

УДК 621.9.06

В.Б. Струтинський<sup>1</sup>, В.М. Чуприна<sup>2</sup><sup>1</sup> Національний технічний університет України „КПІ“, Київ<sup>2</sup> Державний науково-випробувальний центр Збройних Сил України, Чернігів

## ТЕНЗОРНО-ГЕОМЕТРИЧНА МОДЕЛЬ ПРОСТОРОВОЇ ЖОРСТКОСТІ МЕТАЛОРИЗАЛЬНОГО ВЕРСТАТУ

*Розглянута тензорно-геометрична модель просторової жорсткості металорізального верстату. На основі опису статичної жорсткості основних підсистем у вигляді еліпсоїдів жорсткості розроблено алгоритм знаходження податливості верстату в довільному напрямку тривимірного простору. Побудовано поверхню просторової податливості верстата в зоні різання.*

**Ключові слова:** тензор, жорсткість, податливість, верстат, підсистема, еліпсоїд, алгоритм, тривимірний простір, тензорно-геометрична модель.

### Вступ

**Постановка задачі.** Інтенсифікація процесу обробки в сучасних технологічних процесах вимагає забезпечення високої жорсткості металорізальних верстатів, яка безпосередньо пов'язана з точністю обробки. Це проявляється у вигляді нерівномірної жорсткості верстата в робочому просторі – анізотропії жорсткості, яка впливає на точність обробки і появу відхилень від ідеальної геометричної форми оброблюваних деталей. Як наслідок на деталі збільшуються макро- і мікропохибки у вигляді викривлення форми деталей (еліпсність, овальність, огранка, конусність і інше), а також погіршується шорсткість їх поверхонь.

В фундаментальних роботах Д.М. Решетова, З.І. Левіної, В.Е. Пуша [5 – 7] теоретично обґрунтований зв'язок показників точності обробки деталей на верстаті з характеристиками жорсткості верстата і його вузлів. Показаний вплив жорсткості верстата на показники його точності, зокрема жорсткості окремих вузлів на баланс геометричної точності верстата.

В монографії В.О. Кудинова [1] показана роль статичної і динамічної жорсткості верстатів і їх вузлів, на точність обробки. Уведено поняття еліпсів жорсткості (супортних груп, шпindelних вузлів і інших). Визначені причини втрати стійкості, виникнення автоколиваний і вібрацій при різанні і викликані ними похибки обробки у вигляді порушення геометрії деталей (еліпсність, огранка, хвилястість) та погіршення шорсткості оброблених поверхонь.

В роботі Ю.В. Подураєва [2] на основі тензорно-геометричного уявлення про структуру оброблювальної машини (промислового робота, верстата) уведено поняття різних еліпсоїдів мехатронної машини – кінематики, жорсткості, динаміки. Це є найбільш узагальнений підхід, тому що еліпсоїд відображає анізотропію параметрів машини не в окремій площині, а у тривимірному просторі (3D- просторі).

В роботах В.Б. Струтинського [3,4] запропоновано тензорно-математичний підхід до аналізу статичних і динамічних систем шляхом математичного моделювання.

В статті зроблена спроба розвинути вищезазначені дослідження і на основі тензорно-геометричного підходу до опису жорсткості основних підсистем побудувати модель, яка відображає анізотропію жорсткості в робочій зоні металорізального верстата для подальшого аналізу точності обробки на верстаті.

**Метою статі** є розробка статичної тензорно-геометричної моделі просторової жорсткості верстату з урахуванням жорсткості його основних підсистем.

### Основний матеріал

Металорізальний верстат – це збірна механічна конструкція, яка складається з багатьох окремих елементів (вузлів, підвузлів та деталей). Відомо, що компоновки верстатів здебільшого нагадують профіль скоби [7]. При цьому на несучих елементах конструкції (станинах, стійках, порталах) базуються окремі підсистеми верстата (шпindelні групи, супортні групи, консольні чи хрестові столи і інші). Вони призначені для утримання кінцевих елементів пружної системи – деталі та різального інструменту.

Для аналізу жорсткості пружної системи верстата скористаємось діакоптичним підходом. Розділимо пружну систему (ПС) верстата на парціальні підсистеми, пов'язані з інструментом і деталлю, як це запропоновано в роботі [8]. Схема статичної моделі повної ПС верстата показана на рис. 1, а.

В загальному випадку статична модель верстату може бути подана у вигляді багатьох складових підсистем, пов'язаних пружними в'язями. Зокрема в даній роботі – у вигляді трьох підсистем: інструмента (підсистема 1), деталі (підсистема 2) і несучої системи (підсистема 3).

