УДК 621.396.26

Ю.Н. Корж, С.В. Сомов, В.Н. Курчанов

Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка, Полтава

ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ СИММЕТРИЧНЫХ ЦИФРОВЫХ НЕРЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ ПРЕДСКАЗАНИЯ

В статье рассмотрен вопрос повышения эффективности нерекурсивных цифровых фильтров предсказания по критерию минимума среднеквадратичной ошибки. Показывается, что для стационарных и нестационарных случайных процессов большую точность оценки обеспечивает фильтр с симметричной импульсной характеристикой.

Ключевые слова: *цифровой фильтр, ошибка предсказания, случайный коррелированный процесс*.

Введение

Задача оценивания параметров коррелированного случайного процесса решается с помощью фильтров предсказания нерекурсивной или решётчатой структуры [1, 2], которые, используя статистическую связь отсчётов, позволяют посредством весового суммирования получить оценку требуемого параметра.

Такого рода фильтры могут использоваться для выделения полезного сигнала из принимаемой аддитивной смеси с помехой, когда из-за априорной неопределённости параметров сигнала (чаще всего амплитуды) оптимальная обработка невозможна.

Основной показатель качества фильтра предсказания – среднеквадратичная ошибка предсказания σ_e. Предполагается, что за счёт изменения алгоритма обработки и порядка нерекурсивного фильтра (количества обрабатываемых отсчётов), можно добиться максимума по критерию эффективность/стоимость.

В зависимости от условий использования фильтра, можно применять различные алгоритмы обработки:

– оценивание по предыдущим временным отсчётам, т.е. оценка в реальном масштабе времени;

– оценивание по последующим отсчётам, т.е. получение оценки с задержкой на определённый временной интервал;

– оценивание одновременно по предыдущим и последующим отсчётам, т.е. также получение оценки с задержкой. Ожидается, что эффективность этих алгоритмов будет различной (особенно для нестационарных случайных процессов) с примерно одинаковой стоимостью.

Эффективность фильтра предсказания

С целью сравнительного анализа эффективности фильтра предсказания в зависимости от его структуры и порядка получим выражения для расчёта нормированной по дисперсии собственных шумов и случайного процесса минимальной σ_e для различных уровней мощности и ширины спектра случайного процесса.

Рассмотрим устройство оценки в виде КИХ-фильтра [4] порядка N – 1 (N – количество одновременно обрабатываемых в фильтре входных отсчётов), структура которого приведена на рис. 1.

Здесь: $\dot{u}(n) = \dot{u}_{\text{п}}(n) + \dot{u}_{\text{ш}}(n)$ - n-й отсчёт, с периодом T, комплексной амплитуды помехи и собственных шумов.

Значение r = 1, N определяет количество предшествующих n-му (r – 1) и последующих за n-м (N – r) отсчётов обрабатываемых в фильтре.

Например, если r = 1, то весовое суммирование производится для N – 1 отсчётов предыдущих n-му отсчёту, если r = N – то для N – 1 отсчётов, последующих за n-м.

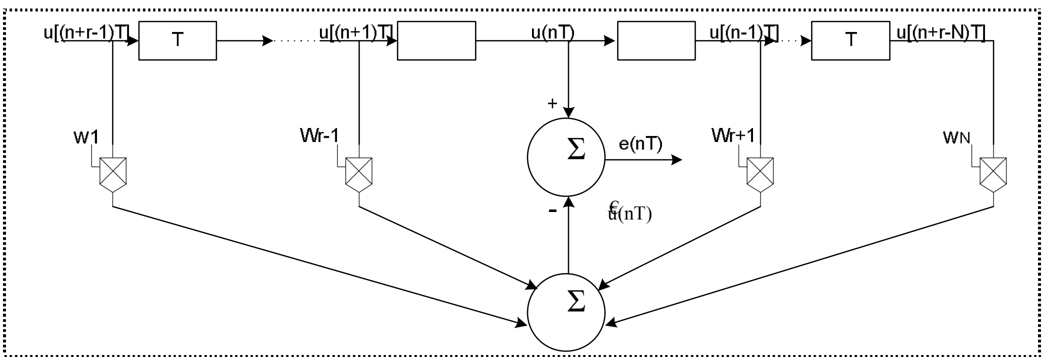

Рис. 1. Структурная схема нерекурсивного фильтра предсказания

Таким образом, оценка комплексной амплитуды $\hat{\mathrm{u}}(\mathrm{n})$ n-го отсчёта помехи образуется после линейного весового суммирования входных N–1 значений комплексных амплитуд помехи.

