УДК 006.91

О.А. Боцюра, И.П. Захаров

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОХВАТА ПРИ РЕАЛИЗАЦИИ БАЙЕСОВСКОГО ПОДХОДА К ОЦЕНИВАНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Проводится сравнение различных способов вычисления коэффициентов охвата при байесовском подходе к оцениванию неопределенности измерений. В качестве референтных оценок выступают оценки, полученные методом Монте-Карло.

Ключевые слова: *неопределенность измерений, коэффициент охвата, байесовский подход.*

Введение

В настоящее время Рабочая группа WG-1 объединенного комитета по руководствам в метрологии (JCGM) решает задачу ревизии Руководства по выражению неопределенности измерений (GUM) [1]. В основу обновленного Руководства (NewGUM) будет положен байесовский подход к оцениванию неопределенности измерений [2]. Первый проект NewGUM был распространен к концу 2014 года среди Организаций-членов JCGM, национальных метрологических институтов и других получателей, от которых поступило более 1000 комментариев и отзывов, в основном негативных. Одной из основных претензий к первой версии NewGUM был предложенный в нем способ вычисления коэффициентов охвата, который не зависит от действительного закона распределения измеряемой величины и приводит к чрезмерно завышенным оценкам расширенной неопределенности.

В работе [3] на основе байесовского вывода получены точные оценки коэффициента охвата для случая, когда доминирующими являются два источника неопределенности: первый связан с характеристиками точности используемого средства измерений (СИ), взятыми из сертификата калибровки (оценивание по типу *B*), второй обусловлен разбросом показаний СИ (оценивание по типу *A*). Этот случай наиболее полно соответствует прямым многократным измерениям. Результаты, полученные в работе [3] представлены в графическом виде, что затрудняет их использование на практике при автоматизации оценивания неопределенности измерений.

В работе [3] было проведено сопоставление полученных оценок расширенной неопределенности с доверительными границами погрешности, вычисляемыми по формулам [4]. Сравнение показало, что отличие в этих оценках может составлять более 10 %. Поэтому актуальным является поиск формулы для коэффициента охвата, наиболее точно аппроксимирующей результаты, полученные в работе [3]. С этой целью в статье будут проанализированы различные способы вычисления коэффициентов охвата.

1. Основные положения первой версии NewGUM

По сравнению с [1], новая версия отличается двумя основными моментами:

- стандартные неопределенности измерения типа *A* входных величин находят по формуле:

$$u_A(x) = \alpha \frac{s}{\sqrt{n}}, \qquad (1)$$

где n – количество повторных измерений; s – среднее квадратическое отклонение (СКО) результатов повторных измерений,

$$s = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}; \qquad (2)$$

α – СКО немасштабированного распределения Стьюдента,

$$\alpha = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}; \qquad (3)$$

- входные величины не характеризуют более числами степеней свободы и поэтому коэффициент охвата k при расчете расширенной неопределенности рекомендуют находить исходя из следующих выражений:

– для произвольного несимметричного закона распределения – из неравенства Чебышева:

$$k = 1/\sqrt{1-p}; \qquad (4)$$

где p – доверительная вероятность;

– для произвольного симметричного закона распределения – из неравенства Гаусса:

$$k = 2/3\sqrt{1-p}. \qquad (5)$$

Рассматриваемой в статье [3] ситуации соответствует выражение (5), которое для p=0,95 дает коэффициент охвата k_{NewGUM} =2,98 вне зависимости от числа проведенных повторных измерений и закона распределения вклада типа *B*.

Это значение отличается от значений, полученных в работе [3] на 49-65 % при нормальном распределении вклада типа *B*, и на 49-81 % при его равномерном распределении.