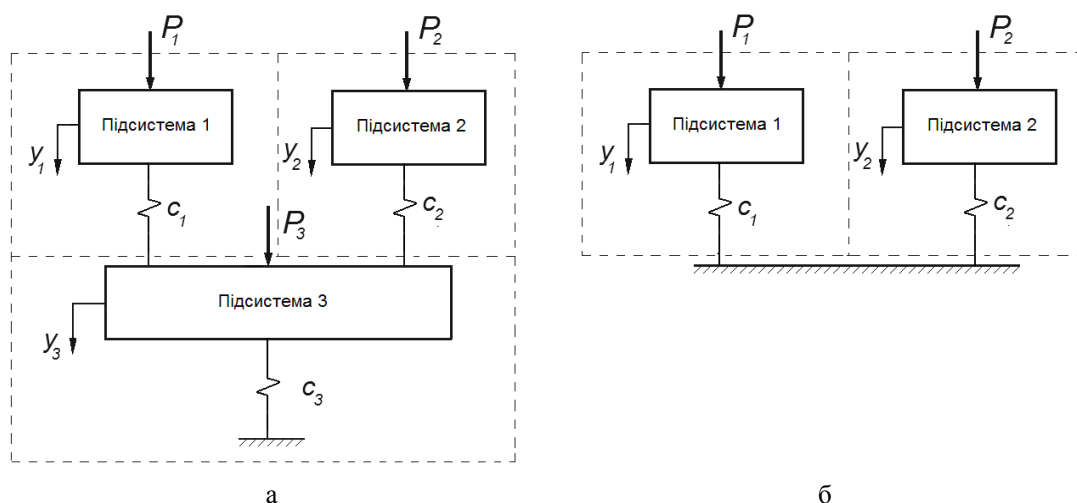


Рис. 1. Схеми статичних моделей ПС верстата:  
а – повна модель; б – спрощена модель

Підсистема 3 практично не впливає на відносні переміщення між точками підсистем 1 і 2, які формують геометрію обробної деталі. Тому доцільно перейти до спрощеної моделі, схема якої показана на рис. 1, б. Не зважаючи на спрощення, ця модель відображає основні закономірності формування траєкторії руху інструмента відносно деталі в процесі різання.

Кожна з цих підсистем має власну жорсткість. Ця жорсткість може бути приведена до кінцевого елемента (до зони різання) у вигляді еліпсоїда жор-

сткості. Таких підсистем у металорізальному верстаті налічується щонайменше дві, з яких одна пов'язана з інструментом, а інша – з заготовкою (обробною деталлю).

Відповідно до кількості підсистем у верстаті існує як мінімум два еліпсоїди жорсткості – еліпсоїд жорсткості інструменту (ЕЖІ) та еліпсоїд жорсткості деталі (ЕЖД).

На рис. 2 зображені приклади конструктивних схем верстатів різного технологічного призначення з еліпсоїдами жорсткості головних підсистем.

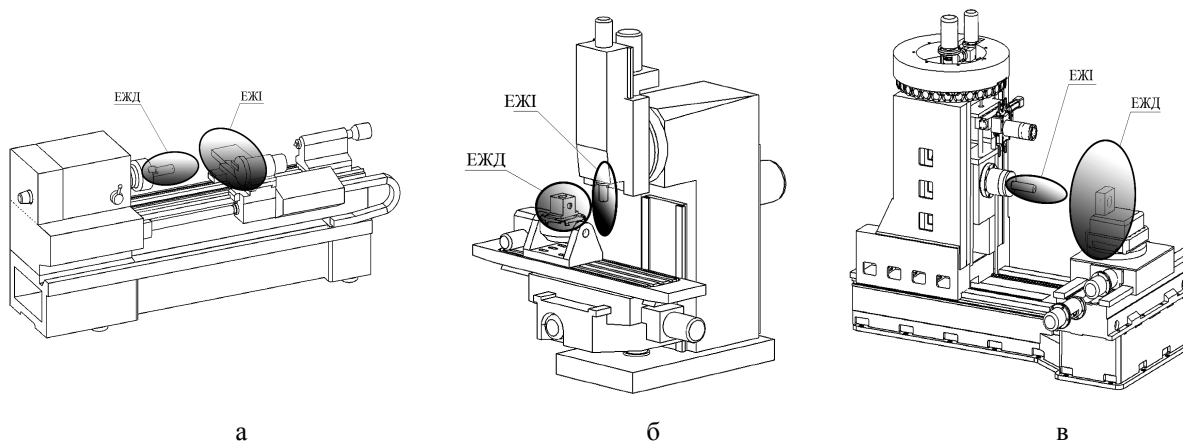


Рис. 2. Еліпсоїди жорсткості інструмента (ЕЖІ) і деталі (ЕЖД) для верстатів різних технологічних груп:  
а – токарного; б – фрезерного; в – багатоопераційного

Кожному еліпсоїду жорсткості відповідає діагональна матриця жорсткості

$$C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{x0} & 0 & 0 \\ 0 & c_{y0} & 0 \\ 0 & 0 & c_{z0} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

де  $c_{x0}, c_{y0}, c_{z0}$  – головні жорсткості підсистеми.