Соответственно

$$\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{r}}(\mathrm{n}) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^{N} \dot{\mathrm{u}}(\mathrm{n}+\mathrm{r}-\mathrm{k})\,\mathrm{w}_{\mathrm{k}}\,, \tag{1}$$

где w_k – весовые коэффициенты фильтра.

В матрично-векторной форме выражение (1) можно записать в виде:

$$\hat{\mathrm{u}}_{\mathrm{r}}(\mathrm{n}) = \dot{\mathbf{U}}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}(\mathrm{n})\dot{\mathbf{W}}_{\mathrm{r}}\,, \tag{2}$$

где $\dot{\mathbf{U}}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}(\mathrm{n}) = \|u[(n+r-1)],\ldots, u[(n+1)], u[(n-1)],\ldots, u[(n+r-N)]\|$ – вектор-столбец комплексных амплитуд входных отсчётов.

Здесь и далее верхний индекс T обозначает транспонирование вектора, нижний индекс r показывает зависимость значений компонент весового вектора от структуры фильтра (порядка обработки входных отсчётов).

В свою очередь, ошибка оценивания определяется как

$$\mathrm{e}_{\mathrm{r}}(\mathrm{nT}) = \dot{\mathrm{u}}_{\mathrm{r}}(\mathrm{nT}) - \dot{\mathbf{U}}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}(\mathrm{nT})\dot{\mathbf{W}}_{\mathrm{r}}\,. \tag{3}$$

Соответственно дисперсия ошибки оценивания

$$\sigma^2_{e(r)}(nT) = \langle e_r{}^2(nT)\rangle = \langle(\dot{u}(nT) - \hat{u}(nT))(\dot{u}(nT) - \hat{u}(nT))^*\rangle = \langle(\dot{u}(nT) - \dot{\mathbf{W}}_r^T\dot{\mathbf{U}}_r(nT))(\dot{u}(nT) - \dot{\mathbf{W}}_r^T\dot{\mathbf{U}}_r(nT))^*\rangle = \langle\dot{u}(nT)\dot{u}(nT)^*\rangle - 2\dot{\mathbf{W}}_r^T\langle\dot{u}(nT)\dot{\mathbf{U}}_r(nT)\rangle + \dot{\mathbf{W}}_r^T\langle\dot{\mathbf{U}}_r^*(nT)\dot{\mathbf{U}}_r^T(nT)\rangle\dot{\mathbf{W}}_r\,.$$

Здесь: <·>, * – операции статистического усреднения и комплексного сопряжения соответственно.

Для стационарного случайного процесса

$$\sigma^2_{e(r)} = \sigma^2_{\text{пш}} - 2\dot{\mathbf{W}}_r^T\,\dot{\mathbf{P}}_r + \dot{\mathbf{W}}_r^T\,\Phi_{\text{пш(r)}}\,\dot{\mathbf{W}}_r\,, \tag{4}$$

где $\sigma^2_{\text{пш}} = \langle\dot{u}(nT)\dot{u}(nT)^*\rangle = \sigma^2_{\text{п}} + \sigma^2_{\text{ш}}$ – дисперсия статистически независимых помехи и собственного шума;

$\dot{\mathbf{P}}_r^T = \langle\dot{u}(nT)\dot{\mathbf{U}}_r^T(nT)\rangle = \|\,\varphi^{1,r}_{\text{пш}},\ldots,\varphi^{r-1,r}_{\text{пш}},\varphi^{r+1,r}_{\text{пш}},\ldots,\varphi^{N,r}_{\text{пш}}\,\|$ – вектор-столбец взаимных ковариаций между оцениваемым отсчётом и отсчётами, которые подвергаются весовому суммированию;

$\dot{\mathbf{W}}_r{}^T = \|\, w_1, w_2, \ldots, w_{r-1}, w_{r+1},\ldots, w_N\|$ – вектор-столбец весовых коэффициентов фильтра.

