УДК 528.88:502.37

Ю.И. Лосев[1], Ю.В. Волков[2]

[1] *Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков*
[2] *Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург*

АНАЛИЗ ЭФФЕКТИВНОСТИ БАЙЕСОВСКОГО КЛАССИФИКАТОРА

Рассматривается одна из главных задач машинного обучения – задача классификации. Описываются базовые принципы построения и использования классификатора Байеса. Разработана математическая модель Байесовского классификатора, адекватно описывающая процесс принятия решений. На основе разработанной модели исследованы зависимости вероятности ошибки класификатора от различных параметров.

Ключевые слова: *классификатор, нормальный закон распределения, функция ошибок.*

Введение

Современный этап научно-технического прогресса требует целенаправленного развития систем компьютерного зрения, как одного из важнейших механизмов обеспечения эффективного взаимодействия технических средств с человеком [1 – 5]. Одним из главных направлений компьютерного зрения является задача автоматизированного распознавания образов. Образ – представитель некой группы объектов, объединённых по определённым признакам. Одним из способов решения данной задачи является использование классификатора Байеса. Он представляет собой линейный сумматор с вектором весов $\mathbf{w}$ и порогом b.

На вход классификатора подаётся вектор признаков $\mathbf{x}$.

На выходе выдаётся аналоговый сигнал

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot w_i + b,$$

по анализу которого принимается итоговое решение: к какому классу будет отнесён данный объект.

Основной материал

Классическая система классификации образов получила название «Байесовского классификатора» (Bayes classifier). В данном классификаторе или байесовской процедуре проверки гипотез минимизируется средний риск, обозначенный символом R. Для задачи двух классов S_1 (соответствует подпространству X_1) и S_2 (соответствует подпространству X_2), средний риск определятся по следующей формуле:

$$R = c_{11}p_1 \int_{X_1} f_x(\mathbf{x}\,|\,s_1)dx + c_{22}p_2 \int_{X_2} f_x(\mathbf{x}\,|\,s_2)dx + c_{21}p_1 \int_{X_2} f_x(\mathbf{x}\,|\,s_1)dx + c_{12}p_2 \int_{X_1} f_x(\mathbf{x}\,|\,s_2)dx. \quad (1)$$

где p_i – *априорная вероятность того, что вектор* $\mathbf{x}$ (представляющий случайный вектор из пространства $\mathbf{X}$) принадлежит подпространству X_i, при $i = \{1,2\}$, и $p_1 + p_2 = 1$; c_{ij} – *стоимость решения* в пользу класса S_i, когда истинным является S_j; $f_x(\mathbf{x}\,|\,s_i)$ - условная плотность распределения.

Целью является минимизация величины среднего риска. В результате каждому вектору наблюдения $\mathbf{x}$ из пространства $\mathbf{X}$ должно быть сопоставлено одно из подпространств - X_1 или X_2. При этом

$$\mathbf{X} = X_1 + X_2. \quad (2)$$

Также очевидно равенство:

$$\int_{\mathbf{X}} f(\mathbf{x}\,|\,s_1)dx = \int_{\mathbf{X}} f(\mathbf{x}\,|\,s_2)dx = 1. \quad (3)$$

Учитывая формулы (2) и (3) выражение (1) запишется в следующем виде:

$$R = c_{22}p_2 + c_{21}p_1 + \int_{X_1} \left[p_2(c_{12} - c_{22}) \cdot f_e(\mathbf{x}\,|\,s_2) - p_1(c_{21} - c_{11}) f_e(\mathbf{x}\,|\,s_1)\right]dx. \quad (4)$$

Первые два слагаемых в правой части данного выражения представляют собой фиксированную стоимость принятого решения. Для минимизации среднего риска R можно получить следующую стратегию оптимальной классификации :

1. Чтобы интеграл вносил отрицательный вклад в значение риска R, все значения вектора признаков $\mathbf{x}$, для которых подынтегральное выражение является отрицательным, должны быть отнесены к подпространству X_1.

2. Чтобы интеграл вносил положительный вклад в R, все значения вектора $\mathbf{x}$, для которых подынтегральное выражение является положительным, должны быть отнесены к X_2.

3. Значения вектора $\mathbf{x}$, при которых подынтегральное выражение равно нулю, не влияют на R, поэтому их можно отнести к любому из классов.

Данное решение байесовского классификатора можно представить в следующем виде:

Если верно, что

$$p_1(c_{21}-c_{11})f_e(\mathbf{x}\,|\,s_1) > p_2\left(c_{12}-c_{22}\right)\cdot f_e(\mathbf{x}\,|\,s_2),$$

то вектор признаков $\mathbf{x}$ следует отнести к подпространству X_1 (т.е. к классу S_1), в противном случае - к подпространству X_2 (т.е. к классу S_2).

