УДК 004.312.26

А.А. Борисенко, Т.А. Протасова, О.В. Бережная, Б.К. Лопатченко

*Сумский государственный университет, Сумы*

## СИНТЕЗ СОЧЕТАНИЙ С ПОВТОРЕНИЯМИ НА ОСНОВЕ МНОГОЗНАЧНЫХ БИНОМИАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

*В работе предложен метод синтеза сочетаний с повторениями на основе позиционных биномиальных систем счисления с многозначным алфавитом, приведен алгоритм перехода от многозначных биномиальных чисел к сочетаниям с повторениями и рассмотрены соответствующие примеры.*

***Ключевые слова:*** *комбинаторные комбинации, многозначные биномиальные числа, сочетания с повторениями.*

### Введение и постановка задачи исследования

В настоящее время при решении задач целочисленной оптимизации, помехоустойчивого кодирования, сжатия, защиты и отображения информации широко используются методы, в которых применяются различные комбинаторные комбинации, такие, например, как сочетания, композиции, перестановки. Они же применяются и при построении различных цифровых устройств, в частности, решающих задачи помехоустойчивого и быстродействующего счета [1].

Существующие алгоритмы формирования таких комбинаций достаточно сложны и не являются универсальными. Они также сравнительно трудно реализуются в виде цифровых устройств. Поэтому был разработан универсальный метод построения таких комбинаций на основе позиционных комбинаторных помехоустойчивых систем счисления [2].

Каждая такая система счисления способна генерировать класс комбинаторных комбинаций определенного вида. Среди них особое внимание было уделено разработке биномиальных систем счисления с многозначным алфавитом [3]. Эти системы счисления позволяют генерировать различные комбинаторные комбинации и среди них сочетания с повторениями. Они используются при решении ряда математических задач и дают возможность эффективно генерировать равновесные коды, которые широко используются в задачах помехоустойчивой передачи, сжатия и защиты информации.

Разработка метода синтеза сочетаний с повторениями, который бы получал эти сочетания на основе многозначной биномиальной системы счисления, и составила задачу данной работы.

### Теоретические предпосылки

Сочетаниями с повторениями называются комбинации, составленные из p различных элементов по n, образующих одну группу, и поэтому некоторые из них могут повторяться [4]. Ими, например, будут 6 комбинаций из 3 элементов а, в, с по 2 - аа, ас, вс, ав, вв, сс. Также сочетаниями с повторениями будут комбинации, составленные из 5 элементов 1, 2, 3, 4, 5 по 5, например, 11233 и 13445. Комбинации 12133 и 12232 не являются сочетаниями с повторениями, так как 1 в первом сочетании и 2 во втором не образуют одну группу повторяющихся элементов, и поэтому они относятся к запрещенным комбинациям. Их появление во время передачи или хранения сочетаний с повторениями является признаком ошибочной комбинации.

Число сочетаний с повторениями определяется выражением $N = C_{p+n-1}^{p-1}$ [4], где p – число элементов, из которых строятся сочетания; n – число элементов в сочетании. В приведенном выше примере для элементов а, в, с $p = 3$, $n = 2$. Тогда $N = C_{3+2-1}^{3-1} = 6$, а для $p = n = 5$ $N = C_{5+5-1}^{5-1} = 126$.

Для практических применений важно также то, что для каждого сочетания с повторением можно построить комбинацию равновесного кода [4]. Для примера это будут такие комбинации – 1100, 1001, 0101, 1010, 0110, 0011. Это значит, что генератор сочетаний с повторениями может быть по определенному правилу преобразован в генератор равновесных кодов, что расширяет область практического приложений генератора сочетаний. Равновесные коды применяются как для помехоустойчивой передачи информации, так и для ее сжатия.

### Решение задачи

Можно по-разному решать задачу генерирования сочетаний с повторениями, но наиболее просто она решается с помощью многозначной биномиальной системы счисления, которая используется в качестве промежуточного первого шага в предлагаемом методе синтеза сочетаний с повторениями. В нем сначала генерируется многозначное биномиальное число, а затем от него происходит переход к сочетанию с повторениями.

Числовая функция, представляющая многозначную биномиальную систему счисления, имеет вид [3]:

$$F=\sum_{i=0}^{X_{r-1}-1} C_{m-i-1-X_{r-0}}^{k-1}+\sum_{i=0}^{X_{r-2}-1} C_{m-i-2-X_{r-0}-X_{r-1}}^{k-2}+\ldots+\sum_{i=0}^{X_{r-j}-1} C_{m-i-j-q_j}^{k-j}+\ldots+\sum_{i=0}^{X_0-1} C_{m-i-r-q_r}^{k-r}, \qquad (1)$$

где $q_j=\sum_{p=0}^{j-1} X_{r-p}$, $X_{r-j}$ – цифра (r-j)-го разряда, j = = 1, 2, ..., r.

