

УДК 681.518

М.Ф. Пічугін, Д.В. Карлов, О.О. Клімішен, А.С. Воловодюк

*Харківський університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків*

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ТРАЄКТОРІЙ ЛІТАЛЬНИХ ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ ПРИНЦИПУ ІНВАРІАНТНОСТІ

*Викладено методику синтезу алгоритмів оцінювання параметрів траєкторій літальних об'єктів при апріорній невизначеності збурень в динаміці руху. Теоретичну основу методики складають операторний метод та теорія інваріантності.*

**Ключові слова:** оцінювання, траєкторії, інваріантність, фільтр.

### Вступ

При розв'язанні практичних задач радіолокації, навігації та управління рухом літальних об'єктів (ЛО) виникає необхідність оцінювання параметрів траєкторій ЛО за даними вимірювань радіолокаційних слідкувальних систем [1 – 7].

Для здійснення оцінювання широке застосування знайшли алгоритми, що ґрунтуються на узгальненому фільтрі Калмана [3, 6, 7]. Такі алгоритми будуються за принципом корекції передбачення і є результатом розв'язання відповідних модельних задач при наявності апріорної інформації про помилки вимірювань та збурення в динаміці руху ЛО [3]. В реальних умовах роботи систем обробки радіолокаційної інформації може мати місце невідповідність реальних вхідних дій тим математичним моделям, що використовувались при синтезі алгоритмів оцінювання. Це ускладнює процедуру оцінювання та ставить її в умови апріорної невизначеності [3, 4, 6, 7].

Для усунення апріорної невизначеності є ряд напрямків у розв'язанні задачі оцінювання: мінімакський підхід, принцип адаптації та підхід на основі принципу інваріантності [3, 4].

Однак застосування мінімаксного методу може виявитись недостатнім через відсутність можливості мінімізації помилок оцінювання для всіх умов роботи фільтра [4], а використанню адаптивних алгоритмів перешкоджають можливість розбіжності процесу адаптації та складність аналітичного дослідження алгоритмів [4, 7, 8]. Завдяки тому, що точність фільтрації не залежить від властивостей вхідного впливу, на особливу увагу заслуговує принцип інваріантності [4, 9].

Один з підходів до синтезу інваріантних алгоритмів полягає у створенні комплексної системи фільтрації. Такий підхід передбачає наявність декількох незалежних вимірювачів, що значно обмежує область його застосування [2, 4]. Другий підхід є більш раціональним і передбачає відповідну обро-

бку вимірювань та виключення динамічних помилок відновлення параметрів траєкторій [4]. Таку процедуру дозволяють реалізувати алгоритми оцінювання, що синтезовані за методом "трьох поліномів" [5], однак даний метод не дає змоги синтезувати алгоритми, які б здійснювали оцінювання тих параметрів, які не підлягають безпосередньому спостереженню.

Ця обставина ускладнює застосування таких алгоритмів у системах обробки радіолокаційної інформації для оцінювання параметрів траєкторій ЛО.

У зв'язку з цим **метою даної роботи** є розробка методики синтезу алгоритмів оцінювання параметрів траєкторій літальних об'єктів, яким притаманна властивість інваріантності щодо параметрів траєкторій літальних об'єктів, що дасть змогу використовувати їх при апріорній невизначеності умов функціонування систем обробки радіолокаційної інформації.

### Постановка задачі

Припускається, що вектор параметрів траєкторій літальних об'єктів описується системою лінійних різницевих рівнянь:

$$\bar{x}_n = \Phi(1)\bar{x}_{n-1} + B(1)\bar{\xi}_{n-1}, \quad (1)$$

де  $\bar{x}_n$  - вектор параметрів траєкторій (вектор стану) розмірністю  $k \times 1$ ;

$\bar{\xi}_n$  - вектор збурень у динаміці руху ЛО розмірністю  $k \times 1$ ;

$\Phi(1)$  - перехідна матриця стану розмірністю  $k \times k$ ;

$B(1)$  - перехідна матриця збурення розмірністю  $k \times 1$ .

Процес вимірювання координат літального об'єкту описується виразом:

$$g(n) = H\bar{x}_n + f(n), \quad (2)$$

де  $H$  - матриця спостереження розмірністю  $1 \times k$  ;  
 $f(n)$  - некорельована гауссівська помилка вимірювання з нульовим середнім та відомою дисперсією  $R(n)$  , тобто

$$\begin{aligned} M[f(n)] &= 0, \\ M[f(n)f(n-i)] &= 0, \quad i > 0; \\ M[\bar{x}_n f(n)] &= 0, \quad R(n) = M[f^2(n)], \end{aligned} \quad (3)$$

де  $M$  - оператор статистичного усереднення.