2. Коэффициент охвата, полученный методом Монте-Карло

Реализация метода Монте-Карло для нахождения коэффициента охвата осуществлялась в соответствии со следующим алгоритмом [5, 6]:

а) производилось генерирование случайного числа X_i, подчиняющегося несмещенному и немасштабированному распределению Стьюдента с заданным числом степеней свободы $\nu = n - 1$;

б) производилось генерирование случайного числа Y_i, подчиняющегося нормальному (равномерному) закону распределения, имеющему нулевое математическое ожидание и заданное СКО γ;

в) производилось суммирование чисел, полученных в пп. а) и б) для получения числа $Z_i = X_i + Y_i$;

г) операции а)…в) повторяли $M = 2 \cdot 10^6$ раз;

д) полученный массив чисел Z_i (i=1…M) ранжировали по возрастанию и определяли оценку расширенной неопределенности по формуле:

$$U = \frac{Z_{0{,}975 \cdot M} - Z_{0{,}025 \cdot M}}{2};$$

е) операции, перечисленные в пп. а)…д), повторяли 10 раз и вычисляли среднее значение $\bar{U}$ и относительное СКО:

$$\tilde{S}(U_i) = \frac{100\,\%}{\bar{U}} \sqrt{\frac{1}{9} \sum_{i=1}^{10} (U_i - \bar{U})^2};$$

ж) по полученному значению $\bar{U}$ вычисляли коэффициент охвата по формуле:

$$k_{MMK} = \frac{\bar{U}}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}}. \qquad (6)$$

Результаты, полученные методом Монте-Карло, приведены в табл. 1,2. Относительные СКО оценок k_{MMK} не превышают 0,2 %.

Таблица 1

Значения k_{MMK} для нормального закона распределения вклада типа *B*

γ	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 11
0	1,837	1,963	1,991	1,998	1,992
0,5	1,833	1,950	1,977	1,982	1,983
1	1,841	1,940	1,962	1,969	1,970
2	1,895	1,952	1,961	1,962	1,963
3	1,930	1,957	1,961	1,962	1,960
4	1,945	1,959	1,960	1,961	1,960
5	1,950	1,960	1,960	1,961	1,960
6	1,955	1,960	1,960	1,960	1,960
7	1,957	1,960	1,960	1,960	1,960
8	1,959	1,960	1,960	1,960	1,960

Таблица 2

Значения k_{MMK} для равномерного закона распределения вклада типа *B*

γ	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 11
0	1,837	1,964	1,991	1,997	1,993
1	1,813	1,905	1,922	1,928	1,927
2	1,767	1,815	1,820	1,821	1,818
3	1,727	1,752	1,755	1,754	1,751
4	1,702	1,716	1,717	1,716	1,713
5	1,685	1,694	1,694	1,693	1,690
6	1,674	1,680	1,679	1,679	1,676
7	1,666	1,670	1,669	1,668	1,667
8	1,661	1,663	1,663	1,662	1,660
9	1,657	1,659	1,658	1,658	1,656
10	1,654	1,656	1,655	1,654	1,653
11	1,652	1,653	1,652	1,652	1,651
12	1,651	1,651	1,650	1,650	1,649

Полученные значения k_{MMK} полностью совпали с результатами работы [3], полученными на основе байесовского вывода, поэтому они могут быть использованы в качестве референтных значений при оценке погрешностей рассматриваемых ниже формул.

3. Коэффициент охвата, полученный из действующей версии GUM

В действующей версии GUM при наличии вкладов неопределенности типа *A* коэффициент охвата рассчитывается по формуле:

$$k = t_{0{,}95}(\nu_{eff}),$$

где $t_{0{,}95}(\nu_{eff})$ – коэффициент Стьюдента для вероятности 0,95 и эффективного числа степеней свободы, определяемого по формуле Велча-Саттерсвейта:

$$\nu_{eff} = u^4(y) \Big/ \sum_{j=1}^{m} u_j^4(y) \big/ \nu_j. \qquad (7)$$

Здесь $u(y)$ – стандартная неопределенность измеряемой величины; $u_j(y)$ – вклад неопределенности j-й входной величины; ν_j – число степеней свободы, соответствующее j-му вкладу.

Для описанной в [3] ситуации (прямые многократные измерения) эффективное число степеней свободы будет равно

$$\nu_{eff} = (n-1)\left[1 + \gamma^2\right]^2, \qquad (8)$$

где $\gamma = \sqrt{n} \cdot u_B(y) / s$

Значения коэффициента охвата k_{GUM}, который можно было бы использовать для нахождения расширенной неопределенности в байесовском подходе, вычислялись по формуле

$$k_{GUM} = t_{0{,}95}(\nu_{eff}) \sqrt{\left(1 + \gamma^2\right) \Big/ \left(\alpha^2 + \gamma^2\right)} \qquad (9)$$

и приведены в табл. 3 для разных n и γ.