Весовые значения разрядов многозначной биномиальной системы счисления задаются биномиальными коэффициентами $C_{m-i-j-q_j}^{k-j}$. Диапазон ее чисел $P=C_m^k$. В отличие от обычных чисел многозначные числа, получаемые в соответствии с (1), в общем случае имеют разную длину, то есть являются неравномерными. На их основе легко строятся равномерные многозначные биномиальные числа, которые являются основой для построения различных комбинаторных конфигураций и, в частности, сочетаний с повторениями. Примеры 3-х разрядных неравномерных и равномерных многозначных биномиальных чисел приведены ниже соответственно в табл. 1 и 2.

Таблица 1

Неравномерные многозначные биномиальные числа

| № п/п | Многозначные биномиальные числа | № п/п | Многозначные биномиальные числа |
|---|---|---|---|
| 0 | 000 | 10 | 100 |
| 1 | 001 | 11 | 101 |
| 2 | 002 | 12 | 102 |
| 3 | 003 | 13 | 110 |
| 4 | 010 | 14 | 111 |
| 5 | 011 | 15 | 120 |
| 6 | 012 | 16 | 200 |
| 7 | 020 | 17 | 201 |
| 8 | 021 | 18 | 21 |
| 9 | 03 | 19 | 3 |

Как видим из таблиц, каждое новое число в ней получается из предыдущего числа добавлением к цифре младшего разряда 1 до появления суммы цифр в числе равной 3. После этого происходит перенос единицы в соседний старший разряд, а младший разряд обнуляется. Если в результате этого действия сумма цифр в числе остается меньшей 3, то в младший разряд опять добавляются единицы. Если же сумма цифр после переноса единицы в старший разряд и обнуления младшего разряда становится равной 3, то младший разряд отбрасывается, а само число становится на один разряд меньшим. Дальше аналогично идет добавление единиц уже в следующий старший разряд, пока не останется лишь одна цифра в старшем разряде 3 (см. табл. 1).

Таблица 2

Равномерные многозначные биномиальные числа

| № п/п | Многозначные биномиальные числа | № п/п | Многозначные биномиальные числа |
|---|---|---|---|
| 0 | 000 | 10 | 100 |
| 1 | 001 | 11 | 101 |
| 2 | 002 | 12 | 102 |
| 3 | 003 | 13 | 110 |
| 4 | 010 | 14 | 111 |
| 5 | 011 | 15 | 120 |
| 6 | 012 | 16 | 200 |
| 7 | 020 | 17 | 201 |
| 8 | 021 | 18 | 210 |
| 9 | 030 | 19 | 300 |

На этом перебор многозначных биномиальных чисел заканчивается. В результате часть чисел будет иметь длину k, меньшую 3. По этой причине многозначные биномиальные числа в общем случае будут неравномерными.

Если же лишние разряды в многозначных биномиальных числах не отбрасывается, а обнуляются, то в результате будут получены равномерные многозначные биномиальные числа (см. табл. 2).

Непосредственно многозначные биномиальные числа характеризуются следующими свойствами [3]:

а) максимальным числом разрядов, равным k;

б) количеством r = 1, 2, …, k информационных разрядов, которое для каждого биномиального числа в общем случае является своим;

в) алфавитом, содержащим с учетом нуля m - k цифр, где m - параметр системы счисления, влияющий на ее диапазон;

г) весами разрядов, зависящими как от их местоположения в числе, так и от стоящей в нем цифры и предшествующих ей цифр;

д) контрольным числом q = m - k, превышение которого в биномиальном числе свидетельствует о появлении в нем ошибки.

Для многозначных биномиальных чисел, приведенных в табл. 1 и 2 $k = 3$.

Число r информационных разрядов для большинства чисел в табл. 1 равно 3 и лишь для чисел с номерами 9, 18 и 19 меньше 3, и равно соответственно 2, 2, 1. Параметр $m = 6$, так как только в таком случае число сочетаний 3 из 6 будет равно диапазону многозначных биномиальных чисел равному 20. Алфавит цифр с учетом нуля будет равен $q = m - k = 6 - 3 = 3$. Это же число $q = 3$ является и контрольным числом. Его превышение в многозначном биномиальном числе является признаком ошибки. Например, числа 201 и 031 не являются многозначными биномиальными числами для заданных параметров, а значит, относятся к ошибочным. Соответственно диапазон многозначных биномиальных чисел, приведенных в табл. 1, с параметрами $k = 3$, $q = 3$, $m = k + q = 6$,

$$P = C_m^k = = C_6^3 = 20\,.$$

## Синтез сочетаний с повторениями на основе многозначных биномиальных чисел

Предлагаемый метод формирования сочетаний с повторениями, как уже указывалось выше, состоит из двух шагов:

1. Получение многозначного биномиального числа.

