения задачи распознавания в условиях частичной неопределенности используется согласованное его разложение в ряд на интервале модуляции по гармоникам и решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Такое согласованное разложение очень трудно получить при использовании быстрого преобразования Фурье, при котором разрешение по частоте определяется продолжительностью интервала разложения. Однако в [2 – 4] и других известных работах не предъявляются требования к длительности анализируемого сигнала, от которой зависит успешность решения СЛАУ и, как следствие, достоверность определения списка рабочих частот сигнала и решения задачи распознавания.

Целью статьи является оценка соотношения длительности сигнала, числа аппроксимирующих и содержащихся в нем гармоник на точность решения СЛАУ, используемых при распознавании многочастотных сигналов.

Основная часть

Рассматривается полигармонический сигнал

$$y(t) = S(t) + \xi(t), \qquad (1)$$

где $S(t)=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i \cdot \cos(2\pi f_i t)+X_{n+i} \cdot \sin(2\pi f_i t)\right)$, f_l и n – значения и общее количество частот сигнала, X_i, X_{n+i} –квадратурные амплитуды этих гармоник, $\xi(t)$ – аддитивная смесь помех канала связи и входных каскадов приемного устройства. Анализу, как правило, подлежит конечная выборка (вектор) сигнала $\mathbf{B} = \{b_0, b_1, ..., b_{N-1}\}$, где $b_k = y(t_k), k = \overline{0, N-1}$.

Введем в соответствии с [2] понятие конечного спектра отрезка (КСО) процесса, в отличие от спектров, получаемых на основе интегралов и рядов Фурье, когда предполагается существование процесса на всей временной оси от $-\infty$ до $+\infty$.

Пусть задан эталонный сигнал в виде конечной суммы синусоидальных функций

$$z(t)=\sum_{i=1}^{n_э}\left(X_i \cdot \cos\left(2\pi f_i^э t\right)+X_{n_э+i} \cdot \sin\left(2\pi f_i^э t\right)\right).$$

КСО – это набор заданного количества $n_э$ синусоидальных компонент, характеризующийся совокупностью параметров $\delta, n_э, X_i, X_{n_э+i}, f_i^э$, означающих квадратурные амплитуды и частоты этих гармоник, представляющих отрезок процесса (короткий сигнал) $y(t)$ с минимально возможной ошибкой δ.

В [2] для меры близости принятого и эталонного сигнала используется зависимость такого вида

$$\delta^2=N^{-1} \times \sum_{k=0}^{N-1}\left[y(t_k)-\sum_{i=1}^{n_э}\left(X_i \cdot \cos\left(2\pi f_i^э t\right)+X_{n_э+i} \cdot \sin\left(2\pi f_i^э t\right)\right)\right]^2, \qquad (2)$$

где N – количество отсчетов дискретизованного сигнала $y(t)$.

Введем далее следующие обозначения

$$A = \left\|a_{i,j}\right\|, \quad i = 0, \ldots, (N-1), \;\; j = 0, \ldots, (2 \cdot n_э - 1);$$
$$a_{i,j} = \mathrm{Cos}\left[2\pi f^э{}_j \cdot t_i\right], \quad 0 \le j \le n_э - 1; \qquad (3)$$
$$a_{i,j} = \mathrm{Sin}\left[2\pi f^э{}_j \cdot t_i\right], \quad n_э \le j \le 2 \cdot n_э - 1.$$

Так как матрица A известна, задача состоит в нахождении по имеющейся единственной реализации сигнала B оценки вектора $\mathbf{X}=\left\{X_1, ..., X_{n_э}, ..., X_{2n_э}\right\}$ по критерию наименьших квадратов (2):

$$\widehat{X} = \arg\min_X \left\{(B - AX)^T (B - AX)\right\}. \qquad (4)$$

Решение (4) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при условии, что число отсчётов сигнала не меньше удвоенного числа гармоник

$$\widehat{X} = (A^T A)^{-1} A^T B . \qquad (5)$$

Таким образом, результаты решения СЛАУ могут быть использованы для определения частотной структуры сигнала [3] либо для распознавания многочастотных сигналов [4].

