

УДК 621.317.44

Раки Альравашдех

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

## РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ВНЕШНЕГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЙ ЕГО ПАРАМЕТРОВ, КОНФИГУРАЦИИ И КООРДИНАТ ИСТОЧНИКА

*В результате исследования предложена модель внешнего магнитного поля источника. Данная модель является основой для разработки методов измерения и измерительных систем, предназначенных для измерения параметров, пространственной конфигурации магнитного поля источника и его координат. Данная модель дает возможность описывать параметры поля в удобной системе координат (сферической, декартовой, цилиндрической), обеспечивает взаимосвязь параметров поля (напряженность, индукция, магнитный момент, потенциал), учитывает геометрические свойства источника, обеспечивает возможность расчета параметров поля в любой точке пространства.*

**Ключевые слова:** внешнее магнитное поля, напряженность магнитного поля, магнитный момент, модель, сферическая гармоника.

### Введение

**Постановка проблемы.** Решение большого круга научно-практических задач непосредственно связано с использованием измеренных значений таких магнитных величин, как напряженность магнитного поля, магнитный поток и магнитный момент. Измерение указанных величин осуществляется с помощью соответствующих методов и средств измерения, и, безусловно, имеет в своей основе соответствующее метрологическое обеспечение для средств измерения указанных физических величин.

К основным параметрам внешних магнитных полей (ВМП), играющим основную роль при решении указанных задач в первую очередь относят напряженность магнитного поля, создаваемую исследуемым объектом в области внешнего пространства, и магнитные моменты объекта, нормируемые для электрооборудования и материалов [1 – 3].

Электрооборудование и технические объекты, имеющие в своём составе различного рода технические средства, рассматриваются как источники внешних магнитных полей, формирующие электромагнитную обстановку в области окружающего пространства и оказывающие нежелательное воздействие на функционирование других объектов, чувствительных к влиянию магнитных полей.

Кроме того, в ряде случаев магнитные поля оказываются определяющим фактором при решении вопросов, связанных с жизнеобеспечением персонала, что также требует проведения соответствующих измерений.

В связи с этим создание новых методов и средств измерений для обеспечения соответствующих измерений в целом направлено на решение актуальной проблемы – оценивание электромагнитной обстановки, формируемой работающим электрообо-

рудованием, что является неотъемлемым этапом решения проблемы электромагнитной совместимости силового и магниточувствительного оборудования, задачи экологического мониторинга и др.

Эти задачи в первую очередь обуславливают необходимость разработки, выбора, обоснования модели внешнего магнитного поля и модели измерения магнитных параметров в целом. При этом модель должна обладать следующими свойствами:

– обеспечивать возможность расчета параметров поля в любой точке пространства;

– обеспечивать взаимосвязь параметров поля (напряженность, потенциал, индукция и др.), учитывать геометрические свойства, габаритные размеры источника;

– давать возможность описывать параметры поля в удобной системе координат (сферической, декартовой, цилиндрической), в которой параметры можно представить в наиболее простом виде.

**Анализ последних достижений и публикаций.** Для описания внешнего магнитного поля существует так называемый классический метод представления, основанный на теории магнитного диполя, описывающий напряженность магнитного поля источника через параметры его эксцентричного эквивалентного магнитного диполя, произвольно ориентированного в пространстве, компоненты результирующего дипольного магнитного момента источника поля, координаты эксцентричности магнитного диполя относительно начала принятой системы координат.

Для источника магнитного поля типа "черный ящик" эти параметры являются неизвестными величинами и по этой причине определить классическим методом полное значение напряженности магнитного поля такого источника в заданных точках внешнего пространства весьма проблематично [4, 5].

**Цель исследования:** усовершенствование метрологического обеспечения единства измерений параметров внешнего магнитного поля источника.

Задачи исследования:

1. Уточнить аналитическое представление внешнего магнитного поля источника.
2. Предложить модель внешнего магнитного поля, которая учитывает геометрические свойства источника поля, позволяет описывать параметры поля в удобной системе координат, обеспечивает взаимосвязь параметров поля, позволяет рассчитать поле в любой точке пространства.
3. Получить выражения, связывающие параметры внешнего магнитного поля и являющиеся основой для разработки методов измерений параметров внешнего магнитного поля.