Необхідно синтезувати згладжувальний фільтр (рис. 1) інваріантний відносно параметрів траєкторій та оптимальний за критерієм мінімуму кореляційної матриці помилок оцінювання:

$$P_n = M[\bar{\varepsilon}_n, \bar{\varepsilon}_n^T], \quad (4)$$

де  $\bar{\varepsilon}_n = \bar{x}_n - \hat{x}_n$  - вектор помилок фільтрації.т



Рис. 1. Реалізація згладжувального фільтру

### Загальна методика синтезу

Для розв'язання поставленої задачі формується вектори нев'язок оцінювання  $\tilde{\varepsilon}_n$  та екстраполяції  $\tilde{u}_n$  :

$$\tilde{\varepsilon}_n = H_{\Pi}g(n) - \hat{x}_n; \quad (5)$$

$$\tilde{u}_n = H_{\Pi}g(n) - F\hat{x}_n, \quad (6)$$

де  $F$  - матриця екстраполяції параметрів траєкторії розмірністю  $k \times k$  ;

$H_{\Pi}$  - матриця перетворення  $g(n)$  у зашумлений вектор параметрів траєкторій розмірністю  $k \times 1$  , елементи якої визначаються за виразом:

$$h_{k1} = \frac{(1-z^{-1})^{k-1}}{(k-1)!T^{k-1}}.$$

Припускається, що функціонування алгоритму оцінювання відносно векторів нев'язок оцінювання та екстраполяції описується рівняннями:

$$C\tilde{\varepsilon}_n = VH_{\Pi}g(n); \quad (7)$$

$$C\tilde{u}_n = AH_{\Pi}g(n); \quad (8)$$

де  $A, B$  – матриці, що визначають точність екстраполяції та оцінювання відповідно;

$C$  - характеристична матриця, яка визначає стійкість фільтра.

З наведених виразів співвідношення для векторів нев'язок набувають вигляду:

$$\tilde{\varepsilon}_n = C^{-1}VH_{\Pi}g(n); \quad (9)$$

$$\tilde{u}_n = C^{-1}AH_{\Pi}g(n). \quad (10)$$

Шляхом визначення з рівності (10) вектора зашумлених параметрів траєкторій:

$$H_{\Pi}g(n) = A^{-1}C\tilde{u}_n \quad (11)$$

та підстановки його до виразу (9) будемо мати рівняння, що описує зв'язок між векторами нев'язок:

$$\tilde{\varepsilon}_n = C^{-1}BA^{-1}C\tilde{u}_n. \quad (12)$$

Підстановкою співвідношень (11) та (12) до виразу (5), після відповідних перетворень, отримаємо такий вираз:

$$\hat{x}_n = (I - C^{-1}B)A^{-1}C\tilde{u}_n,$$

де  $I$  – одинична матриця.

Беручи до уваги, що зв'язок між вектором  $\tilde{u}_n$  та нев'язкою  $\tilde{u}(n)$  встановлюється рівнянням:

$$\tilde{u}_n = H_{\Pi}\tilde{u}(n).$$

Вираз для оцінок параметрів траєкторій об'єкта спостереження набуває вигляду:

$$\hat{x}_n = (I - C^{-1}B)A^{-1}CH_{\Pi}\tilde{u}(n). \quad (13)$$

Для усунення динамічних помилок оцінювання та екстраполяції параметрів траєкторій ЛО матриці  $A$  і  $B$  визначаються з третьої форми умов інваріантності [1]:

$$A\bar{x}_n = 0, \quad B\bar{x}_n = 0;$$

$$A \neq 0, B \neq 0, \bar{x}_n \neq 0. \quad (14)$$

Для забезпечення виконання вказаних умов елементи матриць повинні вміщувати множник  $(1-z^{-1})$ .

Характеристична матриця замкненої системи  $C$  визначається шляхом прирівнювання правих частин співвідношень (9) та (10) до виразів (5) та (6):

$$H_{\Pi}g(n) - \bar{x}_n = C^{-1}VH_{\Pi}g(n); \quad (15)$$

$$H_{\Pi}g(n) - F\hat{x}_n = C^{-1}AH_{\Pi}g(n). \quad (16)$$

Розв'язуючи рівняння (15) та (16) щодо  $C$ , матимемо:

$$I - F = C^{-1}A - FC^{-1}B. \quad (17)$$

За виразом (17) розраховуються елементи характеристичної матриці  $C$ .