Однако, необходимость решения таких задач по малому числу наблюдений порождает ряд принципиальных проблем. Обычно, стандартное решение (4) осуществляют при известных предположениях классической регрессии, при которых оценка (5) является несмещенной и эффективной [5]. При этом, во-первых, существует опасность получения такой выборки сигнала, когда задача оценки оказывается плохо обусловленной или даже вырожденной, во-вторых, условия предельных теорем теории вероятностей при малом числе наблюдений не выполняются и, как следствие, невозможно обосновать априорную вероятностную модель ошибок в исходных данных. С учетом сказанного сформулируем предположения, которые далее будут использоваться при решении задачи оценки по малому числу наблюдений.

Предположение 1. Матрица A и вектор B фиксированы, т.е. известен эталон сигнала и известен результат измерений на отдельно взятой реализации.

Предположение 2. $\mathrm{Rank}(A) \le M$, то есть не гарантируется невырожденность матрицы A.

Предположение 3. Статистические характерристики вектора B на множестве реализаций считаются неизвестными.

Предположение 4. Относительно вектора ошибок ξ известно лишь то, что задано ограничение на его норму: $\|\xi\| \le R_\xi$. С нашей точки зрения отказ от предположений классической регрессии является вынужденным, а требование $\|\xi\| \le R_\xi$ более реалистичным.

Необходимо отметить, что предположение 4 широко используется в теории возмущений и в теории некорректных задач [6], которые в основном связаны с алгебраическим подходом.

Важнейшим признаком, отличающим задачи оценки по малому числу наблюдений от задач классической регрессии, является априорная неопределенность информативных свойств полезных сигналов и статистических характеристик шумов. В этом случае результат оценивания существенным образом зависит от конкретной выборки сигнала (в частности, её длины). Поэтому в контексте сформулированных выше предположений важным является вопрос величины ожидаемой ошибки оценки на данной конкретной реализации при заданной матрице A (предположение 1) и заданном ограничении на норму вектора ошибок измерений (предположение 4).

В регрессионном анализе решающее значение при оценке ошибок идентификации имеют собственные значения матрицы A, так как дисперсия оценок существенно возрастает, если имеет место мультиколлинеарность. Приведем некоторые меры мультиколлинеарности [7], которые не сложны в вычислительном отношении:

1. Определитель информационной матрицы (Грама) $MG = A^T A$: $\det(MG) = \prod_{i=0}^{M-1} \lambda_i$. Если определитель близок к нулю, задача плохо обусловлена.

2. $K(MG) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$ – число обусловленности. Эта мера широко используется в теории возмущений для анализа ошибок в решениях.

3. Минимальное собственное значение $-\ \lambda_{min}$ информационной матрицы MG. Эта мера мультиколлинеарности является универсальной. Она отражает как масштаб, зависящий от физической размерности независимых переменных, так и мультиколлинеарность соответствующих им векторов.

4. Показатель диагонального преобладания матрицы Грама. Соображения, по которым показатель диагонального преобладания, определяемый как $\phi = Tr^2 MG / Tr MG^2$, где $Tr(\cdot) -$ след матрицы.

Ограничение на применение показателя 4 – неравенства

$$M - 1 < \phi < M. \tag{6}$$

Из приведенного краткого обзора мер мультиколлинеарности видно, что использование определителя связано со значительным риском. Его применение, по-видимому, возможно лишь при наличии дополнительной априорной информации. Следующие две меры: число обусловленности и минимальное собственное значение являются достаточно полными характеристиками мультиколлинеарности, но они связаны с нахождением экстремальных собственных значений. Вычисление собственных значений в ситуациях, когда задача плохо обусловлена, а среди собственных значений имеются кратные, представляет серьезные трудности.