2. Выполнения перехода к соответствующему сочетанию с повторениями.

При реализации метода возникает вопрос, каким образом осуществляется переход от многозначного биномиального числа к сочетаниям с повторениями. Для этого для параметров в формуле сочетаний с повторениями – $N = C_{p+n-1}^{p-1}$ необходимо установить соответствие с параметрами в формуле, определяющей диапазон биномиальных чисел – $P = C_m^k$. Очевидно, что для этого необходимо установить лишь равенства $k = p - 1$ и $m = p + n - 1$. Эти равенства позволяют установить однозначное соответствие между биномиальными числами и сочетаниями с повторениями (см. табл. 3). Например, если задано $p = 4$, $n = 3$, то тогда $k = p - 1 = 4 - 1 = 3$, а $m = p + n - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$. Соответственно число сочетаний по 3 из 6 будет равно 20.

Тогда, преобразуя по определенному правилу упорядоченные многозначные биномиальные числа, можно получить сочетания с повторениями. То, что такое правило обязательно существует, следует из особенностей многозначных биномиальных систем счисления, которые являются структурами любых комбинаторных конфигураций, диапазон которых определяется биномиальными коэффициентами. Поэтому можно быть уверенным, что существует регулярный алгоритм, позволяющий установить однозначное соответствие между многозначным числом и сочетанием с повторениями. Табл. 3 это однозначно демонстрирует.

Алгоритм перехода от многозначного биномиального числа к соответствующему сочетанию с повторением цифр имеет следующий вид:

Таблица 3

Формирование сочетаний с повторениями

| № п/п | Бином. числа | Сочет. с повт. | № п/п | Бином. числа | Сочет. с повт. |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 000 | 000 | 10 | 100 | 111 |
| 1 | 001 | 001 | 11 | 101 | 112 |
| 2 | 002 | 002 | 12 | 102 | 113 |
| 3 | 003 | 003 | 13 | 110 | 122 |
| 4 | 010 | 011 | 14 | 111 | 123 |
| 5 | 011 | 012 | 15 | 120 | 133 |
| 6 | 012 | 013 | 16 | 200 | 222 |
| 7 | 020 | 022 | 17 | 201 | 223 |
| 8 | 021 | 023 | 18 | 210 | 233 |
| 9 | 030 | 033 | 19 | 300 | 333 |

1. Первая цифра сочетания с повторением равна старшей цифре биномиального числа.

2. Следующая цифра сочетания с повторением равна сумме значения соответствующего разряда биномиального числа и значения предыдущего разряда сочетания с повторениями.

3. Если пункт 2 использовать многократно до тех пор, пока не будет получена последняя k-я цифра, то в результате будет получено сочетание с повторением.

Более детально предлагаемый алгоритм получения сочетаний с повторениями представлен в виде блок- схемы на рис. 1. Он рассчитан также на аппаратурную реализацию, которая дает повышенное быстродействие преобразования.

**Пример.** Биномиальное число 1013 преобразовать в сочетание с повторением.

**Решение:** $\beta_1 = \alpha_1 + \beta_0 = 1 + 0 = 1;$

$$\beta_2 = \alpha_2 + \beta_1 = 0 + 1 = 1;$$

$$\beta_3 = \alpha_3 + \beta_2 = 1 + 1 = 2;$$

$$\beta_4 = \alpha_4 + \beta_3 = 3 + 2 = 5.$$

В результате получено сочетание с повторением цифр – 1125. Таким же образом построены сочетания с повторениями в табл. 1.

## Выводы

Таким образом, в данной работе предложен эффективный метод синтеза сочетаний с повторениями на основе позиционных многозначных биномиальных систем счисления.