$\Phi_{\text{пш(r)}} = <\dot{\mathbf{U}}_r{}^*\dot{\mathbf{U}}_r^T>$ –автоковариационная матрица помехи и шума (далее КМП) с элементами

$\varphi^{i,k}_{\text{пш}} = <\dot{u}^i_{\text{пш}}\dot{u}^{k*}_{\text{пш}}> = <(\dot{u}^i_{\text{п}} + \dot{u}^i_{\text{ш}})(\dot{u}^k_{\text{п}} + \dot{u}^k_{\text{ш}})^*> = \sigma_{\text{п}}{}^2\rho_{ik} + \sigma_{\text{ш}}{}^2\delta_{ik}$, i,k = 1,N; i,k ≠ r, где ρ_{ik} – коэффициент корреляции амплитудных флюктуаций помехи между i и k отсчётами, δ_{ik} – символ Кронекера.

В развёрнутом виде матрицу $\Phi_{\text{пш(r)}}$ можно записать как:

$$\mathbf{\Phi}_{\text{пш(r)}} = \left\|\begin{array}{c:cc:c} \varphi_{1,1} & \varphi_{1,r-1} & \varphi_{1,r+1} & \varphi_{1,N} \\ \hdashline \varphi_{r-1,1} & \varphi_{r-1,r-1} & \varphi_{r-1,r+1} & \varphi_{r-1,N} \\ \varphi_{r+1,1} & \varphi_{r+1,r-1} & \varphi_{r+1,r+1} & \varphi_{r+1,N} \\ \hdashline \varphi_{N,1} & \varphi_{N,r-1} & \varphi_{N,r+1} & \varphi_{N,N} \end{array}\right\|, \tag{5}$$

откуда видно, что структура КМП предсказывающего фильтра зависит от порядкового номера оцениваемого отсчёта.

Уравнение (4) описывает квадратичную поверхность с единственным минимумом [1]. Следовательно, из уравнения $\partial\sigma^2_{e(r)}/\partial\dot{\mathbf{W}}^T = 0$ можно определить весовой вектор, обеспечивающий минимальную σ_e. Дифференцируя (4) по $\dot{\mathbf{W}}^T$, получаем известное соотношение Винера-Хопфа

$$\dot{\mathbf{W}}^T_{\text{опт(r)}} = \mathbf{\Phi}^{-1}_{\text{пш(r)}}\dot{\mathbf{P}}_r\,, \tag{6}$$

или, в другой форме записи

$$\mathbf{\Phi}_{\text{пш(r)}}\,\dot{\mathbf{W}}^T_{\text{опт(r)}} = \dot{\mathbf{P}}_r\,. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (4), получаем выражения для минимальной дисперсии ошибки оценивания:

$$\sigma^2_{e(r)\,\text{мин}} = \sigma^2_{\text{пш}} - \dot{\mathbf{W}}^T_{\text{опт(r)}}\,\dot{\mathbf{P}}_r = \dot{\mathbf{P}}_r^T\,\mathbf{\Phi}^{-1}{}_{\text{пш(r)}}\,\dot{\mathbf{P}}_r\,, \tag{8}$$

$$\sigma^2_{e(r)\,\text{мин}} = \sigma^2_{\text{пш}} - \dot{\mathbf{W}}^T_{\text{опт(r)}}\,\mathbf{\Phi}_{\text{пш(r)}}\,\dot{\mathbf{W}}_{\text{опт(r)}}\,. \tag{9}$$

Нормированные, относительно дисперсий собственных шумов и помехи, значения $\sigma^2_{e(r)\,\text{мин}}$:

$$\frac{\sigma^2_{e(r)\,\text{мин}}}{\sigma^2_{\text{ш}}} = 1 + b - \dot{\mathbf{W}}^T_{\text{опт(r)}}\,\mathbf{\Phi}'_{\text{пш(r)}}\,\dot{\mathbf{W}}_{\text{опт(r)}}\,, \tag{10}$$

$$\frac{\sigma^2_{e(r)\,\text{мин}}}{\sigma^2_{\text{п}}} = 1 + 1/b - \dot{\mathbf{W}}^T_{\text{опт(r)}}\,\mathbf{\Phi}''_{\text{пш(r)}}\,\dot{\mathbf{W}}_{\text{опт(r)}}\,, \tag{11}$$

где $b = \sigma^2_{\text{п}}/\sigma^2_{\text{ш}}$, $\varphi^{ik'}_{\text{пш}} = b\rho_{ik}+\delta_{ik}$, $\varphi^{ik''}_{\text{пш}} = \rho_{ik}+\delta_{ik}/b$.