Поэтому наиболее привлекательным как с точки зрения построения процедур контроля данных в информационных технологиях обработки сигналов, так и с точки зрения вычислительной простоты, является показатель диагонального преобладания.

Для установления качества оценок на одной отдельно взятой реализации в [8] проведен непосредственный анализ соотношений для ошибок измерений и ошибок оценки, а также их ортогональных разложений при использовании метода наименьших квадратов.

В [8] получена верхняя граница возможной ошибки оценок параметров $\Delta X_в^2$ при ограничении на норму вектора ошибок исходных данных:

$$\begin{aligned} &\Delta X^T \Delta X \le \Delta X_в^2 = \\ &= M\left[Tr(MG)\left(1 - \sqrt{M/(M-1)(\phi-1)}\right)\right]^{-1} R_\xi^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Рассмотрим пример расчета приведенных выше характеристик для 12-ти частотного OFDM сигнала со следующей информационной матрицей:

$$\begin{aligned} &A = \|a_{i,j}\|, \quad i = 0, \dots, (N-1), \ \ j = 0, \dots, 11; \\ &a_{i,j} = Cos\left[2\pi(F_0 + j\Delta F)i\Delta T\right], \quad 0 \le j \le 11; \\ &a_{i,j} = Sin\left[2\pi(F_0 + j\Delta F)i\Delta T\right], \quad 12 \le j \le 23, \end{aligned}$$

где $F_0 = 699$Гц $-$низшая частота, $\Delta F = 200$Гц $-$ разность между поднесущими частотами, $\Delta T = 9.07 \times 10^{-5}$c $-$ величина интервала дискретизации.

В качестве верхней границы возможной ошибки оценок рассматривалось отношение $\Delta X_в^2 / R_\xi^2$, определяемое по (7). Рассчитывались границы относительных ошибок оценок $1/\lambda_{max} \le \Delta X^T \Delta X / R_\xi^2 \le 1/\lambda_{min}$ для случая, когда вектор ошибок принадлежит сфере радиусом ($\|\xi\| = R_\xi$).

Результаты расчета спектральных характеристик матрицы Грама ($MG = A^T A$) и возможных ошибок оценок параметров при различном количестве цифровых дискрет N приведены в табл. 1. Таким образом, применив к конкретному набору данных в качестве меры обусловленности показатель диагонального преобладания, мы можем всегда получить, по крайней мере, один из 3-х вариантов ответа:

1) задача плохо обусловлена и решение с требуемой точностью невозможно;

Таблица 1

Результаты расчета

N	24	48	96	192
Rank(MG)	22	24	24	24
det(MG)	0	1.12×10^{31}	1.02×10^{40}	3.03×10^{47}
K(MG)	∞	34.66	2	1.33
λ_{min}	0	0.795	27.565	82.69
ϕ(MG)	11.4	21.6	22.81	23.585
$\Delta X_в^2 / R_\xi^2$	0.122	0.107	0.106	0.106
$1/\lambda_{min}$	∞	1.257	0.036	0.012
$1/\lambda_{max}$	0.036	0.036	0.018	9.07×10^{-3}

2) значение меры $\phi(MG)$ на заданном фиксированном наборе данных не позволяет сделать уверенное заключение о достижимой точности оценки, т.к.

$$1 < \phi(MG) < M-1;$$

3) задача хорошо обусловлена $\phi(MG) > M-1$, то есть выполняется условие (6), поэтому существуют и могут быть выработаны гарантированные оценки разрешимости задачи с требуемой точностью при заданной точности исходных данных.

В первом случае решение, которое следует принять, очевидно. Во втором случае возможность получения удовлетворительных оценок параметров вызывает сомнения и, следовательно, необходимо решить − готовы ли мы пойти на увеличение вычислительных затрат, чтобы провести дополнительный анализ сформированного набора данных по более сложному показателю. В третьем, последнем, случае, интерес представляют точные количественные оценки достижимой точности. Анализ результатов расчета показывает, что задача хорошо обусловлена ($\phi(MG) > 23$) при размере выборки $N \ge 99$.

