УДК 519.66

В.О. Бутенко[1], В.Ю. Дубницкий[2], С.В. Харченко[3]

[1] *Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*
[2] *Харьковский научно-учебный институт ГВУЗ «Университет банковского дела», Харьков*
[3] *Медицинский институт Сумского государственного университета, Сумы*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПЕРЕХОДОВ В МАРКОВСКОЙ ЦЕПИ С ДИСКРЕТНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ И ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Сформулирована обратная задача анализа марковской цепи с дискретными состояниями и дискретным временем. В процессе решения этой задачи требуется по исходному вектору распределения вероятностей состояния восстановить матрицу переходных вероятностей. Предложено рассматривать эту задачу как некорректную обратную задачу. Критерием качества решения выбран метод наименьшего модуля. Предложена вычислительная процедура поиска решения, основанная на комбинации метода исследования пространства параметров и метода деформируемого многогранника. Приведены примеры применения предложенной процедуры.

Ключевые слова: *марковские цепи с дискретным состоянием и дискретным временем, предельные (финальные) состояния, распределение состояний, переходная матрица марковского процесса, некорректная обратная задача, метод наименьшего модуля, метод исследования пространства параметров, метод деформируемого многогранника.*

Введение

В рамках данной работы при рассмотрении свойств марковской цепи с дискретными состояниями и дискретным временем использованы понятия и определения, приведенные в работах [1, 2, 3]. Пусть марковская цепь служит моделью системы S, которая может быть в каждый фиксированный момент времени только в одном из $s_1, s_2, ... s_n$ возможных состояний. Примем, что для каждого к-го шага рассматриваемого марковского процесса определена матрица переходных вероятностей $P(\kappa)$.

Для удобства в дальнейшем тексте работы символ κ будет опускаться, если это не будет вызывать недоразумений в его изложении.

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12}\cdots & p_{1j}\cdots & p_{1n} \\ p_{12} & p_{22}\cdots & p_{2j}\cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{i1} & p_{i2}\cdots & p_{ij}\cdots & p_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2}\cdots & p_{nj}\cdots & p_{nn} \end{Vmatrix}. \quad (1)$$

Геометрической иллюстрацией матрицы P служит взвешенный орграф $G(P, \Pi)$, вес ребра которого равен величине p_{ij}.

Примем также, что определён вектор распределения возможных состояний системы:

$$\Pi = \begin{Vmatrix} \pi_1, & \pi_2, ... & \pi_3, ... & \pi_n \end{Vmatrix}. \quad (2)$$

Если

$$\Pi^{(k)} = \Pi P^k, \quad (3)$$

то такую цепь называют неоднородной. Вектор распределения состояний на κ-м шаге определим из условия:

$$\Pi^{(k)} = \Pi^{(0)} \prod_{j=1}^{k} P^{(j)}. \quad (4)$$

В рассмотренной постановке задачи, независимо от наличия или присутствия свойства однородности, к известным её условиям задачи относят распределение вектора начальных состояний Π и матрицы переходных вероятностей P (матриц $P^{(j)}$). Результатом решения задачи должны быть значения вероятностей пребывания системы в одном из своих возможных состояний, то есть численные значения вектора:

$$\Pi^{(k)} = \begin{Vmatrix} \pi_1^{(k)}, & \pi_2^{(k)}, ... & \pi_j^{(k)}, ... & \pi_n^{(k)} \end{Vmatrix}. \quad (5)$$

Обратной по отношению к сформулированной условиями (2)…(5) к задаче будет задача, в которой по известной матрице Π требуется найти матрицу переходных вероятностей P.

Анализ литературы. Современное состояние теории обратных задач и её применение к задачам различного математического вида и физической природы рассмотрено детально в работах [4, 5, 6].