## Результаты исследования

Для решения подобных задач в качестве модели источника поля используется модель эксцентричного наклонного магнитного диполя, полный магнитный потенциал которого источника описывается выражением (1):

$$U = \frac{\bar{M}\bar{r}}{4\pi r^3}, \quad (1)$$

где  $\bar{M}$  – магнитный момент источника ВМП;  
 $r$  – расстояние до точки наблюдения.

При измерении магнитных полей, создаваемых источниками в области внешнего пространства, т.е. на некотором удалении от источника поля, задача может быть сформулирована как анализ магнитного поля в конечной части пространства свободного и от источников и от вихрей. Для такого поля справедливы уравнения Максвелла (2,3):

$$\text{rot } \bar{H} = 0, \quad (2)$$

$$\text{div } \bar{B} = 0. \quad (3)$$

Т.е. невихревое или потенциальное магнитное поле, может быть описано с помощью магнитного потенциала – скалярной величины. В этом случае из уравнения (2) получим выражение (4):

$$\bar{H} = -\text{grad } U, \quad (4)$$

где  $U$  – потенциальный вектор, а вектор напряженности магнитного поля определяется как вектор, равный по величине и направленный противоположно градиенту потенциала. Подставляя это решение в выражение (3) получим выражение для определения магнитного потенциала  $U$ :

$$\text{div grad } U = \Delta U = 0.$$

Выражение (1) раскладываем в ряд по сферическим функциям и после соответствующих преобразований представляем рядом (5) в виде суммы про-

странственных гармоник:

$$U = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{R}\right)^{n+1} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^n (g_{nm} \cos m\varphi + h_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \quad (5)$$

где  $R, \varphi, \theta$  – сферические координаты;

$g_{nm}, h_{nm}$  – постоянные коэффициенты ряда, равные мультипольным магнитным моментам;

$P_n^m(\cos \theta)$  – присоединённые функции Лежандра;

$n$  – порядковый номер сферической гармоники или мультиполя;

$m$  – порядковый номер элементарного мультиполя  $n$ -го порядка.

Полученный ряд соответствует положениям мультипольной теории ВМП, предложенной К. Гауссом [6].

Присоединённые функции Лежандра при  $m = 0$  равны полиномам Лежандра, которые в общем виде могут быть описаны выражением (6):

$$P_n(x) = \sum_r (-1)^r \frac{(2n-2r)!}{2^n r!(n-r)!(n-2r)!} x^{n-2r}, \quad (6)$$

где  $x = \cos \theta$ , при этом суммирование должно производиться от нуля до  $n/2$ , если  $n$  – чётное число, и от нуля до  $(n-1)/2$ , если  $n$  – нечётное число.

Выражение (1) описывается в декартовой системе координат уравнением (7):

$$U = \frac{M_x(x-x_0) + M_y(y-y_0) + M_z(z-z_0)}{4\pi \left[ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \right]^{3/2}}, \quad (7)$$

где  $x_0 = R_0 \cos \varphi_0 \sin \theta_0$ ,

$$y_0 = R_0 \sin \varphi_0 \sin \theta_0, \quad z_0 = R_0 \cos \theta_0,$$

$$x = R \cos \varphi \sin \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \theta.$$

Также полиномы Лежандра могут быть получены разложением в ряд функции (8):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}}, \quad (8)$$

где  $x = \cos \varphi$ ;  $u = \frac{R_0}{R}$ .

Для переменной  $u$  запишем выражение (9):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xu+u^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) u^n. \quad (9)$$

Общее решение уравнений Лапласа, где  $U$  зависит от всех трёх координат, можно представить уравнением в сферических координатах (10):

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (10)$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка, и задача состоит в решении уравнения Лапласа, справедливого для области, ограниченной некоторой поверхностью, для которой заданы значения составляющих  $\vec{H}$  (4).

Уравнение (10) решается путём разделения переменных и ищется в виде:

$$U = F(r) \cdot F(\varphi, \theta).$$

Все решения уравнения Лапласа называются гармоническими функциями. Общее решение уравнения Лапласа в сферических координатах, которое может быть представлено функцией:

$$U_n(r, \varphi, \theta) = \left( Ar^n + \frac{B}{r^n} \right) \times \sum_{k=0}^n (C_k \cos k\varphi + D_k \sin k\varphi) P_n^k(\cos \theta), \quad (11)$$

называют сферической гармонической функцией или пространственной сферической функцией (или гармоникой)  $n$  – го порядка.