Матриця екстраполяції  $F$  визначається на підставі умов (14), при виконанні яких маємо:

$$[I - (I - A)]\bar{x}_n = 0.$$

Після перетворень отримаємо:

$$\hat{x}_n = (I - A)\bar{x}_n.$$

В наведеному рівнянні вираз в дужках відповідає матриці екстраполяції параметрів траєкторій, тобто

$$F = I - A, \quad (18)$$

тоді алгоритм екстраполяції координат набуде вигляду:

$$\hat{x}_e(n) = HF\hat{x}_n. \quad (19)$$

Викладена загальна методика синтезу інваріантних алгоритмів оцінювання параметрів траєкторій ЛО визначається такими положеннями.

1. Розрахунок матриць  $A$  і  $B$  з умов (14) для забезпечення інваріантності динамічних помилок оцінювання та екстраполяції параметрів траєкторій відносно вектора стану ЛО.

2. Визначення матриці екстраполяції  $F$  та елементів матриці  $C$  з рівнянь (17) та (18).

3. Синтез алгоритму оцінювання параметрів траєкторій ЛО за виразами (13) та (19).

Слід зазначити, що використання викладеної методики дещо ускладнюється через відсутність явного виразу для матриці  $C$  та встановлених правил розрахунку структури матриць  $A$  і  $B$ .

Покажемо, що при накладенні обмеження на структуру матриць отримані вирази набувають більш простішого вигляду.

### Частинна методика синтезу

Припускається, що матриці  $A$  і  $B$  мають діагональну структуру.

Тоді, з рівняння (17) характеристична матриця  $C$  визначатиметься за виразом:

$$C = (I - F)^{-1}(A - FB), \quad (20)$$

а співвідношення (13) для алгоритму оцінювання набуває вигляду:

$$A\hat{x}_n = (C - B)H_{\Pi}\tilde{u}(n). \quad (21)$$

Подавши матрицю  $H_{\Pi}$  у вигляді добутку:

$$H_{\Pi} = GD,$$

де  $G$  - діагональна матриця розмірністю  $k \times k$ , елементи якої визначаються за виразом:

$$g_{kk}(z) = (1 - z^{-1})^{k-1};$$

$D$  - матриця розмірністю  $k \times 1$ , елементи якої відповідають співвідношенню:

$$d_{k1} = \frac{1}{(k-1)!T^{k-1}};$$

де  $k$  - номер рядка,

та здійснивши виключення матриці  $G$  шляхом множення лівої та правої частин рівняння (21) на  $G^{-1}$ , після відповідних перетворень отримаємо такий вираз для алгоритму оцінювання:

$$A\hat{x}_n = (C - B)D\tilde{u}(n) \quad (22)$$

Для забезпечення виконання умов інваріантності (14) достатньо у виразі (22) елементи матриць  $A$  і  $B$  розраховувати за виразами:

$$a_{kk}(z) = (1 - z^{-1})^{v+1-k} (a_0 + a_1z^{-1} + \dots + a_mz^{-m}); \quad (23)$$

$$b_{kk}(z) = (1 - z^{-1})^{v+1-k} (b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_lz^{-l}), \quad (24)$$

де  $a_m, b_l$  - коефіцієнти згладжування;

$v$  - порядок астатизму.

Алгоритм екстраполяції координат в даному випадку також описується співвідношенням (19), однак, на відміну від отриманого виразу, екстрапольоване значення  $x_e(n)$  визначатиметься лише оцінками координат, що отримані у попередні моменти часу  $(n - j)$ .

Беручи до уваги те, що зв'язок між координатами та похідними координат описується таким виразом

$$\Delta^i x(n - j) = \dot{x}(n - j) \frac{T^i}{i!}, \quad (25)$$

де  $\Delta^i$  -  $i$ -та ліва різниця;

$T$  - темп надходження інформації;

розрахунок екстрапольованого значення координати реалізується шляхом застосування оцінок похідних координат. Ця процедура передбачає штучне введення зворотних зв'язків у згладжувальному фільтрі.

Частинна методика синтезу інваріантних алгоритмів оцінювання визначається такими положеннями:

1. Розрахунок елементів матриць  $A$  і  $B$  з умов (14) - за виразами (23) та (24).