Деление задач на прямые и обратные обусловлено принятой в работе схемой причинно-следственных связей. В классической модели марковской цепи задан вектор распределения входных состояний на *к*-м шаге и матрица переходных вероятностей-параметров системы. Требуется найти отклик системы – вектор распределения выходных состояний системы на (*к*+1) шаге моделирования. В обратной задаче необходимо по известной реакции системы, в нашем случае вектору распределения состояний, найти параметры модели – значения матрицы переходных вероятностей, таких, чтобы отклонение расчетного вектора распределения состояний и фактического было в некотором, заранее определённом смысле, минимальным. Для решения задач, связанных с анализом марковских цепей, созданы специализированные программные продукты. Один из таких, наиболее совершенный, описан в работе [11]. Но даже в нем в требованиях к входным данным сказано, что матрица вида (1) должна быть заранее задана.

В работе [7] рассмотрены модели вероятностных переходов из состояния здоровья в состояние латентной и диагностированной болезни с возможным летальным исходом и без него. В работе [8] отмечено, что в некоторых случаях построение модели затруднено тем, что в течение одного промежутка времени возможен многократный неконтролируемый переход из одного состояния, например, состояния «здоров» в состояние «болен». Сам процесс получения численных значений матрицы переходных вероятностей в работе также подробно не описан. О трудоёмкости и сложности вычислительного процесса решения обратной задачи для марковской цепи можно судить по тому, что в работе [9] для её решения использовали параллельные вычисления.

Следует отметить, что в указанных работах не рассматривались статистические свойства получаемых оценок. Эти свойства подробно рассмотрены в работе [10].

Постановка задачи. Разработка поискового алгоритма определения матрицы переходных вероятностей для заданного вектора распределения состояний, характеризующих марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем.

Полученные результаты

В рамках данной работы будем рассматривать марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем в том виде, в котором он описан в работе [1]. Полагаем известными общий вид матрицы переходных вероятностей (1) и численные значения компонент вектора П, определённого по условию (2).

Рассмотрим марковскую цепь, находящуюся в стационарном режиме, и для которой известны предельные (финальные) вероятности. Следуя работе [1], для каждого возможного состояния системы π_j необходимо составить балансовое условие:

$$\sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{n} \pi_i p_{ij} = \pi_j \sum_{\substack{i=1\\(i\neq j)}}^{n} p_{ji} \quad , \quad (j=1,2,\ldots,n). \tag{6}$$

Равенство (6) следует дополнить условием нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1. \tag{7}$$

Из известных по условию задачи компонент вектора П, определённого условием (2), выберем произвольно одну, например π_j, $1 \le j \le n$. Разрешая систему (6) относительно π_j, при выполнении условия (7) получим, что:

$$\pi_j = \Lambda(\pi_1, \pi_2, \ldots \pi_{j-1}, \pi_{j+1}, \ldots \pi_n, E_i, S_i), \; j=1,2,\ldots n, \tag{8}$$

где $E_i = p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{(i-1)i,} p_{(i+1)i} \ldots, p_{ni}$;

$S_i = p_{i1}, p_{i2,\ldots,} p_{i(i-1),} p_{i(i+1)}, \ldots, p_{in}$.

Примем, что для каждой i-й вершины графа $G(P, \Pi)$ множество E_i – множество рёбер, составляющих полустепень захода, множество S_i – множество рёбер, составляющих полустепень исхода. Задачу, определённую условиями (6) и (7), назовем прямой задачей для марковского процесса с дискретными состояниями и дискретным временем.

Рассмотрим следующую задачу. Предположим, что компоненты π_i (i= 1,2,...n) вектора П, характеризующего распределение состояний системы, известны. Требуется определить численные значения $\hat{p}_{ij}$ величин p_{ij} таких, чтобы приближённое значение $\hat{\Pi}$ вектора П было в некотором смысле наилучшим. Далее, без ограничения общности, примем, что в условии (8) i=1.