Введём следующие обозначения :

$$\lambda(x) = \frac{f_e(\mathbf{x}\,|\,S_1)}{f_e(\mathbf{x}\,|\,S_2)}.$$

$$\xi = \frac{p_2(c_{12}-c_{22})}{p_1(c_{21}-c_{11})}.$$

Величина $\lambda(x)$ называется отношением правдоподобия. Величина ξ называется пороговым значением процедуры проверки. В терминах этих величин решение байесовского классификатора можно представить следующим образом :

Если для вектора признаков $\mathbf{x}$ отношение правдоподобия $\lambda(x)$ превышает пороговый уровень ξ, то вектор $\mathbf{x}$ лежит в подпространстве X_1, в противном случае – в подпространстве X_2.

Примем равенства:

$$c_{11} = c_{22} = c_1;$$
$$c_{12} = c_{21} = c_2.$$

Тогда

$$\xi = \frac{p_2(c_2-c_1)}{p_1(c_2-c_1)} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Для упрощения анализа примем вектор $\mathbf{x}$ одномерным, тогда рассматривая классы S_1 и S_2, которые характеризуются нормальными распределениями, различающимися величинами математического ожидания μ_i, выражение для отношения правдоподобия можно записать таким образом:

$$\lambda(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{x}-\mu_1}{\sigma}\right)^2\right]}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{x}-\mu_2}{\sigma}\right)^2\right]} =$$

$$= \exp\left(\frac{\mathbf{x}\mu_1-\mathbf{x}\mu_2}{\sigma^2} - \frac{\mu_2{}^2-\mu_1{}^2}{2\sigma^2}\right).$$

Рассмотрим случай когда $p_1 = p_2$.

Получим $\xi = 1$.

На практике легче сравнивать не сами величины $\lambda(x)$ и ξ, а их логарифмы:

$$\ln(\lambda) = \frac{\mathbf{x}\mu_1-\mathbf{x}\mu_2}{\sigma^2} - \frac{\mu_2{}^2-\mu_1{}^2}{2\sigma^2}$$

и $$\ln(\xi) = 0.$$

Отсюда видно, что разделяющая гиперповерхность в данном случае является прямой, удовлетворяющей уравнению:

$$\frac{\mathbf{x}\mu_1-\mathbf{x}\mu_2}{\sigma^2} - \frac{\mu_2{}^2-\mu_1{}^2}{2\sigma^2} = 0.$$

Из данного уравнения легко определить уравнение разделяющей прямой:

$$\mathbf{x} = \frac{\mu_1+\mu_2}{2}. \tag{5}$$

Как видим, благодаря введённому условию, симметричности распределений классов S_1 и S_2, разделяющая прямая будет находиться на одинаковом расстоянии от вершин двух распределений (рис. 1) Данная прямая проходит через точку пересечения графиков нормального распределения классов S_1 и S_2).

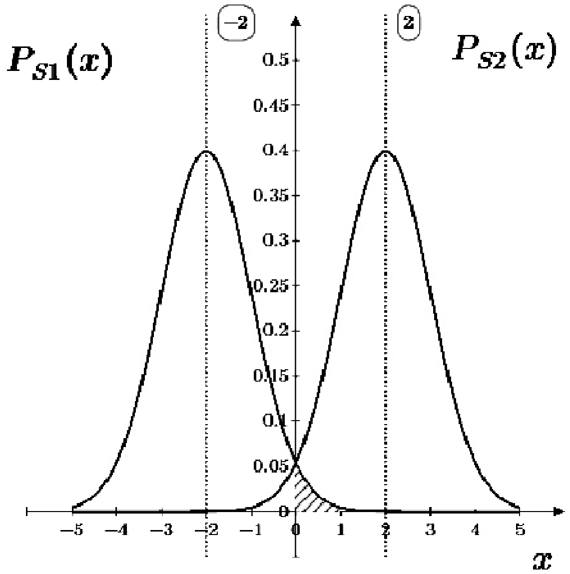

Рис. 1. К определению вероятности ошибки

Введём функцию $y(\mathbf{x})$:

$$y(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} > \frac{\mu_1+\mu_2}{2}; \\ 2, & \mathbf{x} \le \frac{\mu_1+\mu_2}{2}. \end{cases}$$

Окончательным ответом Байесовского классификатора в задаче разделения на два класса, является значение функции $y(\mathbf{x})$. Значением этой функции является метка (номер) класса, к которому алгоритм Байесовского классификатора отнёс объект, который соответствует вектору признаков $\mathbf{x}_0$.

Описав базовые принципы работы классификатора Байеса, необходимо проанализировать зависимость вероятности ошибки (неправильной классификации) от различных параметров.