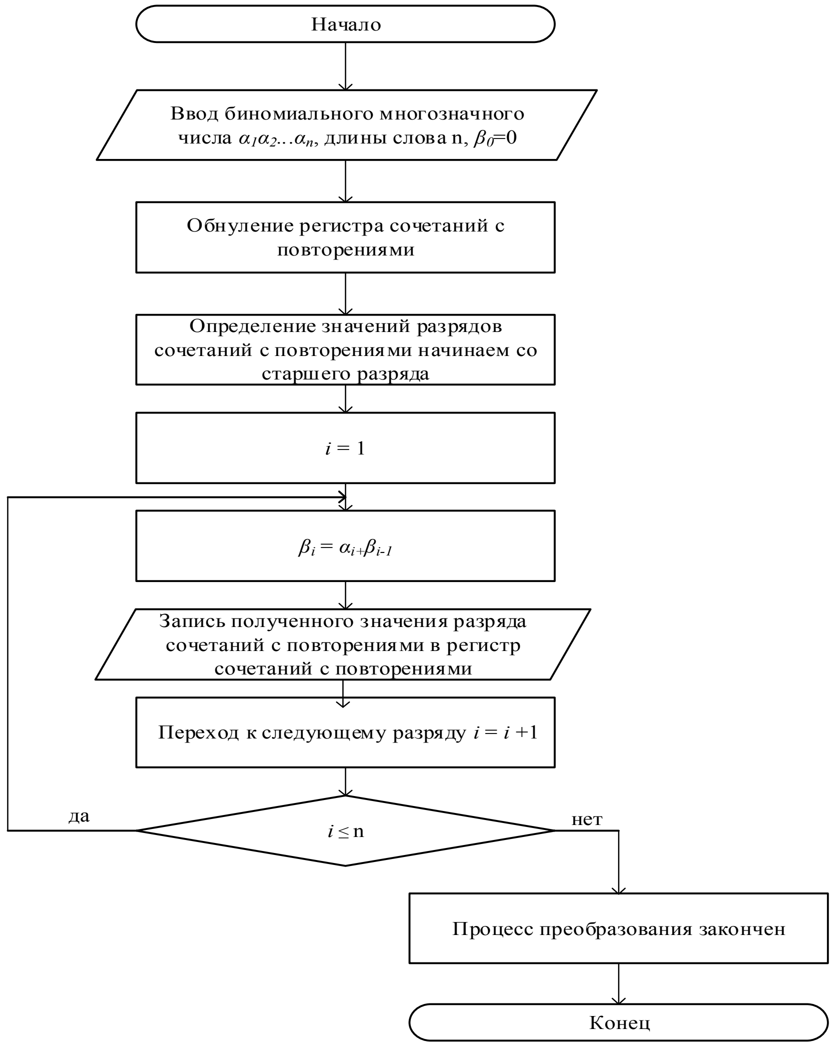


Рис. 1. Блок-схема алгоритма формирования сочетаний с повторениями

Синтез сочетаний с повторениями состоит из двух шагов, на первом из которых происходит генерирование многозначного биномиального числа, а на втором осуществляется переход от этого числа к сочетанию с повторением.

## Список литературы

1. *А.с. СССР, №1187262. Борисенко А.А., Володченко Г.С., Кузнецов В.Н., Онанченко Е.Л. Счетчик импульсов, 1984.*
2. *Борисенко О.А. Дискретна математика: Підручник / О.А. Борисенко. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2007. – 255 с.*
3. *Борисенко А.А. Системы счисления с биномиальным основанием / А.А. Борисенко, Е.Л. Онанченко, А.Н. Кобяков // Вестник СумГУ. – 1994. – № 1. – С. 96-101.*
4. *Ежов И.И. Элементы комбинаторики / И.И. Ежов, А.В. Скороход, М.И. Ядренок. – М.: Наука, 1977. – 79 с.*

*Надійшла до редколегії 15.03.2016*

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. А.С. Опанасюк, Сумский государственный университет, Сумы.

### СИНТЕЗ СПОЛУЧЕНЬ З ПОВТОРЕННЯМ НА ОСНОВІ БАГАТОЗНАЧНИХ БІНОМІАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

О.А. Борисенко, Т.О. Протасова, О.В. Бережна, Б.К. Лопатченко

*У роботі запропоновано метод синтезу сполучень з повтореннями на основі позиційних біноміальних систем числення з багатозначним алфавітом, приведено алгоритм переходу від багатозначних біноміальних чисел до сполучень з повтореннями, розглянуто відповідні приклади.*

***Ключові слова:*** *комбінаторні комбінації, багатозначні біноміальні числа, сполучення з повтореннями.*

### SYNTHESIS OF COMBINATION WITH REPETITIONS BASED ON BINOMIAL VALUED NUMBER

A.A. Borisenko, T.A. Protasova, O.V. Berezhna, B.K. Lopatchenko

*In this paper, we propose an algorithm for constructing combination with repetitions based on the binomial number system with a multi-valued alphabet, a proof of the binomial transition function of a combination with repetitions.*

***Keywords:*** *combinatorial configurations, valued binomial codes, combination with repetitions.*