Для діагональної матриці жорсткості є вірним таке співвідношення

$$[x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} (c_{x0})^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & (c_{y0})^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & (c_{z0})^{-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1. \quad (2)$$

Розглянемо взаємодію двох підсистем (шпиндельної групи і поперечного супорту) токарного верстату, конструктивні схеми якого показані на рис. 3.

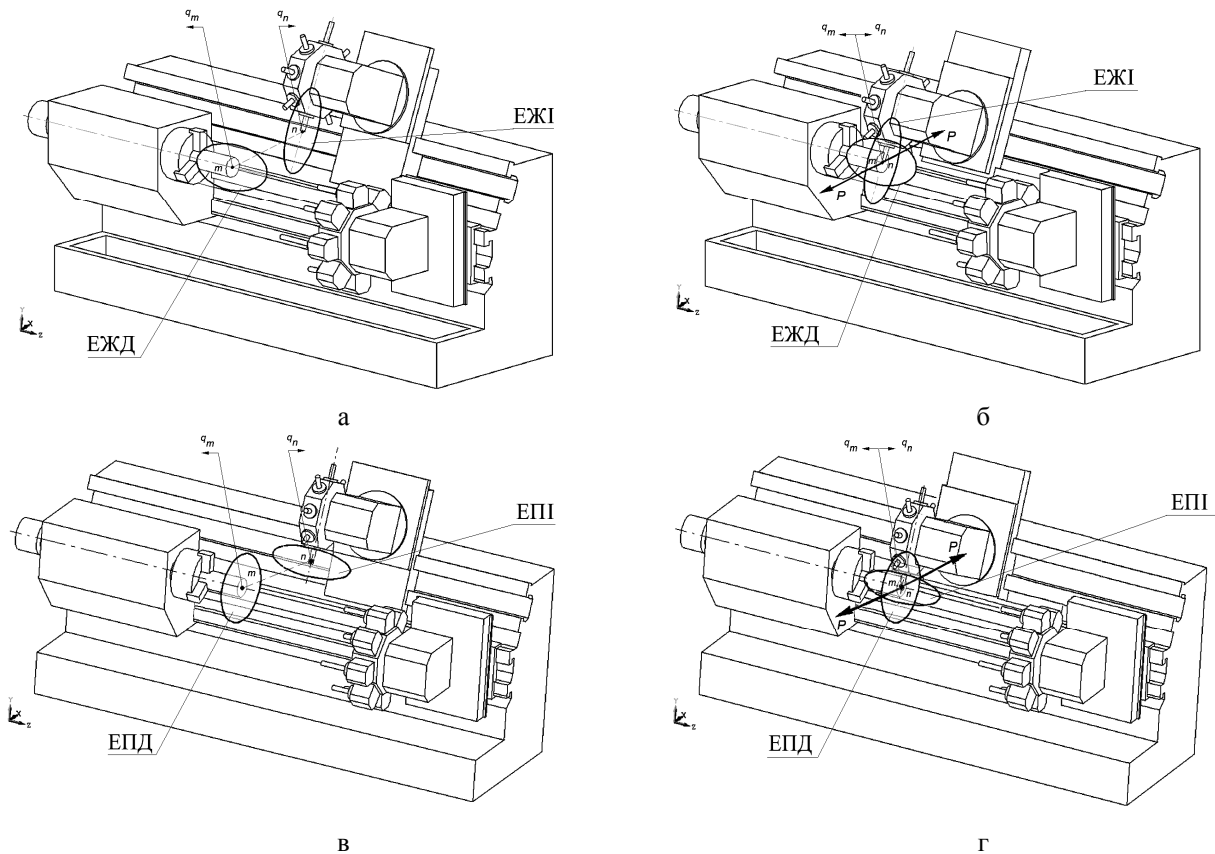


Рис. 3. Конструктивні схеми ПС токарного верстату з еліпсоїдами жорсткості (а, б) та податливості (в, г): а, в – в неробочому стані; б, г – в робочому стані (при різанні)

Як показано на рис. 3, а в неробочому стані верстата центри еліпсоїдів жорсткості розташовані в точках приведення жорсткостей (кінцевих точках) підсистем інструмента та деталі (відповідно  $n$  і  $m$ ).

Під час різання на ПС верстата здійснюється навантаження силою різання  $P$ . Ця сила діє на інструмент в точці  $p$ , а її реакція – на деталь в точці  $m$ . В процесі обробки вершина інструменту входить в контакт із заготовкою. При обробленні заготовки різальним інструментом точки  $n$  і  $m$  зближуються, часто практично збігаються (рис. 3, б).