Функция вида (12):

$$F_n(\varphi, \theta) = \sum_{k=0}^n (C_k \cos k\varphi + D_k \sin k\varphi) P_n^k(\cos \theta) \quad (12)$$

называется поверхностной сферической функцией (или гармоникой)  $n$ -го порядка.

Функции вида  $P_n^k(\cos \theta)$  представляет собой присоединённые функции Лежандра (или присоединённые сферические функции Лежандра), совпадающие при  $k = 0$  с функциями Лежандра.

Функции вида

$$\cos k\varphi \cdot P_n^k(\cos \theta), \sin k\varphi \cdot P_n^k(\cos \theta) \quad (13)$$

представляют собой частный вид сферических поверхностных функций, называемых мозаичными или тессеральными.

Отметим, что любая поверхностная сферическая функция  $n$ -го порядка может быть выражена конечной суммой функций вида (13).

Общее решение уравнений Лапласа в сферических координатах представляется функцией (14):

$$U_n(r, \varphi, \theta) = \left( Ar^n + \frac{B}{r^{n+1}} \right) \times \sum_{k=0}^n (C_k \cos k\varphi + D_k \sin k\varphi) P_n^k(\cos \theta). \quad (14)$$

Составляющие напряжённости поля в сферической системе координат находятся дифференцированием потенциала (11) по соответствующей координате:

$$H_R = -\frac{\partial U}{\partial R} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{R^{n+2}} \times \sum_{m=0}^n (g_{nm} \cos m\varphi + h_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta), \quad (15)$$

$$H_\varphi = -\frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{R} \right)^{n+2} \times \sum_{m=0}^n (g_{nm} \sin m\varphi - h_{nm} \cos m\varphi) \frac{m P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad (16)$$

$$H_\theta = -\frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{R} \right)^{n+2} \times \sum_{m=0}^n (g_{nm} \cos m\varphi + h_{nm} \sin m\varphi) \frac{\partial P_n^m(\cos \theta)}{\partial \theta}. \quad (17)$$

Основной вклад в результирующее ВМП на значительном от источника расстоянии вносит мультиполь первого порядка ряда – дипольная составляющая поля, напряжённость которой убывает с расстоянием пропорционально  $R^{-3}$ . Таким образом, магнитное поле источника на значительных расстояниях по сравнению с его габаритными размерами имеет дипольный характер.

Поэтому при контроле внешнего магнитного поля в первую очередь важно знать магнитные параметры дипольного поля и, в конечном счёте, значения напряжённости дипольной составляющей магнитного поля в различных областях внешнего пространства.

Компоненты напряженности первой пространственной гармоники ВМП для заданной точки внешнего пространства равны:

$$H_{R1} = \frac{1}{4\pi R^3} [g_{10} \cos \theta + (g_{11} \cos \varphi + h_{11} \sin \varphi) \sin \theta];$$

$$H_{\varphi 1} = \frac{1}{4\pi R^3} (g_{11} \sin \varphi - h_{11} \cos \varphi); \quad (18)$$

$$H_{\theta 1} = \frac{1}{4\pi R^3} [g_{10} \sin \theta - (g_{11} \cos \varphi + h_{11} \sin \varphi) \cos \theta].$$

Коэффициенты  $g_{10}$ ,  $g_{11}$ ,  $h_{11}$  мультиполя первого порядка равны компонентам дипольного магнитного момента:

$$g_{10} = M_z, \quad g_{11} = M_x, \quad h_{11} = M_y.$$

Таким образом, по известным значениям компонент  $M_x, M_y, M_z$  могут быть определены напряжённость магнитного поля объекта в заданных точках окружающего пространства, а также картина распределения компонент напряжённости дипольной составляющей поля, что значительно уменьшает объёмы компонентных измерений составляющих напряжённости в точках внешнего пространства.

Предложенная модель внешнего магнитного поля источника, представленная выражениями (1-18), позволяет разработать и применить точечные методы измерения дипольных магнитных моментов, основанные на измерении поля объекта в определённых точках окружающего пространства – группе контрольных точек. Координаты точек наблюдения определяются по результатам анализа компонент напряжённости дипольного поля (15-17). По результатам измерения определяются необходимые параметры внешнего магнитного поля объекта в заданных областях внешнего пространства.