В соответствии с требованиями к решению обратных задач, изложенными в работе [4], в качестве условия регуляризации выбрано условие:

$$L = \left\| \Pi - \hat{\Pi}(P) \right\| = \sum_{j=2}^{n} \left| \pi_j - \hat{\pi}_j \right| \to \min . \tag{9}$$

Условие (9) эквивалентно условию (10):

$$L = \left| \left(\pi_1 + \sum_{j=2}^{n} \hat{\pi}_j(P) \right) - 1 \right| \to \min . \tag{10}$$

Преимущество предлагаемого подхода в том, что он менее требователен к виду закона распределения помехи, на что обращено внимание в работе [12]. Рассмотрим неоднородную конечную популяцию объектов произвольной физической природы. Пусть эта популяция такова, что каждый из входящих в неё объектов может находиться в одном, и только в одном из возможных и диагностируемых состояний S_j.

Перечень этих состояний определён той предметной областью, для которой решается задача. Вероятности пребывания системы в каждом из состояний определяются эмпирической частотой (долей) количества объектов, находящихся в каждом из возможных состояний, то есть:

$$0 \le \pi_j \le 1. \qquad (11)$$

Пути возможных переходов системы из одного состояния в другое предполагают известными. Более подробно свойства таких популяций описаны в работе [13]. Тогда:

$$\pi_j = p_{ij}\pi_i. \qquad (12)$$

Из условия (12) следует, что:

$$0 \le p_{ij} < 1. \qquad (13)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сведено к поиску минимума условия (10) при ограничениях (11) и (13).

Пусть:

$$L_j = \left|\pi_j - \hat{\pi}_j\right| \to \min,\ j=2,3,\ldots n. \qquad (14)$$

Для решения этой задачи предложена двухэтапная процедура. На первом этапе решается задача многокритериальной оптимизации с частными критериями вида (14) и их аддитивной сверткой в виде (9) или (10) при ограничениях (11) и (13). Для её решения используем метод исследования пространства параметров, теоретические основы которого изложены в работе [14].

Процесс решения осуществляем в следующем порядке.

1. Выделим в матрице P, заданной условием (1), ненулевые элементы, расположим их в лексикографическом порядке и, предварительно переименовав, перенумеруем последовательностью натуральных чисел от 1 до r. Полученное множество $X = \{x_1, x_2, \ldots x_r\}$ назовем множеством переменных.

2. Один из элементов вектора (2) выберем в качестве параметра системы.