Выводы

В статье предложена методика определения необходимой длительности анализируемого многочастотного сигнала для получения гарантированного решения СЛАУ, используемого при идентификации многочастотных сигналов.

Таким образом, используя выбранный показатель диагонального преобладания можно априори определить требуемый размер информативных выборок для сигналов заданной частотной структуры. Это позволяет прогнозировать достоверность проводимых измерений, качество проводимого технического анализа и последующего технического распознавания сигналов.

Список литературы

1. Широкополосные беспроводные сети передачи информации / В.М. Вишневский, А.И. Ляхов, С.Л. Портной, И.В. Шахнович. – М.: Техносфера, 2005. – 592 с.

2. Дмитриев Е.В. Аппроксимация коротких процессов, сигналов, функций и расчет их гармонических дискретных спектров / Е.В. Дмитриев // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2007. – Т. 10, № 1. – С. 6-19.

3. Кузниченко В.С.Определение списка рабочих частот OFDM сигналов в системах автоматического радиомониторинга .в условиях априорной неопределенности / В.С. Кузниченко // Системи управління, навігації та зв'язку. – К.: ЦНДІ НіУ, 2011 . – Вип. 1(17). – С. 276-278.

4. Кузниченко В.С. Определение списка рабочих частот OFDM сигналов в системах автоматического радиомониторинга при известном числе их классов / В.С. Кузниченко, Г.Г. Писарёнок, С.Г. Рассомахин // Системи управління навігації та зв'язку. – К.,ЦНДІ НіУ, 2011. – Вип. 3(19). – С. 262-265.

5. Саврасов Ю.С. Оптимальные решения / Ю.С. Саврасов. –М.: Радио и связь, 2000. –151 с.

6. Тихонов А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 287с.

7. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии / Е.З. Демиденко. –М.: Финансы и статистика, 1981. – 291 с.

8. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред. В.А Сойфера. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. −784 с.

Поступила в редколлегию 13.11.2015

Рецензент: д-р техн. наук, доц. С.Г. Рассомахин, Национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков.

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ НЕОБХІДНОЇ ТРИВАЛОСТІ БАГАТОЧАСТОТНИХ СИГНАЛІВ ДЛЯ ЇХ АНАЛІЗУ МЕТОДАМИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

О.О. Білокуров, О.І. Вотяков, В.С. Кузніченко, Г.Г. Писарьонок

Розглядається задача визначення кількості і номіналів частот складних сигналів, яка відмінна від відомих використовуванням методів рішення систем лінійних рівнянь алгебри. Запропоновано використовувати показник діагонального переважання для апріорного визначення необхідного розміру інформаційних цифрових вибірок багаточастотних сигналів для якісного вирішення задачі їх ідентифікації з використанням методів лінійної алгебри.

Ключові слова: *багаточастотні сигнали, цифрова обробка, система лінійних рівнянь алгебри, метод найменших квадратів.*

METHOD OF DETERMINATION OF NECESSARY DURATION OF MULTIFREQUENCY SIGNALS FOR THEIR ANALYSIS BY THE METHODS OF LINEAR ALGEBRA

A.A. Belokurov, O.I. Votyakov, V.S. Kuznichenko, G.G. Pisarenok

The task of determination of quantity and face values of frequencies of difficult signals is considered, different from the known by the use methods of decision of the systems of linear algebraic equalizations. It is offered to use the index of diagonal predominance for a priori determination of the required size of informative digital selections of multifrequency signals for the high-quality decision of task of their authentication with the use of methods of linear algebra.

Keywords: *multifrequency signals, digital treatment, system of linear algebraic equalizations, least-squares method.*