Таблица 3

Значения k_{GUM}

γ	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 11
0	1,837	1,963	1,991	1,998	1,993
0,5	1,722	1,824	1,910	1,912	1,946
1	1,541	1,731	1,806	1,846	1,905
2	1,684	1,811	1,859	1,884	1,922
3	1,796	1,874	1,902	1,917	1,938
4	1,857	1,907	1,924	1,933	1,947
5	1,890	1,924	1,936	1,942	1,951
6	1,910	1,934	1,943	1,947	1,954
7	1,922	1,941	1,947	1,950	1,955
8	1,931	1,945	1,950	1,953	1,956
9	1,937	1,948	1,952	1,954	1,957
10	1,941	1,950	1,954	1,955	1,958
11	1,944	1,952	1,955	1,956	1,958
12	1,947	1,953	1,955	1,957	1,958

Значения k_{GUM}, приведенные в табл. 3, не зависят от закона распределения вклада, оцененного по типу *B*.

4. Коэффициент охвата, полученный из выражений ГОСТ Р 8.736-2011

В ГОСТ Р 8.736-2011 [4] приведено выражение для доверительных границ погрешности, вычисленных через СКО s случайной и границы θ неисключенной систематической погрешности (НСП), распределенной равномерно:

$$\Delta_{0,95} = \frac{t_{0,95}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}} + \theta}{\frac{s}{\sqrt{n}} + \frac{\theta}{\sqrt{3}}}\sqrt{\frac{s^2}{n} + \frac{\theta^2}{3}}\,, \qquad (10)$$

где $t_{0,95}(n-1)$ – коэффициент Стьюдента для вероятности 0,95 и числа степеней свободы n-1.

Аналогичное выражение можно записать и для случая, когда НСП распределена по нормальному закону:

$$\Delta_{0,95} = \frac{t_{0,95}(n-1)s/\sqrt{n} + 1,96 \cdot s_\theta}{s/\sqrt{n} + s_\theta}\sqrt{\frac{s^2}{n} + s_\theta^2}\,. \qquad (11)$$

Принимая во внимание, что границы погрешности являются оценками расширенной неопределенности, а СКО НСП s_θ равно стандартной неопределенности типа *B*, выражение для коэффициента охвата с учетом ранее введенных обозначений будет иметь вид:

$$k_{ГОСТ} = \frac{t_{0,95}(n-1) + \gamma\beta}{1+\gamma}\sqrt{\frac{1+\gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2}}\,, \qquad (12)$$

где $\beta = \sqrt{3}$ для равномерного и $\beta = 1,96$ для нормального законов распределения стандартной неопределенности типа *B*.

Значения $k_{ГОСТ}$ приведены в табл. 4 и 5.

Таблица 4

Значения $k_{ГОСТ}$ для нормального закона распределения вклада типа B

γ	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 11
0	1,837	1,963	1,991	1,998	1,993
0,5	1,721	1,867	1,912	1,931	1,952
1	1,818	1,934	1,962	1,971	1,974
2	2,001	2,038	2,032	2,024	2,000
3	2,068	2,063	2,046	2,032	2,002
4	2,085	2,063	2,042	2,028	1,999
5	2,085	2,057	2,036	2,022	1,995
6	2,079	2,049	2,029	2,016	1,992
7	2,072	2,042	2,023	2,011	1,989
8	2,064	2,035	2,018	2,006	1,986

Таблица 5

Значения $k_{ГОСТ}$ для равномерного закона распределения вклада типа B

γ	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 11
0	1,837	1,963	1,991	1,998	1,993
1	1,738	1,841	1,863	1,869	1,867
2	1,872	1,899	1,890	1,879	1,852
3	1,912	1,900	1,880	1,865	1,833
4	1,913	1,886	1,864	1,848	1,818
5	1,902	1,870	1,848	1,834	1,806
6	1,889	1,856	1,835	1,822	1,797
7	1,876	1,844	1,825	1,812	1,790
8	1,865	1,834	1,816	1,805	1,784
9	1,855	1,825	1,809	1,798	1,779
10	1,846	1,818	1,802	1,793	1,775
11	1,838	1,812	1,797	1,788	1,772
12	1,831	1,806	1,792	1,784	1,769

5. Коэффициент охвата, полученный из закона распространения расширенной неопределенности

В работе [5] приводится формула для оценивания расширенной неопределенности, которая называется законом распространения расширенной неопределенности:

$$U = \sqrt{\left[t_{0,95}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right]^2 + (k_B u_B)^2}\,, \qquad (13)$$

где $k_B = 1,65$ для равномерного и $k_B = 1,96$ для нормального законов распределения стандартной неопределенности типа B.