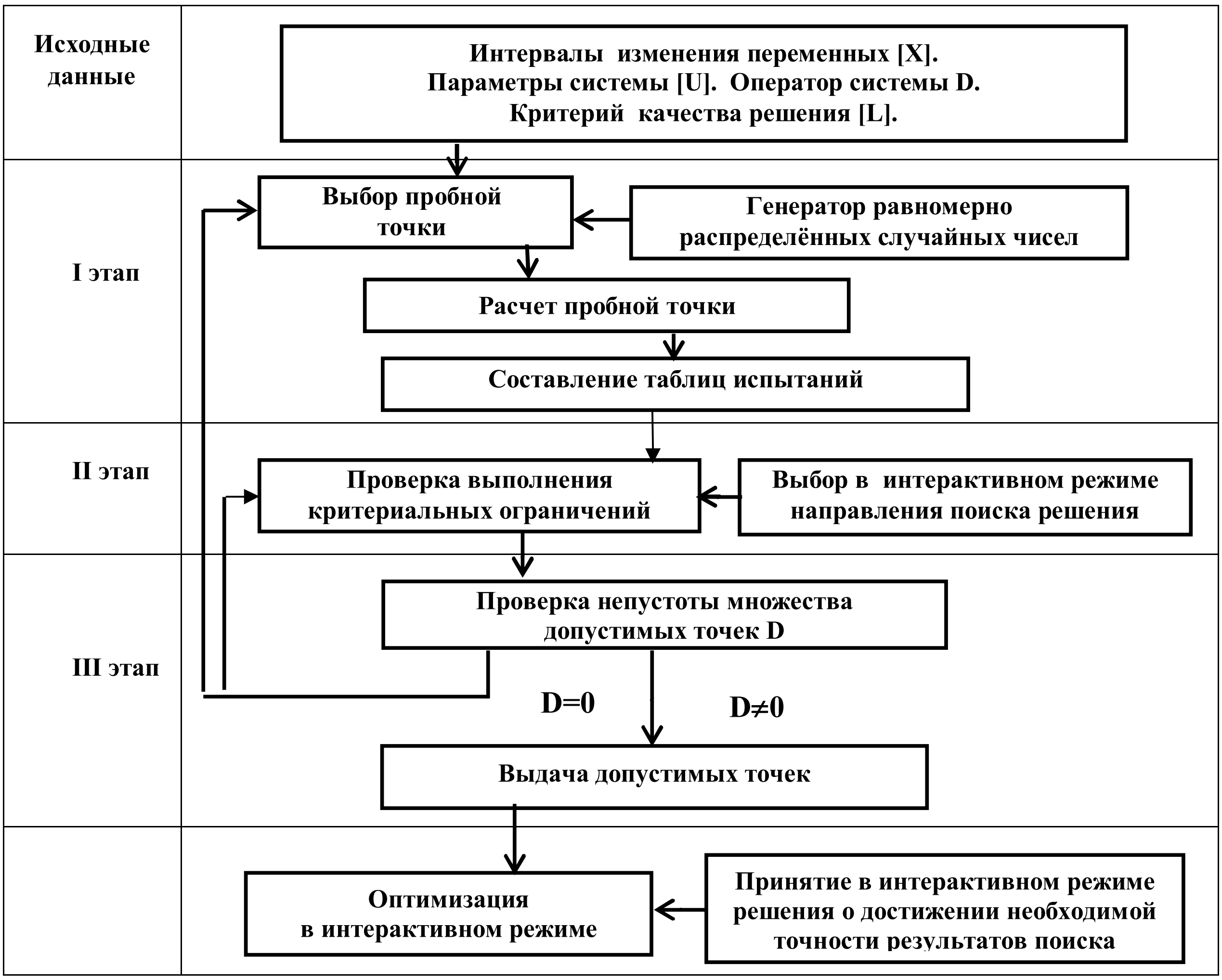

Рис. 1. Схема применения метода исследования пространства параметров

Без ограничения общности в качестве параметра выберем величину $U = \pi_{1/}$.

3. Уравнения вида (8) определяют оператор системы D.

4. Критерий качества полученного решения L определён условием (10).

5. Генератор случайных чисел выдает последовательность r-мерных векторов, каждая компонента которого равномерно распределена в интервале (0,1).

6. Полученные в п.5 последовательности преобразуют, используя условие (13) в последовательность пробных точек.

7. Используя оператор системы D, определённый условием (8), выполняют вычисления в пробных точках, то есть вычисляют значения величин $\hat{\pi}_j$, j=2, 3, …,n. Дальнейшие действия понятны из схемы.

Полученная процедура фактически реализует в интерактивном режиме простейший вариант метода случайного поиска и позволяет определить в таблице испытаний координаты точки $X(0) \in E^r$, в которой выполнено условие (10), то есть фактически выбрать из таблицы испытаний строку с наилучшим результатом.

Дальнейший, уже регулярный поиск оптимума происходит в окрестности точки С.

Поиск минимума условия (10) выполнен с использованием метода деформируемого многогранника, описанного в работе [16]. Все вычисления были проведены с помощью встроенной функции *fminsearch* в средстве компьютерной математики Matlab. Данная функция принимает в виде входных параметров аналитически заданную минимизируемую целевую функцию, а также вектор начальных значений для искомых переменных. Результат работы *fminsearch* представляется также в виде вектора значений переменных, в которых функция достигает своего минимума.

Рассмотрим пример 1. Его условия заимствованы из работы [1, С. 125].

Граф связей рассматриваемой системы показан на рис. 2.

Известно, что в этой системе уже установился стационарный режим.

В исходной (прямой) задаче даны вероятности p_{ij} переходов из одного возможного состояния s_i в другое s_j, $i, j = 1, 2, ..., 5$.