Таким образом, потенциальная точность оценки комплексной амплитуды стационарного случайного процесса зависит от степени статистической взаимосвязи отсчётов, уровня мощности, порядка и структуры фильтра.

Для получения компонент оптимального весового вектора предсказывающего фильтра удобнее рассчитывать весовой вектор обеляющего фильтра, который после взвешенного линейного суммирования входных отсчётов формирует на выходе случайный некоррелированный процесс. Структура обеляющего фильтра приведена на рис. 2. КМП обеляющего фильтра $\mathbf{\Phi}^{o}_{\text{пш}}$ (12) проще по структуре:

$$\mathbf{\Phi}^{o}_{\text{пш}} = \left\|\begin{array}{cc:c} \varphi^{1,1}_{\text{пш}} & \varphi^{1,2}_{\text{пш}} & \varphi^{1,N}_{\text{пш}} \\ \varphi^{2,1}_{\text{пш}} & \varphi^{2,2}_{\text{пш}} & \varphi^{2,N}_{\text{пш}} \\ \hdashline \varphi^{N,1}_{\text{пш}} & \varphi^{N,2}_{\text{пш}} & \varphi^{N,N}_{\text{пш}} \end{array}\right\|. \tag{12}$$

Соответственно можно показать [5], что матричное уравнение (7) эквивалентно уравнению

$$\Phi^{o}_{пш}\ \dot{\mathbf{W}}^{oT}_{опт(r)} = \mathbf{I}_r . \qquad (13)$$

Таким образом, после решения уравнения

$$\dot{\mathbf{W}}^{oT}_{опт(r)} = (\Phi^{0}_{пш(r)})^{-1}\mathbf{I}_r \qquad (14)$$

и нормировки компонент весового вектора $\dot{\mathbf{W}}^{oT}_{опт(r)}$ по компоненте w_r^{o} можно получить оптимальный весовой вектор фильтра оценивания.

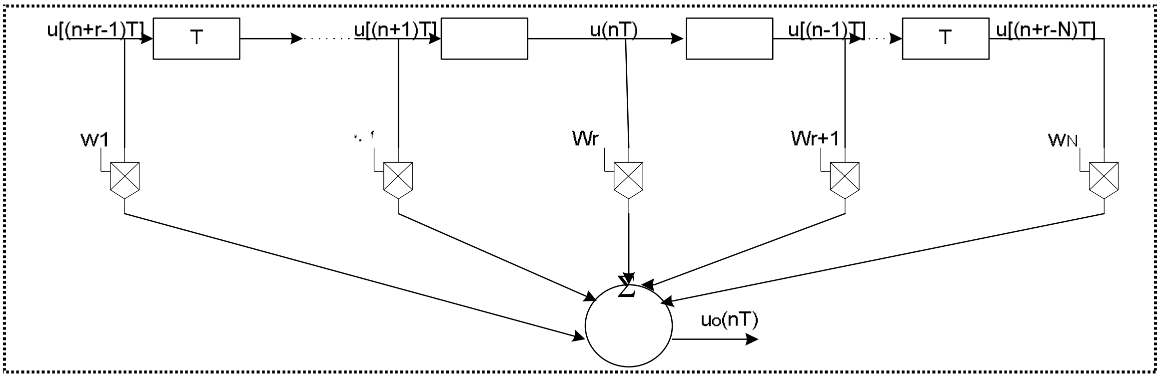

Рис. 2. Структурная схема обеляющего фильтра

Сравнительный анализ эффективности фильтров

Расчёт $\sigma^2_{e(r)\,мин}$ по соотношению (10) проводился для стационарного случайного процесса с нормированной корреляционной функцией

$$\rho(\tau) = \left(\frac{\cos \pi F_0 \tau}{1-\left(2F_0\tau\right)^2}\right)^2 , \qquad (15)$$

где F_0 – граничная частота спектра.