Значения коэффициента охвата $k_{ЗРРН}$, который можно было бы использовать для нахождения расширенной неопределенности в байесовском подходе, вычислялось по формуле:

$$k_{ЗРРН} = \sqrt{\frac{\left[t_{0,95}(n-1)\right]^2 + (k_B\gamma)^2}{\alpha^2 + \gamma^2}}\,. \qquad (14)$$

Значения $k_{ЗРРН}$ для разных n и соотношения γ приведены в табл. 6, 7.

Таблица 6

Значения k_{SPPH} для нормального закона распределения вклада типа B

γ	n = 4	n = 5	n = 6	n = 7	n = 11
0	1,837	1,963	1,991	1,998	1,993
0,5	1,847	1,963	1,987	1,993	1,987
1	1,869	1,962	1,980	1,983	1,978
2	1,908	1,961	1,969	1,970	1,968
3	1,930	1,961	1,965	1,965	1,964
4	1,941	1,960	1,963	1,963	1,962
5	1,947	1,960	1,962	1,962	1,962
6	1,951	1,960	1,961	1,962	1,961
7	1,953	1,960	1,961	1,961	1,961
8	1,955	1,960	1,961	1,961	1,961

Таблица 7

Значения k_{SPPH} для равномерного закона распределения вклада типа B

γ	ν = 3	ν = 4	ν = 5	ν = 6	ν = 10
0	1,837	1,963	1,991	1,998	1,993
1	1,791	1,863	1,869	1,865	1,847
2	1,730	1,758	1,754	1,749	1,735
3	1,695	1,708	1,704	1,700	1,692
4	1,677	1,684	1,681	1,679	1,673
5	1,667	1,671	1,669	1,667	1,664
6	1,661	1,664	1,662	1,661	1,658
7	1,657	1,659	1,658	1,657	1,655
8	1,655	1,656	1,655	1,654	1,653
9	1,653	1,654	1,653	1,653	1,651
10	1,651	1,652	1,652	1,651	1,650
11	1,650	1,651	1,651	1,650	1,649
12	1,650	1,650	1,650	1,649	1,649

6. Сопоставление полученных результатов

На рис. 1 приведены зависимости коэффициентов охвата от γ при использовании формул (6), (9), (12), (14) для нормального и равномерного законов распределения вклада типа *B*.

На рис. 2 приведены зависимости относительных отклонений δ(γ) значений коэффициентов охвата, полученных при использовании формул (9), (12), (14) от значений коэффициента охвата, полученного методом Монте-Карло для нормального и равномерного законов распределения вклада типа *B*.

Анализ рис. 1, 2 показывает, что наилучшее приближение к k_{MMK} дает коэффициент охвата k_{SPPH}, рассчитанный через формулу для закона распространения расширенной неопределенности (13). Его относительное отклонение от k_{MMK} не превышает 4,5 %. Наибольшим отклонением от k_{MMK} обладают k_{NewGUM} (до 80 %) и k_{GUM} (до ±16 %).

Формула (12) для $k_{ГОСТ}$ обеспечивает относительное отклонение от k_{MMK} не более 12 %.

Выводы

1. Внедрение концепции неопределенности измерений как продукта процесса международной стандартизации оценивания качества измерений должно обеспечивать получение не только единообразных, но и максимально достоверных оценок неопределенности.