Деформації елементів верстата під дією сил різання, які зумовлені кінцевою жорсткістю ПС, викликають появу в системі узагальнених координат переміщень  $q$ , причому як абсолютних переміщень точок  $q_n$  і  $q_m$ , так і відносних –  $\Delta q = q_m - q_n$ . Ці переміщення формують відхилення від ідеальної геометрії деталі, тобто похибки обробки (переважно в напрямку нормалі до оброблювальної поверхні). Щоб в процесі роботи верстата ці відхилення не перевищували встановлені допускові межі, необхідно забезпечити достатню жорсткість ПС верстата, причому як статичну, так і динамічну

При вирішенні просторово-деформаційних задач більш зручним є використання величин податливості ніж жорсткості.

Для трьох головних жорсткостей  $c_{x0}, c_{y0}, c_{z0}$  існують три зворотні величини – головні податливості  $\delta_{x0}, \delta_{y0}, \delta_{z0}$  ШВ і, звичайно, інший еліпсоїд – еліпсоїд податливості.

Еліпсоїд податливості ШВ відображає зміну податливості ШВ в просторі, тобто розподіл величин податливості системи в різних напрямках робочого простору від центра еліпсоїда. Величина податливості визначається довжиною радіус-вектора еліпсоїда в заданому напрямку.

Еліпсоїд податливості математично описується формулами, аналогічними еліпсоїду жорсткості, тільки замість  $c$  використовується  $1/\delta$ .

На рис. 2, в показана конструктивна схема ПС токарного верстату з еліпсоїдами податливості двох головних підсистем – інструмента і деталі (заготовки). Ці еліпсоїди є спряженими до відповідних еліпсоїдів жорсткості. Під час різання на верстаті центри еліпсоїдів (точки  $n$  і  $m$ ) також зближуються, як це показано на рис. 2, г.

Для знаходження статичної податливості верстата в довільному напрямку (а потім і жорсткості системи) визначимо сумарну податливість системи через податливості складових підсистем інструмента і деталі, а також опишемо відповідну їй поверхню статичної податливості.

Сила різання  $P$  та її реакція діють на точки  $n$  і  $m$  в протилежних напрямках. Тому відносно переміщення  $\Delta q = q_m - q_n$  (в заданому напрямку) будемо знаходити у вигляді алгебраїчної суми абсолютних переміщень точок  $n$  і  $m$ .

Знайдемо його через податливості пружних підсистем в цих точках

$$\Delta q = P \cdot \delta_m - (-P) \cdot \delta_n = P \cdot (\delta_m + \delta_n). \quad (3)$$

Величина  $\Delta q$  – це фактично відтиснення інструменту від деталі у заданому напрямку, яке безпосередньо визначає точність обробки на верстаті.

З формули (3) випливає, що результуюча податливість ПС верстата у заданому напрямку дорівнює сумарній податливості інструмента і деталі в зоні різання, тобто  $\delta = \delta_m + \delta_n$ .

Таким чином результуючу поверхню податливості ПС можна побудувати за допомогою двох еліпсоїдів податливості, отриманих для точок  $n$  і  $m$ . В будь-якому випадку ця поверхня вже не буде еліпсоїдом.

В деяких часткових випадках, тільки якщо головні осі еліпсоїдів співпадають і для обох виконується умова  $c_{x0} > c_{y0} > c_{z0}$ , результуючу поверхню податливості ПС можна приблизно (з незначною похибкою) замінити поверхнею еліпсоїду податливості, яка описується рівнянням

$$\begin{aligned} &(\delta_{x0_n} + \delta_{x0_m})^2 \cdot x_0^2 + (\delta_{y0_n} + \delta_{y0_m})^2 \cdot y_0^2 + \\ &+ (\delta_{z0_n} + \delta_{z0_m})^2 \cdot z_0^2 = 1. \end{aligned} \quad (4)$$

В загальному ж випадку напрямки головних осей податливості не збігаються. При цьому форму результуючої поверхні можна отримати шляхом графічних побудов.

Алгоритм знаходження реальної результуючої поверхні запропоновано наступний:

1. Задаємо рівняння еліпсоїду податливості для підсистеми інструмента (точка  $n$ ).

2. Визначаємо рівняння прямої лінії, яка проходить через центр еліпсоїда і задає напрямок визначення податливості.

3. Знаходимо координати точки перетину прямої з еліпсоїдом податливості (точка  $K$ ).

4. Визначаємо величину податливості  $\delta_n$ .

5. Повторюємо п.п. 1-4 для іншого еліпсоїда для підсистеми деталі (точка  $m$ ) і визначаємо величину податливості  $\delta_m$ .

6. Знаходимо сумарну податливість в цьому напрямку для всієї ПС за визначеними підсистемами.