Общая вероятность ошибки описывается следующей формулой:

$$P_{ош} = P(\mathbf{x} \in X_2 \mid \mathbf{x} \in S_1) \cdot P(\mathbf{x} \in S_1) + \\ + P(\mathbf{x} \in X_1 \mid \mathbf{x} \in S_2) \cdot P(\mathbf{x} \in S_2).$$

При

$$P(\mathbf{x} \in S_1) = P(\mathbf{x} \in S_2) = \frac{1}{2}$$

получим :

$$P_{ош} = \frac{1}{2} P(\mathbf{x} \in X_2 \mid \mathbf{x} \in S_1) + \frac{1}{2} P(\mathbf{x} \in X_1 \mid \mathbf{x} \in S_2).$$

В силу симметричности распределений (рис. 1) верно следующее равенство:

$$P_{ош} = P(\mathbf{x} \in X_2 \mid \mathbf{x} \in S_1).$$

Величине, стоящей в правой части данного равенства численно соответствует заштрихованная площадь (рис. 1). Данную площадь можно вычислить по следующей формуле:

$$P_{ош} = \int\limits_{\frac{\mu_1+\mu_2}{2}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Проинтегрировав данное выражение, получим зависимость вероятности ошибки, от расстояния между вершинами распределений:

$$P_{ОШ}(\mu_2 - \mu_1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{erf}\left(\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma}\right),$$

$d = \mu_2 - \mu_1$; d - расстояние между классами

Приняв $\sigma = 1$, получим зависимость вероятности ошибки от расстояния между классам (рис. 2):

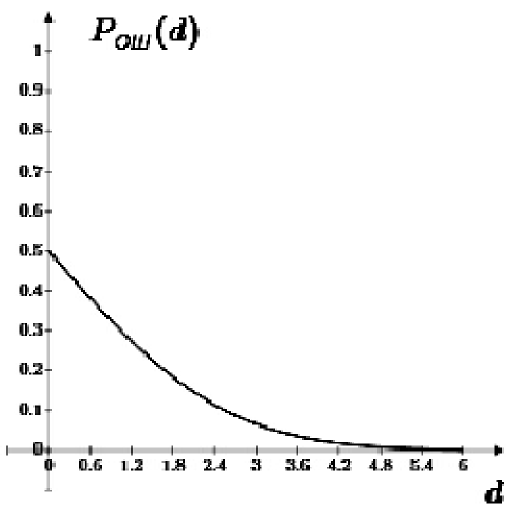

Рис. 2. Зависимость вероятности ошибки от расстояния между классами

Из графика видно, что при $d = 0$, вероятность ошибки равняется $\frac{1}{2}$. Из графика также видно, что вероятность ошибки убывает с увеличением расстояния между классами. Данный график позволяет, задаваясь допустимой величиной вероятности ошибки, определять требования к величине расстояния между классами.

Получим зависимость вероятности ошибки от значения входного вектора признаков $\mathbf{x}$. Для этого рассмотрим участок $[x; x + \Delta x]$ (рис. 3)

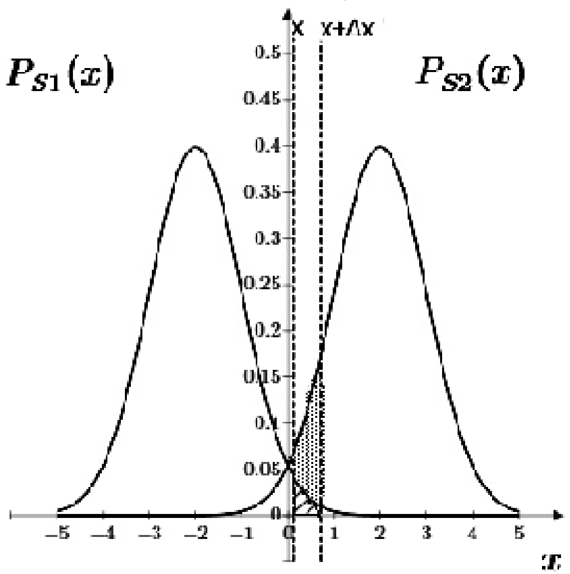

Рис. 3. К определению зависимости вероятности ошибки от входного вектора признаков

Участок заштрихованный диагональной полоской соответствует вероятности ошибки классификации объектов класса S_1.

Сумма всех заштрихованных площадей представляет собой вероятность правильной классификации объектов класса S_2. Таким образом вероятность ошибки на промежутке $[x; x + \Delta x]$ определяется формулой:

$$P_{ОШ}^{[x;x+\Delta x]} = \frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P_{S1} dx}{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P_{S1} dx + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P_{S2} dx}. \qquad (6)$$

Учитывая определение функции ошибок получим :

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P_{S1} dx = \int\limits_{0}^{x+\Delta x} P_{S1} dx - \int\limits_{0}^{x} P_{S1} dx = \\ = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+\Delta x-\mu_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu_1}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right].$$

Аналогично определяется :

$$\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P_{S2} dx = \frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+\Delta x-\mu_1}{\sqrt{2}\sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu_1}{\sqrt{2}\sigma}\right)\right].$$

В данных расчётах мы получили лишь половину искомой зависимости, ведь при переходе в левую часть Рисунка 3 (по другую сторону от разделяющей прямой) все объекты будут отнесены к классу S_1. Таким образом, ошибку в данном случае будут составлять объекты класса S_2.