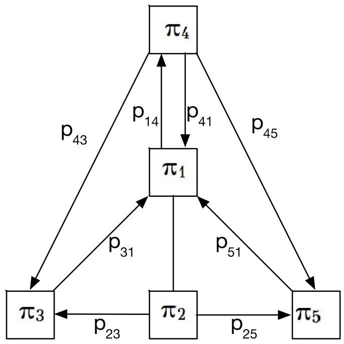

Рис. 2. Граф связей для примера 1

Требуется найти предельные (финальные) вероятности состояний $\pi_i, i = 1, 2, ..., 5$.

Рассмотрим задачу, обратную по отношению к условиям примера 1.

На рис. 2 задан граф связей системы и известны вероятности состояний

$$\pi_i : \pi_1 = 0,614; \pi_2 = 0,088; \pi_3 = 0,074;$$
$$\pi_4 = 0,068; \pi_4 = 0,156.$$

Требуется найти вероятности p_{ij} переходов из одного возможного состояния s_i в другое s_j.

Оператор системы D в данном случае будет определён условиями:

$$\pi_2 = a_2 \pi_1 = \frac{p_{12}}{p_{23} + p_{25}} \pi_1; \quad (15)$$

$$\pi_3 = \frac{a_2 p_{23} + a_4 p_{43}}{p_{31}} \pi_1; \quad (16)$$

$$\pi_4 = a_4 \pi_1 = \frac{p_{14}}{p_{41} + p_{43} + p_{45}} \pi_1; \quad (17)$$

$$P_5 = \frac{a_2 p_{25} + a_4 p_{45}}{p_{51}} \pi_1. \quad (18)$$

Результаты решения показаны в табл. 1.

Таблица 1

Результаты решения определения вероятностей переходов для примера 1

Вероятность перехода	Заданная	Расчётная	Вероятность перехода	Заданная	Расчётная	Вероятность перехода	Заданная	Расчётная
p_{12}	0,1	0,097	p_{25}	0,1	0,102	p_{43}	0,1	0,112
p_{14}	0,1	0,092	p_{31}	0,8	0,8190	p_{45}	0,1	0,097
p_{23}	0,6	0,615	p_{41}	0,7	0,717	p_{51}	0,1	0,108

В общем случае, если задана переходная матрица P и вектор распределения возможных состояний системы (5) на *к*-м шаге её функционирования, то, в соответствии с работой [1, С. 115] получим, что вероятность π_j пребывания системы на (*к*+1)-м шаге в состоянии s_j определяют по условию:

$$\pi_j^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^{(k)} p_{ij}, \quad (j=1,2,\ldots n). \qquad (19)$$

Пример 2.

Рассмотрим систему, граф связей которой показан на рис. 3.

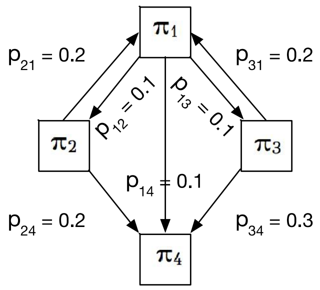

Рис. 3. Граф связей для примера 2

Результат численного решения прямой задачи, приведенный в [1, С. 116], представлен в табл. 2.

Для решения обратной задачи – определения элементов переходной матрицы при известных распределениях вероятностей состояний, в соответствии с условием (19) составим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \pi_1^{(2)} p_{11} + \pi_2^{(2)} p_{12} + \pi_3^{(2)} p_{13} + \pi_4^{(k)} p_{14} = \pi_1^{(3)}; \\ \pi_1^{(2)} p_{21} + \pi_2^{(2)} p_{22} + \pi_3^{(2)} p_{23} + \pi_4^{(k)} p_{24} = \pi_2^{(3)}; \\ \pi_1^{(2)} p_{31} + \pi_2^{(2)} p_{32} + \pi_3^{(2)} p_{33} + \pi_4^{(k)} p_{34} = \pi_3^{(3)}; \\ \pi_1^{(2)} p_{41} + \pi_2^{(2)} p_{42} + \pi_3^{(2)} p_{43} + \pi_4^{(k)} p_{44} = \pi_4^{(3)}. \end{cases} \qquad (20)$$

Решая эту систему относительно p_{ij} с учётом условий (10), (11), (13), (14) получим искомый результат, приведенный в табл. 3. Подробное описание способа решения такой системы методом исследования пространства параметров описано в работе [15].