При знаходженні точок на поверхнях еліпсоїдів напрямок задається нескінченною прямою  $L$ , яка записується у вигляді канонічного рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (5)$$

де  $l, m, n$  – напрямні коефіцієнти;

$x_0, y_0, z_0$  – координати точки, яка лежить на прямій.

Якщо точка на прямій співпадає з початком системи координат, то

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}. \quad (6)$$

Також, пряму  $L$  можна задати як лінію перетину двох не компланарних площин у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Якщо площини проходять через початок системи координат, то  $D_1 = D_2 = 0$

З рівняння (6) можна знайти коефіцієнти для системи (7):

$$A_1 = m; \quad B_1 = -l; \quad C_1 = 0;$$

$$A_2 = n; \quad B_2 = 0; \quad C_2 = -l.$$

Таким чином, координати точки  $K$  перетину еліпсоїда з прямою  $L$  (див. п.3 алгоритму) можна знайти з системи лінійно-квадратичних рівнянь такого вигляду:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0, \\ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + a_{44} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Тут два перших рівняння задають пряму, а третє належить поверхні еліпсоїда. Квадратичні рівняння мають два рішення, тому таких точок перетину на поверхні існує дві –  $K$  та  $K'$ . Їх координати симетричні відносно точки  $O$  завдяки центральній симетрії еліпсоїда.

Податливість підсистеми інструмента  $\delta_n$  в даному напрямку знайдемо як довжину (модуль) радіус-вектора  $\vec{K}$ , проведеного з центра еліпсоїда в точку  $K$

$$\delta_n = \left| \sqrt{(x_K^2 + y_K^2 + z_K^2)} \right|. \quad (9)$$

Замінивши третє рівняння системи (8) на рівняння для другого еліпсоїду, по аналогії отримаємо податливість підсистеми деталі  $\delta_m$ .

Повну податливість ПС в цьому напрямку визначаємо як сумарну податливість, тобто

$$\delta_{\Sigma} = \delta_m + \delta_n,$$

або

$$\delta_{\Sigma} = \sqrt{\left(x_{K_m}^2 + y_{K_m}^2 + z_{K_m}^2\right)} + \sqrt{\left(x_{K_n}^2 + y_{K_n}^2 + z_{K_n}^2\right)} \quad (10)$$

Відкладаючи  $\delta_{\Sigma}$  від центра  $O$  в даному напрямку, знаходимо точку на напрямній прямій.

Сукупність точок визначає результуючу поверхню відносної податливості пружної системи.

Таким чином за даним алгоритмом можна побудувати результуючу поверхню статичної податливості пружної системи верстата в цілому.

На рис. 4 показана побудова поверхні з двох еліпсоїдів за вищезазначеним алгоритмом. При цьо-

му співвідношення півосей еліпсоїдів приймалось таким:

для першого - 1:2:3,

для другого - 1:3:2.

Отримана результуюча поверхня зовсім не схожа на еліпсоїд. Вона відображає розподіл податливості пружної системи системи верстату в просторі.

На рис. 5 приведені приклади поверхонь, отримані для різних варіантів співвідношення осей еліпсоїдів (в межах одного порядку). Як видно з наведених зображень форм поверхонь, просторова податливість ПС верстату в різних напрямках суттєво змінюється.