На рис. 3 приведены зависимости нормированной относительно $\sigma^2_ш$ минимальной дисперсии ошибки предсказания для различных дисперсий и эффективной ширины спектра $П = 2F_0/3$ случайного процесса. На рис. 3, а показаны зависимости для фильтра со значением r = 1 (естественно, что для стационарного процесса такая же оценка будет и для r = N). На рис. 3, б показаны зависимости для фильтра со значением r = 4 (порядок фильтра N–1 = 8), т.е. получение оценки по предыдущим и последующим отсчётам. Можно отметить, что для второй структуры фильтра ошибка оценивания значительно меньше во всём диапазоне изменения ширины спектра и мощности случайного процесса. В общем случае, для заданного порядка фильтра наибольшая точность оценки достигается при симметричной структуре, т.е. $r = \frac{N+1}{2}$, что, скорее всего можно пояснить возможностью двукратного использования для оценки наиболее сильных корреляционных связей с $\tau = (1\div2)T$.

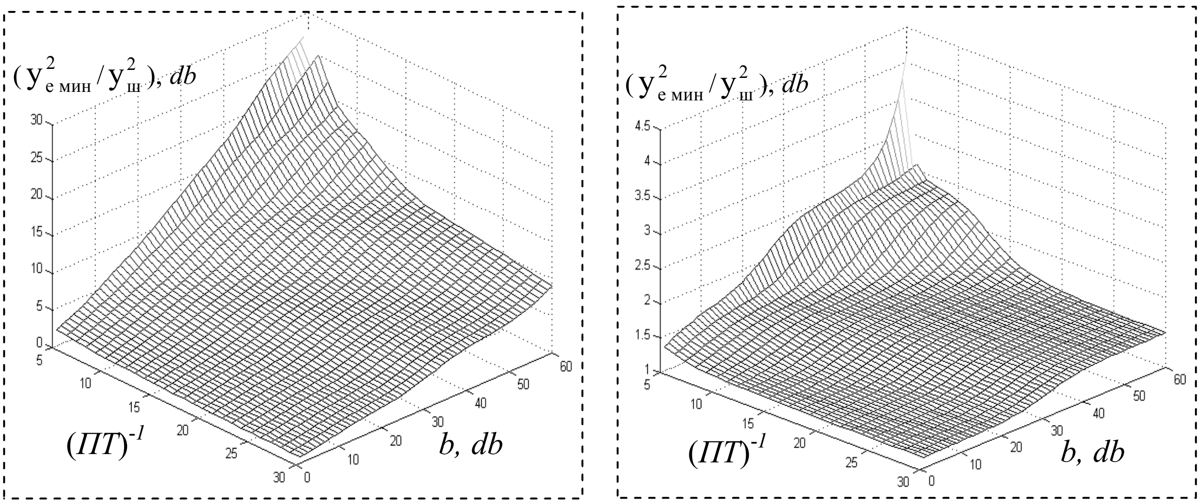

Рис. 3. Нормированная минимальная дисперсия ошибки предсказания для различных структур фильтра

Наиболее существенных преимуществ симметричных фильтров следует ожидать при оценивании параметров нестационарных процессов. Для анализа точности оценивания отсчётов комплексной амплитуды нестационарного процесса была применена имитационная модель, где квадратурные компоненты коррелированных отсчётов формировались как случайный дискретный процесс скользящего среднего [6]. Элементы КМП, нормированной по дисперсии собственных шумов, можно записать в виде:

$$\varphi^{ik}_{пш(нест)} = \frac{(b_i b_k)^{1/2}\rho_{ik} + \delta_{ik}}{((b_i + 1)(b_k + 1))^{1/2}}, \qquad (16)$$

где $b_{i(k)}$ – отношение дисперсии i (k) отсчёта нестационарного случайного процесса к спектральной плотности собственных шумов.

Так как процесс не обладает свойством эргодичности, то для получения значений ковариаций осуществлялась статистическая обработка по *реализациям* случайного процесса.

Результаты моделирования и обработки одной из реализаций нестационарного процесса с эффективной шириной спектра $П = \frac{1}{15 \cdot T}$ представлены на рис. 4.