Таблица 2

Распределение вероятностей состояний для примера 2

Номер шага	Распределение вероятностей состояний			
	π_1	π_2	π_3	π_4
2	0,53	0,13	0,12	0,22
3	0,42	0,13	0,11	0,34

Таблица 3

Результаты решения определения вероятностей переходов для примера 2

Вероятность перехода	Заданная	Расчётная	Вероятность перехода	Заданная	Расчётная
p_{11}	0,7	0,683	p_{31}	0,1	0,0925
p_{12}	0,2	0,186	p_{32}	0	0,0024
p_{13}	0,2	0,210	p_{33}	0,5	0,518
p_{14}	0	0,003	p_{34}	0	0,001
p_{21}	0,1	0,109	p_{41}	0,1	0,116
p_{22}	0,6	0,547	p_{42}	0,2	0,197
p_{23}	0	0,001	p_{43}	0,3	0,287
p_{24}	0	0,002	p_{44}	1	0,989

Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что совпадение полученных результатов с контрольными (заданными) вполне удовлетворительное. Следует отметить, внимание авторов было сосредоточено на изложении вычислительной процедуры предложенного метода. Анализ статистических свойств полученных оценок выходит за рамки данной статьи.

Выводы

1. Сформулирована обратная задача анализа марковской цепи с дискретными состояниями и дискретным временем. В процессе решения этой задачи требуется по исходному вектору распределения вероятностей состояния восстановить матрицу переходных вероятностей.

2. Предложено рассматривать эту задачу как некорректную обратную задачу.

3. Критерием качества решения выбран метод наименьшего модуля.

4. Предложена вычислительная процедура поиска решения, основанная на комбинации метода исследования пространства параметров и метода деформируемого многогранника.

5. Приведены примеры применения предложенной процедуры.

Список литературы

1. Вентцель Е.С. Теория случайных последовательностей и её инженерные приложения [Текст] / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 383 с.

2. Сирл С. Матричная алгебра в экономике [Текст] / С. Сирл , У. Гросман. – М.: Статистика, 1974. – 376 с.

3. Лабскер Л.Г. Вероятностное моделирование в финансово-экономической области [Текст] / Л.Г. Лабскер. – М.: Альпина Паблишер, 2002. – 224 с.

4. Охріменко М.Г. Методи розв'язування некоректно поставлених задач [Текст] / М.Г. Охріменко, О.А. Жуковська, О.О. Купка. – К. Центр учбової літератури, 2008. – 166 с.

5. Ольховой А.Ф. Обратные некорректные задачи. Введение в проблематику [Текст] / А.Ф. Ольховой. – Таганрог: Технологический институт ЮФУ ГСП 17А, 2009. – 131 с.

6. Цей Р. Математическое моделирование и обратные задачи / Р. Цей, М.М. Шумафов // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. – 2008. – №4. [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: http://cyberleninka.ru/article/n/matematicheskoe-modelirovanie-i-obratnye-zadachi / - 26.03.2016 г. – Загл. с экрана.

7. Маркович Н.М. Оценки показателей здоровья по данным выявленной заболеваемости [Текст] / Н.М. Маркович, А.И. Михальский // Автоматика и телемеханика. – 1995. – Вып. 7. – С. 151-161.

8. Спивак С.И. Обратные задачи для Марковских моделей медицинского страхования [Текст] / С.И. Спивак, Г.К. Райманова, С.Р. Абдюшева // Страховое дело. – 2008. – № 9 (188). – С. 36-41.