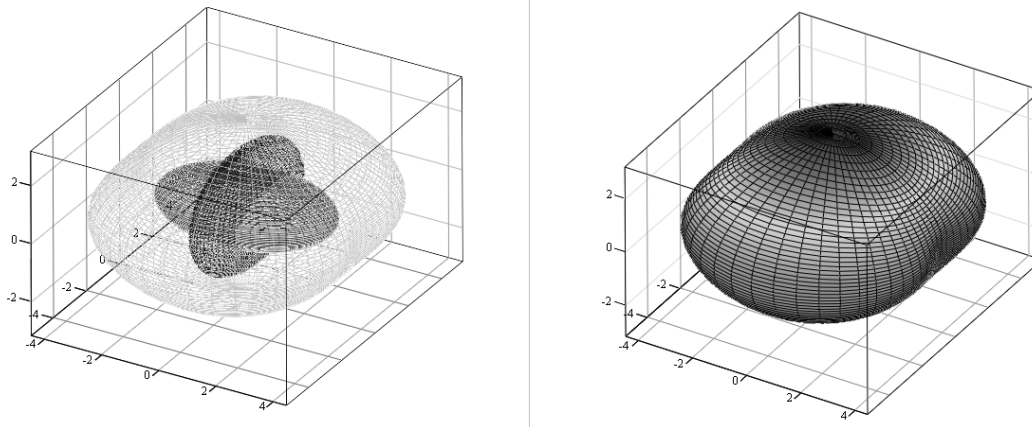


Рис. 4. Побудова поверхні статичної податливості ПС верстату з двох еліпсоїдів

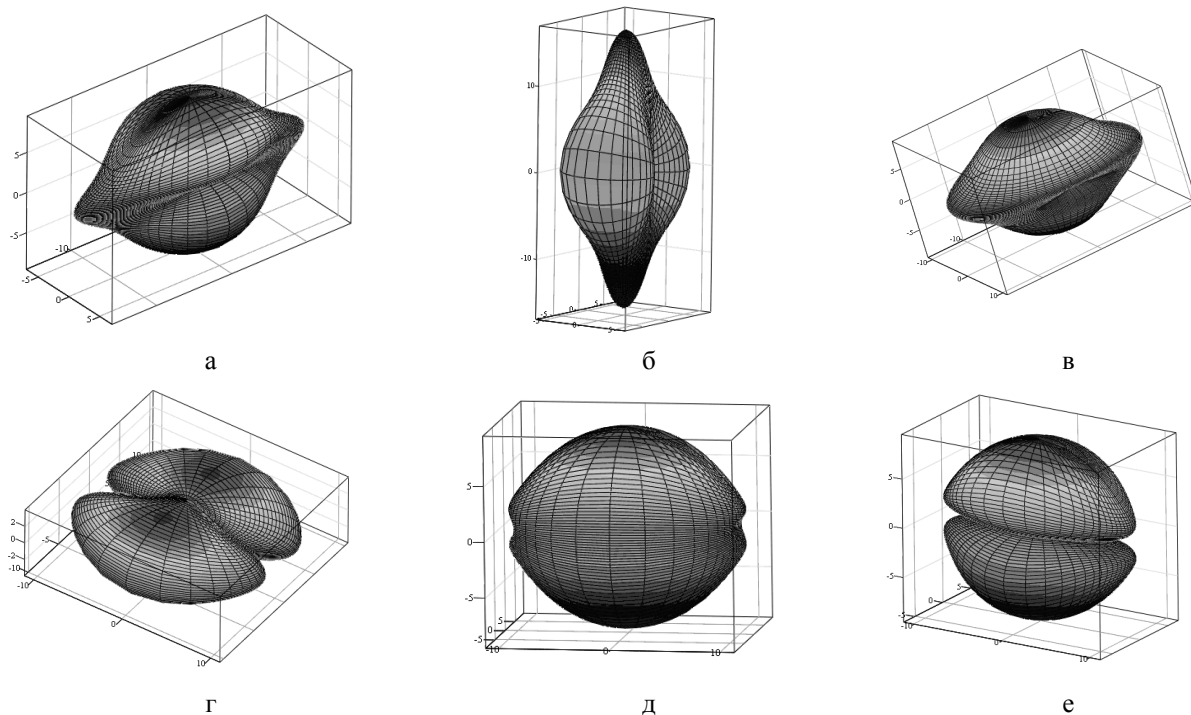


Рис. 5. Поверхні податливості ПС верстата

з різними співвідношеннями осей двох еліпсоїдів  $a_1 : b_1 : c_1$  і  $a_2 : b_2 : c_2$  :

а – 2:8:1 і 1:7:8; б – 2:1:8 і 1:7:8; в – 7:8:1 і 1:7:8; г – 7:2:1 і 1:7:2;

д – 7:2:1 і 1:7:8; е – 7:2:1 і 1:7:8;

При деяких інших видах обробки (наприклад, при обробці фасонних поверхонь) головні осі еліпсоїдів можуть бути не колінеарними. Вони можуть повертатись на різні кути, причому не тільки відносно глобальної координатної системи верстата, але й поміж собою. Особливо це розповсюджено у верстатах з поворотними головками, поворотними столами та 4-6 координатних верстатах з ЧПК і оброблювальних центрах.

На рис. 6 наведеній приклад вертикально-фрезерного верстату з ЧПК з додатковими поворотними координатами А і В. Допоміжний стіл може повер-

татись на кут  $\alpha$  навкруги осі X, а поворотна шпindelна головка – на кут  $\beta$  навкруги осі Y. При наявності поворотного столу можна отримати також поворот на кут  $\gamma$  навкруги осі Z.

Одночасно з цими вузлами відбувається поворот відповідних еліпсоїдів жорсткості (податливості) на ті ж самі кути.

В таких конструкціях верстатів задача побудови результуючої поверхні жорсткості (податливості) дещо ускладнюється, тому що в загальному випадку слід враховувати усі можливі додаткові кути поворотів.