### Выводы

1. Получены выражения, связывающие параметры внешнего магнитного поля и являющиеся основой для разработки методов измерений параметров внешнего магнитного поля.

2. Предложенная модель представления внешнего магнитного поля источника обеспечивает возможность расчета параметров поля в любой точке пространства; обеспечивает взаимосвязь параметров поля, учитывает геометрические свойства, габаритные размеры источника; дает возможность описывать параметры поля в удобной системе координат (сферической, декартовой, цилиндрической).

3. Предложенная модель внешнего магнитного поля источника является основой для создания

измерительных систем с так называемым точечным расположением датчиков, предназначенных для косвенного измерения величин компонент дипольных магнитных моментов, а также магнитных моментов  $n$ -го порядка.

4. Полученные результаты могут быть использованы при разработке методов и средств измерения параметров, пространственной конфигурации магнитного поля источника, его координат, что необходимо для решения ряда научно-практических задач.

### Список литературы

1. ДСТУ 2465-94. Сумісність технічних засобів електромагнітна. Стійкість до магнітних полів частоти мережі. Технічні вимоги і методи випробувань [Текст]. – Чинний від 1995-01-01. – К. : УкрНДССІ, 1994. – 62 с.
2. IEC 60404-14 Ed. 1.0 b: 2002. Part 14 Methods of measurement of the magnetic dipole moment of a ferromagnetic material specimen by the withdrawal or rotation method [Text]. – P. 17.
3. ГОСТ Р 50010-92. Совместимость технических средств электромагнитная. Электрооборудование силовое. Нормы параметров низкочастотного периодического магнитного поля [Текст]. – Введ. 01-07-1993. – М. : Изд-во стандартов, 1993. – 5 с.
4. Дегтярев В.В. Анализ пространственной структуры магнитного поля [Текст] / В.В. Дегтярев, С.В. Рудь, О.В. Шептур // Авиакосмические технологии и оборудование : материалы Междунар. науч.-практ. конф. – Казань, 2006. – С. 170–171.
5. Buschow K.J.H. Physics of Magnetism and Magnetic Materials [Text] / K.J.H. Buschow, F.R. de Boer. – 2004. – P. 182.
6. Яновский Б.М. Земной магнетизм [Текст] / Б.М. Яновский. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 592 с.

Поступила в редколлегию 28.04.2016

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. И.П. Захаров, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков.

### РОЗРОБКА МОДЕЛІ ЗОВНІШНЬОГО МАГНІТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ВИМІРЮВАНЬ ЙОГО ПАРАМЕТРІВ, КОНФІГУРАЦІЇ І КООРДИНАТ ДЖЕРЕЛА

Рагі Альравашдех

В результаті дослідження запропонована модель зовнішнього магнітного поля джерела. Дана модель є основою для розробки методів вимірювання і вимірювальних систем, призначених для вимірювання параметрів, просторової конфігурації магнітного поля джерела і його координат. Дана модель дає можливість описувати параметри поля в зручній системі координат (сферичній, декартовій, циліндричній), забезпечує взаємозв'язок параметрів поля (напруженість, індукція, магнітний момент, потенціал), враховує геометричні властивості джерела, забезпечує можливість розрахунку параметрів поля в будь-якій точці простору.

**Ключові слова:** зовнішнє магнітне поле, напруженість магнітного поля, магнітний момент, модель, сферична гармоніка.

### DEVELOPMENT MODEL EXTERNAL MAGNETIC FIELD TO MEASURE ITS PARAMETERS, CONFIGURATION, AND COORDINATES OF THE SOURCE

Raqi Alrawashdeh

The study proposed a model of the external magnetic field source. This model is the basis for the development of measurement methods and measuring systems for measuring the parameters of the spatial configuration of the magnetic field source and its origin. This model makes it possible to describe the field parameters in a convenient coordinate system (spherical, Cartesian, cylindrical), provides a link field (voltage, induction, magnetic moment, potential), takes into account the geometrical properties of the source, allows the calculation of the parameters of the field at any point in space.

**Keywords:** an external magnetic field, the magnetic field, the magnetic moment, the model, the spherical harmonic.