9. Куликов Г.Г. Идентификация марковских моделей нестационарных динамических объектов на основе параллельных вычислений [Текст] / Г.Г. Куликов, В.Ю. Арьков, А.И. Абдулнагимов // Доклады пятой международной конференции «Параллельные вычисления и задачи управления, PACO-2010 ». – М., 2010. – С. 343-350.

10. Ли Ц. Оценивание параметров марковских моделей по агрегированным данным [Текст] / Ц. Ли, Д. Джадж, А. Зельнер. – М.: Статистика, 1977. – 223 с.

11. Климкина Н.Л. Программный комплекс статистического анализа вероятностных процессов на основе цепей Маркова. [Электронный ресурс] / Н.Л. Климкина, Е.М. Гриценко. – Режим доступа к ресурсу: http://technotag. edu. Ru / doc / 63336. html / 21.03. 2016 г. Загл с экрана.

12. Авдюшев В.А. Метод наименьших модулей и его эффективность при обработке измерений с ошибками различного распределения. [Текст] / В.А. Авдюшев, А.Д. Мезенцева // Известия высших учебных заведений. – 2012. – Т.55, № 10 / 2 Физика. – С. 68-76.

13. Михальский А.И. Теория оценивания неоднородных популяций. [Текст] / А.И. Михальский, А.М. Петровский, А.И. Яшин. – М.: Наука, 1989. – 127 с.

14. Соболь И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями [Текст] / И.М. Соболь, Р.Б. Статников. – М.: Дрофа, 2006. – 175 с.

15. Дубницкий В.Ю. Решение прямой и обратной задачи для системы линейных алгебраических уравнений с интервально заданными характеристиками [Текст] / В.Ю. Дубницкий, А.М. Кобылин // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС, 2014. – Вип. 6 (122). – С. 3-8.

16. Химмельблау Д.М. Прикладное динамическое программирование. [Текст] / Д.М. Химмельблау. – М.: «Мир», 1975. – 536 с.

Поступила в редколлегию 31.05.2016

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. М.В. Новожилова, Харьковский национальный университет строительства и архитектуры, Харьков.

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОСТОРУ ПАРАМЕТРІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ ПЕРЕХОДІВ В МАРКІВСЬКОМУ ЛАНЦЮЗІ З ДИСКРЕТНИМИ СТАНАМИ І ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

В.О. Бутенко, В.Ю. Дубницький, С.В. Харченко

Сформульовано зворотну задачу аналізу марківського ланцюга з дискретними станами і дискретним часом. В процесі розв'язання цієї задачі необхідно по початковому вектору розподілу ймовірності стану відновити матрицю перехідних ймовірностей. Запропоновано розглядати цю задачу як некоректну зворотну задачу. Критерієм якості розв'язку обрано метод найменшого модуля. Запропоновано обчислювальну процедуру пошуку розв'язку, засновану на комбінації методу дослідження простору параметрів і методу многогранника, що деформується. Наведено приклади застосування запропонованої процедури.

Ключові слова: *марківські ланцюги з дискретним станом і дискретним часом, граничні (фінальні) стани, розподіл станів, перехідна матриця марківського процесу, некоректне зворотне завдання, метод найменшого модуля, метод дослідження простору параметрів, метод многогранника, що деформується.*

APPLYING THE METHOD OF STATES PARAMETERS RESEARCH TO DEFINE THE DISCRETE TIME MARKOV CHAIN TRANSITIONS PROBABILITIES

V.O. Butenko, V.Yu. Dubnitskiy, S.V. Kharchenko

The reverse problem of discrete time Markov chains analysis was defined. During the problem solution it is needed to restore the transition probabilities matrix based on the final system probabilities of being in each state. It is proposed to consider the problem as incorrect inverse problem. The smallest module method was selected as criterion of solution quality. A computational procedure for finding the solution based on a combination of research method parameter space and flexible polyhedron method. Paper contains examples of proposed procedure application.

Keywords: *discrete time Markov chainsfinal states, states distribution, Markov process transition matrix, incorrect reverse problem, smallest module method, method of states parameters reserach, flexible polyhedron method.*