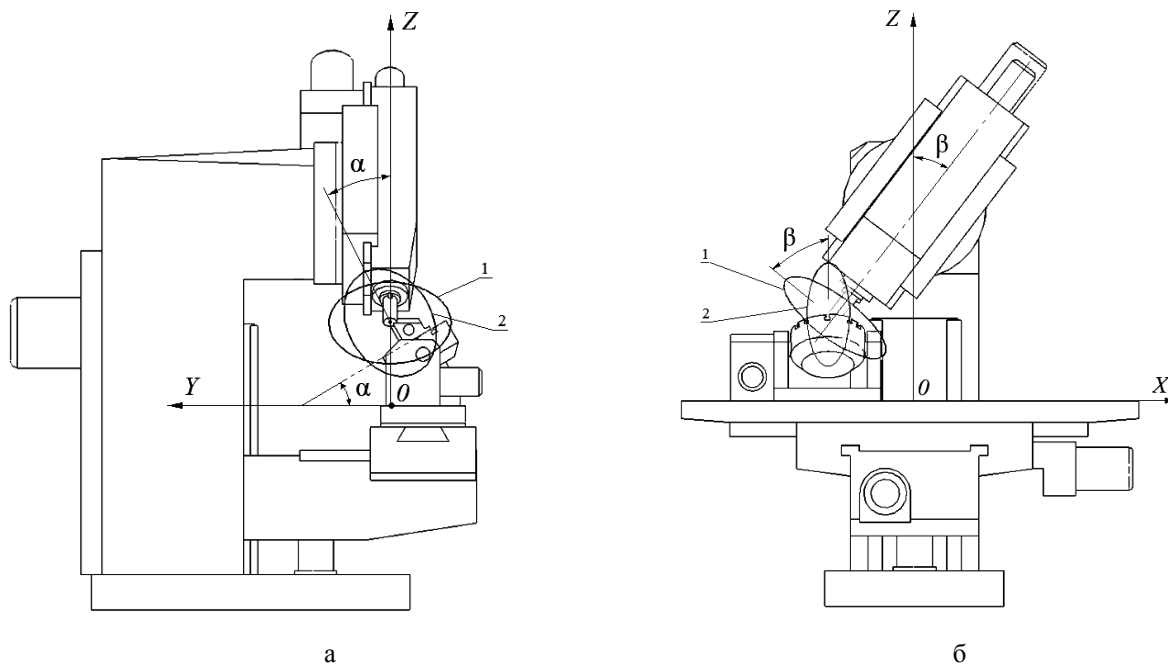


Рис. 6. Розташування еліпсоїдів податливості інструмента (1) і деталі (2) на вертикально-фрезерному верстаті з поворотом осей на кути  $\alpha$  і  $\beta$

На рис. 7 показана побудова поверхні, яку можна отримати з двох еліпсоїдів з довільними незалежними поворотами осей обох еліпсоїдів на кути

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  та  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  відповідно. При цьому результуюча поверхня переорієнтується в просторі та змінюється по формі, причому іноді досить суттєво.

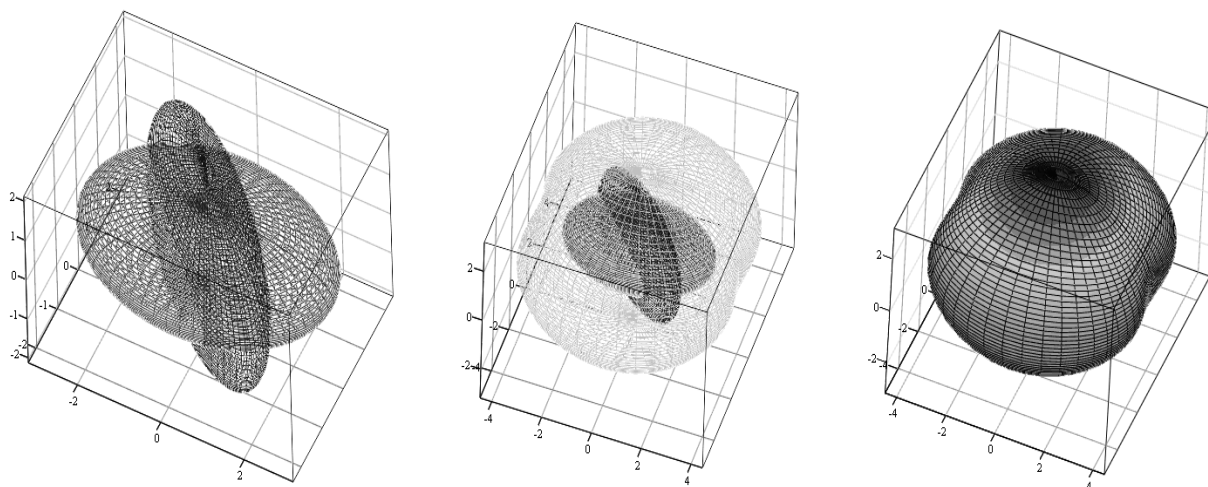


Рис. 7. Побудова поверхні з двох еліпсоїдів з поворотом осей на кут  $30^\circ$

Анізотропія просторової жорсткості (податливості) пружної системи суттєво впливає на точність обробки на верстаті і сприяє появі макро- і мікропохибок на оброблюваній деталі. Побудована поверхня статичної податливості пружної системи верстата дозволяє визначати величини деформацій підсистем верстату від діючих силових навантажень і, як наслідок, знайти відтиснення інструменту від деталі в процесі різання, які обумовлюють точність обробки на верстаті - відхилення від ідеальних розмірів. При зміні напрямку діючої сили змінюється величина відтиснення, яка визначає відхилення від ідеальної геометричної форми оброблюваних деталей.