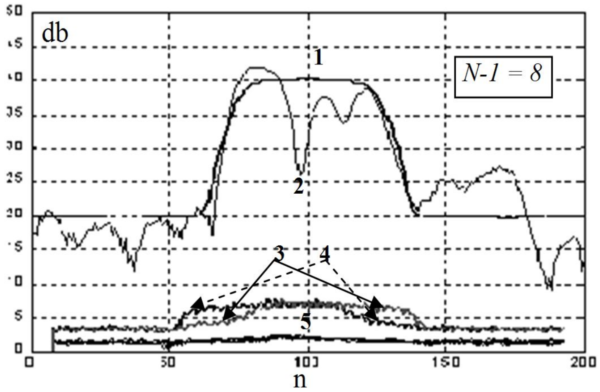

Рис. 4. Моделирование нестационарного случайного процесса и нормированная минимальная дисперсия ошибки предсказания для различных структур фильтра:
1 – закономерная зависимость мощности случайного процесса b = f(nT);
2 – реализация случайного процесса $|\dot{u}(nT)|/\sigma_ш$;
3 – $\sigma^2_{e(r)\,мин} / \sigma^2_ш$ для r = 1;
4 – $\sigma^2_{e(r)\,мин} / \sigma^2_ш$ для r = N;
5 – $\sigma^2_{e(r)\,мин} / \sigma^2_ш$ для $r = \frac{N+1}{2}$

Можно отметить, что даже на участках изменения дисперсии случайного процесса от 20 до 40 db у симметричного фильтра точность оценки практически не изменяется, (увеличение $\sigma^2_{e\,мин}$ обусловливается лишь возрастанием b) не превышая 2,5 db.

Выводы

1. Сравнительный анализ ошибки оценивания фильтров предсказания с симметричной и несимметричной структурой показал, что первые обеспечивают меньшую σ_e. Если условия применения фильтров позволяют для формирования оценки использовать предыдущие и последующие отсчёты комплексной амплитуды случайного процесса, то предпочтительней использовать фильтры первого типа.

2. Расчет σ_e для реализаций нестационарного по мощности случайного процесса показал, что фильтр с симметричной структурой практически не снижает точность оценки при различном характере (уменьшение или увеличение) изменения дисперсии.

Список литературы

1. Уидроу Б. Адаптивная обработка сигналов: Пер. с англ. / Б. Уидроу, С. Стирнз. – М.: Радио и связь, 1989. – 440 с.

2. Куприянов М.С. Цифровая обработка сигналов: процессоры, алгоритмы, средства проектирования. – 2-е изд., перераб. и доп. / М.С. Куприянов, Б.Д. Матюшкин. – СПб.: Политехника, 1999. – 592 с.

3. Радиоэлектронные системы: основы построения и теория. Справочник / Под ред. проф. Я.Д. Ширмана. – М.: ЗАО «МАКВИС», 1998. – 828 с.

4. Солонина А.И. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, Л.А. Яковлев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 464 с.

5. Бронштейн И.Л. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е издание, исправленное / И.Л. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

6. Обнаружение радиосигналов / П.С. Акимов, Ф.Ф. Евстратов, С.И. Захаров и др.; под ред. А.А. Колосова. – Радио и связь, 1989. – 288 с.

Поступила в редколлегию 13.11.2015

Рецензент: д-р техн. наук, проф. А.Л. Ляхов, Полтавский национальный технический университет им. Юрия Кондратюка, Полтава.

ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ СИМЕТРИЧНИХ ЦИФРОВИХ НЕРЕКУРСИВНИХ ФІЛЬТРІВ ПЕРЕДБАЧЕННЯ

Ю.М. Корж, С.В. Сомов, В.М. Курчанов

У статті розглянуто питання підвищення ефективності нерекурсивних цифрових фільтрів передбачення за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки. Показується, що для стаціонарних і нестаціонарних випадкових процесів більшу точність оцінки забезпечує фільтр із симетричною імпульсною характеристикою.

***Ключові слова**: цифровий фільтр, помилка передбачення, випадковий корельований процес.*

EVALUATION OF SYMMETRIC DIGITAL RECURSIVE FILTER PREDICTION

Yu.N. Korzh, S.V. Somov, V.N. Kurchanov

The article deals with the issue of increasing the efficiency of non-recursive digital filter prediction of the criterion of minimum mean squared error. It is shown that for stationary and non-stationary random processes more accurate assessment provides a filter with a symmetric impulse response.

***Keywords**: digital filter, the prediction error, a correlated random process.*