2. Визначення матриці екстраполяції  $F$  та характеристичної матриці  $C$  з використанням рівнянь (18) та (20).

3. Синтез алгоритму оцінювання параметрів траєкторій ЛО за виразами (22) та (19).

4. Визначення алгоритму екстраполяції координати з використанням оцінок похідних шляхом застосування рівняння (25).

Наведеній методиці притаманні такі відмінні риси.

1. Синтез алгоритмів фільтрації здійснюється в операторній формі, що дозволяє визначати необхідну точність оцінювання на етапі проектування.

2. Розробка алгоритмів проводиться у векторно-матричному вигляді, що дає змогу синтезувати різноманітні алгоритми оцінювання параметрів, які не підлягають безпосередньому вимірюванню.

Слід зазначити, що зменшення динамічної помилки оцінювання запропонованим шляхом спричиняє збільшення стохастичної складової помилки оцінювання.

Тому для виконання обраного критерію якості коефіцієнти згладжування повинні відповідним чином розраховуватись, що в даній роботі не розглядається.

Порядок застосування викладеної методики розглядався у роботі [9], де був наведений приклад синтезу алгоритму оцінювання параметрів лінійної траєкторії.

В умовах апріорної невизначеності збурень у динаміці руху літального об'єкту шляхом модифікації структури матриць  $A$  і  $B$  за виразами (14), (23) та (24), відкривається можливість синтезу різноманітних алгоритмів фільтрації, яким притаманна властивість інваріантності відносно вектора стану літального об'єкту.

## Висновок

Таким чином, викладена методика дозволяє синтезувати інваріантні алгоритми оцінювання параметрів траєкторій літальних об'єктів, що дозволяє

використовувати їх при апріорній невизначеності умов функціонування систем обробки радіолокаційної інформації.

Інваріантність помилок оцінювання досягається шляхом відповідної обробки вимірювань, реалізованої у згладжувальному фільтрі.

## Список літератури

1. Зайцев Г.Ф. Комбинированные следящие системы / Г.Ф. Зайцев, В.К. Стеклов. – К.: Техника, 1978. – 263 с.
2. Кузьмин С.З. Цифровая радиолокация. Введение в теорию / С.З. Кузьмин. – К.: КВЦ, 2000. – 428 с.
3. Огарков М.А. Методы статистического оценивания параметров, случайных процессов / М.А. Огарков. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 208 с.
4. Первачёв С.В. Адаптивная фильтрация сообщений / С.В. Первачёв, А.И. Перов. – М.: Радио и связь, 1991. – 160 с.
5. Пушкарёв Ю.А. Анализ и синтез дискретных систем оценивания / Ю.А. Пушкарёв. – Житомир: ЖВУРЭ, 1989. – 326 с.
6. Фарина А. Цифровая обработка радиолокационной информации. Сопровождение целей / А. Фарина, Ф. Студер: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.
7. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т. Леондеса. Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 408 с.
8. Шульце К.П. Инженерный анализ адаптивных систем / К.П. Шульце, К.Ю. Реберг. Пер. с нем. – М.: Мир, 1992. – 280 с.
9. Пичугін М.Ф. Методика синтезу інваріантних алгоритмів оцінювання параметрів траєкторій літальних об'єктів / М.Ф. Пичугін, І.В. Зімчук, І.О. Канкін // Житомир : Вісник ЖДТУ. – 2004. – № 3 (30). – С. 76-80.

Надійшла до редколегії 25.02.2016

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Л.Ф. Купченко, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ТРАЕКТОРИЙ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ

М.Ф. Пичугин, Д.В. Карлов, А.О. Климишен, А.С. Воловодюк

*Изложена методика синтеза алгоритмов оценивания параметров траекторий летательных объектов при априорной неопределенности возмущений в динамике движения. Теоретическую основу методики составляют операторный метод и теория инвариантности.*

**Ключевые слова:** оценивание, траектории, инвариантность, фильтр.

## DECISION OF EVALUATION TASK OF FLYING OBJECTS TRAJECTORIES PARAMETERS ON BASIS OF INVARIANCE PRINCIPLE

M.F. Pichugin, D.V. Karlov, O.O. Klimishen, A.S. Volovodyuk

*The method of synthesis of algorithms of evaluation of parameters of trajectories of flying objects is expounded at a priori vagueness of indignations in the dynamics of motion. Theoretical basis of method is made by a statement method and theory of invariance.*

**Keywords:** evaluation, trajectories, invariance, filter.