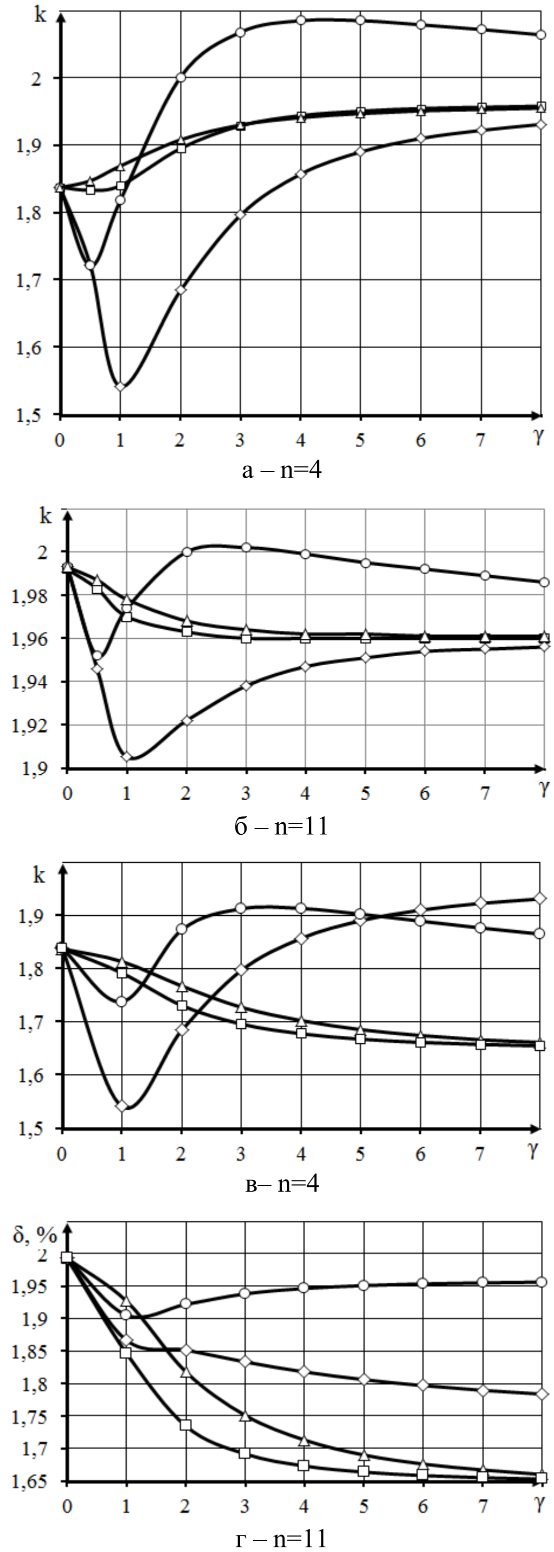
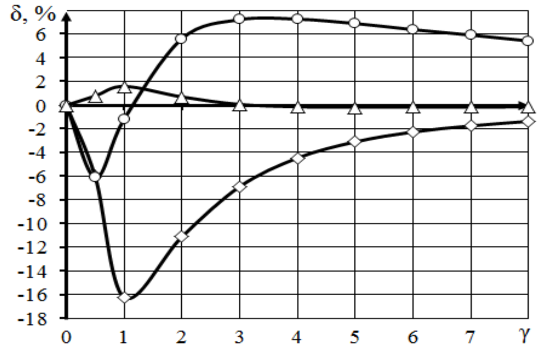
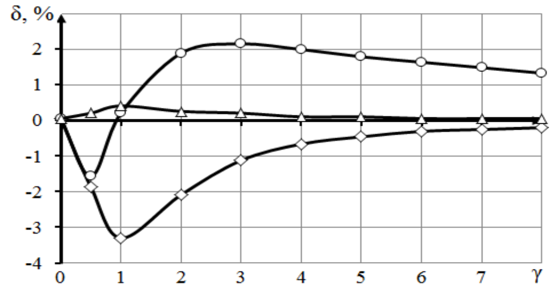


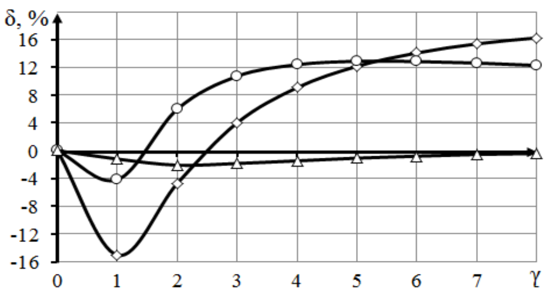
Рис. 1. Зависимости k(γ)для нормального (а, б) и равномерного (в, г) законов распределения вклада типа *B* и разных выражений для k:
□ – k_{MMK} (6); ◊ – k_{GUM} (9);
○ – $k_{ГОСТ}$ (12); Δ – k_{SPPH} (14)