Для общего случая получим следующее выражение:

$$P_{ОШ}^{[x;x+\Delta x]} = \frac{\min\left(\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P_{S1}dx, \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P_{S2}dx\right)}{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P_{S1}dx + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P_{S2}dx}.$$

Тогда искомая зависимость будет иметь следующий вид:

$$P_{ОШ}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} P_{ОШ}^{[x;x+\Delta x]}.$$

Приняв параметры распределений как

$$\sigma = 1,\ \mu_1 = -1,$$

$$u = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \cdot w_i + b\,,$$

получим соответствующий график (рис. 4).

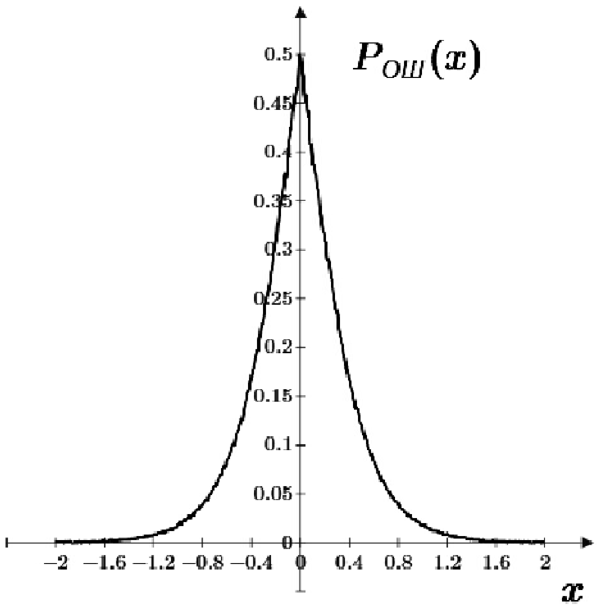

Рис. 4. Зависимость вероятности ошибки от входного вектора признаков

Выводы

В ходе исследований описанных в данной научной статье был изучен Байесовский классификатор, как один из методов решения задачи классификации. Рассмотрена величина вероятности ошибки, как одна из главных характеристик классификатора. Выведена и построена зависимость вероятности ошибки классификации, от расстояния между классами, которая позволяет предъявить требования к процессу обучения классификатора. Получено и исследовано выражение зависимости вероятности ошибки от значения входного вектора признаков. Данные зависимости могут быть использованы в различных задачах машинного обучения, в частности, в распознавании образов.

Список литературы

1. Хайкин С. Нейронные сети : Полный курс, второе издание / Саймон Хайкин. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.

2. Левин Б.Р. Теоретические основы статической радиотехники. В трёх кн. / Б.Р. Левин. – М.: Сов. радио, 1976. – Кн. 3. – 288 с.

3. Шапиро Л. Компьютерное зрение = Computer Vision / Л. Шапиро, Дж. Стокман. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2006. – 752 с.

4. Лукьяница А.А. Цифровая обработка видеоизображений / А.А. Лукьяница, А.Г. Шишкин. – М.: Ай-Эс-Эс Пресс, 2009. – 518 с.

5. Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения / С.Ю. /Желтов и др. – М.: Физматкнига, 2010. – 672 с.

Надійшла до редколегії 23.06.2016

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Г.А. Кучук, Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків.

АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ БАЙЄСОВА КЛАСИФІКАТОРА

Ю.І. Лосев, Ю.В. Волков

Розглядається одна з головних задач машинного навчання – завдання класифікації. Описуються базові принципи побудови та використання класифікатора Байеса. Розроблено математичну модель Байєсова класифікатора, адекватно описує процес прийняття рішень. На основі розробленої моделі досліджено залежності ймовірності помилки класифікатора від різних параметрів.

Ключові слова:. *класифікатор, нормальний закон розподілу, функція помилок.*

ANALYSIS OF THE EFFECTIVENESS OF BAYESIAN CLASSIFIER

Yu.I. Losev, Yu.V. Volkov

One of the main tasks of machine learning – the problem of classification was considered. Principles of construction and usage of the Bayesian classifier were described. Was developed the mathematical model of Bayesian classifier that describes the decision-making process. On the base of developed model were explored dependencies of error probability from different parameters.

Keywords*: classifier, normal distribution, error function.*