Таким чином, поверхня просторової жорсткості (податливості) пружної системи встановлює безпосередній зв'язок жорсткості (податливості) верстату з точністю обробки, зокрема значеннями отриманих розмірів і формою оброблюваних деталей.

### Висновки

1. На базі діакоптического підходу до аналізу складних систем по частинах для визначення просторової жорсткості (або податливості) пружної системи металорізального верстату запропонована розрахункова модель, яка складається з двох головних підсистем - інструмента і деталі.

2. Спираючись на тензорно-геометричний опис жорсткості головних підсистем верстату (інструмента і деталі) у вигляді еліпсоїдів жорсткості (податливості), розроблено алгоритм знаходження величини статичної жорсткості (податливості) пружної системи верстату в зоні різання в довільному напрямку тривимірного простору.

3. Запропонована тензорно-геометрична модель просторової жорсткості верстату у формі 3D-поверхні дає можливість визначення величини жор-

сткості (податливості) в будь-якому напрямку робочого простору.

4. На основі побудованої 3D-поверхні можна знайти величину деформації верстату в зоні різання від діючого силового навантаження, зокрема відтиснення інструменту від деталі, яке безпосередньо впливає на точність обробки - розміри і форму деталі. Таким чином, можна встановити безпосередній зв'язок просторової жорсткості (податливості) верстату з точністю обробки деталей на верстаті.

### Список літератури

1. Кудинов В.А. Динамика станков. / В.А.Кудинов - М.: Машиностроение, 1967 - 360 с.
2. Подураев Ю.В. Мехатроника: основы, методы, применение: учебн. пос. для вузов. / Ю.В. Подураев - М.: Машиностроение, 2006. - 256 с.
3. Струтинський В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки: підручник. / В.Б. Струтинський - Житомир, ЖИТІ, 2001 - 612 с.
4. Струтинський В.Б. Тензорні математичні моделі процесів та систем: Підручник. - Житомир: ЖДТУ, 2005. - 635 с.
5. Детали и механизмы металлорежущих станков. В 2-х т. Под ред. Решетова Д.Н. Издательство: Машиностроение, 1972.
6. Левина З.М., Решетов Д.Н. Контактная жесткость машин. / З.М. Левина, Д.Н. Решетов - М.: Машиностроение, 1971. - 264 с
7. Пуш В.Э. Конструирование металлорежущих станков / В.Э.Пуш - М.: Машиностроение, 1977. - 390 с.
8. Чуприна В.М. Діакоптический підхід в дослідженні динаміки верстату по частинах / В.М. Чуприна // Промислова гідроліка і пневматика. Матеріали XIII Міжнародної науково-технічної конференції. - Чернівці: ЧДТУ, 2012. - С.68.

Надійшла до редколегії 24.12.2015

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Д.Ю.Федориненко, Чернігівський національний технологічний університет, Чернівці.

### ТЕНЗОРНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ МЕТАЛЛОРЕЖУЩЕГО СТАНКА

В.Б. Струтинский, В.М. Чуприна

*Рассмотрена тензорно-геометрическая модель пространственной жесткости металлорежущего станка. На основе описания статической жесткости основных подсистем в виде эллипсоидов жесткости разработан алгоритм нахождения податливости станка в произвольном направлении трехмерного пространства. Построена поверхность пространственной податливости станка в зоне резания.*

**Ключевые слова:** тензор, жесткость, податливость, станок, подсистема, эллипсоид, алгоритм, трехмерное пространство, тензорно-геометрическая модель.

### TENSOR-GEOMETRICAL MODEL OF SPATIAL RIGIDITY OF THE MACHINE TOOL

V.B. Strutinsky, V.M. Chupryna

*Tensor model of spatial rigidity of the machine tool has been considered. On the basis of the description of the static stiffness of the major subsystems in the form of ellipsoids stiffness algorithm for finding the compliance of the machine in any direction three-dimensional space has been developed. The surface spatial pliability in the cutting zone of the machine was built.*

**Keywords:** tensor, stiffness, ductility, machine, subsystem, ellipsoid, algorithm, three-dimensional space, the tensor-geometrical model.