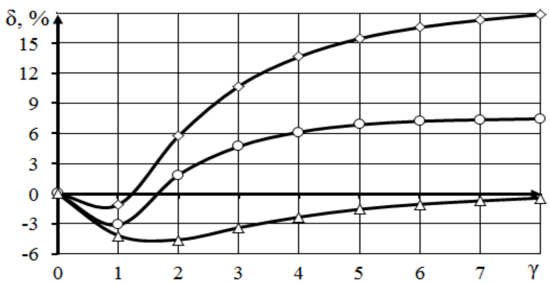
а – n=4



б – n=11



в – n=4



г – n=11

Рис. 5. Зависимости δ(γ) для нормального (а, б) и равномерного (в, г) законов распределения вклада типа *B* для разных выражений для k: ◊ – k_{GUM} (9); ○ – $k_{ГОСТ}$ (12); Δ – k_{SPPH} (14)

2. Наибольшим отклонением от $k_{ММК}$ обладают k_{NewGUM} (до 80 %) и k_{GUM} (до ±16 %).

3. Формула (12) для $k_{ГОСТ}$ обеспечивает отклонение от $k_{ММК}$ не более 12 %.

4. Наиболее достоверную оценку коэффициента охвата дает формула (14), полученная на основе закона распространения расширенной неопределенности, ее относительное отклонение от $k_{ММК}$ не превышает ±4,5 %.

5. Необходимо продолжить исследование способов вычисление коэффициентов охвата, учитывающих несколько вкладов неопределенности типа *A* и *B* для законов распределения вкладов типа *B* отличных от нормального и равномерного.

Список литературы

1. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO, Geneva, First Edition. – 1993 – 101 p.*

2. *I. Lira, W. Woger, Comparison between the conventional and Bayesian approaches to evaluate measurement data, Metrologia 43 (2006) S249.*

3. *Бурмистрова Н.А. Вычисление расширенной неопределенности измерения в случае двух источников неопределенности / Н.А. Бурмистрова, А.В. Степанов, А.Г. Чуновкина // Неопределенность измерений: научные, законодательные, методические и прикладные аспекты (UM-2016). Сборник докл. XIII Межд. научно-технического семинара, г. Минск, 13-14 апреля 2016. – С. 25-30.*

4. *ГОСТ Р 8.736-2011 - Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения.*

5. *Захаров И.П. Применение метода Монте-Карло для оценивания неопределенности в измерениях / И.П. Захаров // Стандартизация, метрология, сертификация (Болгария). – 2006. – № 12. – С. 2-6.*

6. *JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data − Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" − Propagation of distributions using a Monte Carlo method.*

7. *Захаров И.П. Исследование и повышение достоверности интервальных оценок точности прямых многократных измерений измерениях / И.П. Захаров // АСУ и приборы автоматики. – 2005. – Вып. 132. – С.. 106-109.*

Поступила в редколлегию 28.04.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.П. Мачехин, Харьковский национальный университет радиоэлектроники.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІЗНИХ СПОСОБІВ ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТА ПОКРИТТЯ ПРИ РЕАЛІЗАЦІЇ БАЙЕСІВСЬКОГО ПІДХОДУ ДО ОЦІНЮВАННЯ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ВИМІРЮВАНЬ

О.А. Боцюра, І.П. Захаров

Здійснено порівняння різних способів обчислення коефіцієнтів покриття при байєсівському підході до оцінювання невизначеності вимірювань. У якості референтних оцінок виступають оцінки, отримані методом Монте-Карло.

Ключові слова: *невизначеність вимірювань, коефіцієнт покриття, байєсівський підхід.*

COMPARATIVE ANALYSIS OF VARIOUS METHODS FOR CALCULATING OF COVERAGE FACTOR AT IMPLEMENTATION OF BAYESIAN APPROACH BY THE MEASUREMENT UNCERTAINTY EVALUATION

O.A. Botsiura, I.P. Zakharov

A comparison of different ways for calculating of coverage factor at implementation of the Bayesian approach to the measurement uncertainty evaluation was given. The estimates obtained by Monte Carlo method as a reference was taken.

Keywords: *measurement uncertainty, coverage factor, Bayesian approach.*