УДК 621.396.26

Ю.Н. Корж[1], А.И. Тыртышников[1], С.В. Сомов[1], П.Н. Гроза[1], О.В. Тесленко[2]

[1] *Полтавский национальный технический университет имени Юрия Кондратюка, Полтава*
[2] *Харьковский национальный экономический университет имени Семена Кузнеца, Харьков*

ЭФФЕКТИВНОСТЬ НЕРЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ ПРЕДСКАЗАНИЯ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

В статье оценена эффективность нерекурсивных цифровых фильтров предсказания по критерию минимума среднеквадратичной ошибки в условиях нестационарных случайных процессов. Показано, что в таком случае точность оценки зависит от порядка фильтра и ухудшается с увеличением скорости изменения дисперсии процесса.

Ключевые слова: *цифровой фильтр, ошибка предсказания, случайный коррелированный процесс.*

Введение

Задача прогнозирования случайных процессов (СП) в условиях структурной и параметрической неопределенности в настоящее время является актуальной и находит широкое применение в различных исследованиях как технического, так и математического направления [1; 3; 8].

Поведение многих сложных систем определяют различные факторы, такие как нестационарность прогнозируемых последовательностей, высокий уровень априорной и текущей неопределённости, нелинейность, непредсказуемые «скачки» в показателях.

Задача оценивания параметров коррелированного СП решается с помощью фильтров предсказания [1; 4; 6], которые, используя статистическую связь отсчётов, позволяют посредством весового суммирования получить с приемлемой точностью оценку требуемого параметра.

Сегодня такие фильтры – это неотъемлемая составляющая оборудования радиоэлектронных систем различного назначения: адаптивных антенных и акустических решеток; компенсаторов сигналов электрического эха в системах проводной связи; компенсаторов сигналов акустического эха в системах голосовой связи; эквалайзеров каналов связи в модемах; выравнивателей акустических каналов в системах высококачественного воспроизведения звука; компенсаторов шумов.

Эффективность функционирования (длительность переходного процесса, уровень ошибок в установившемся режиме) устройств зависит от алгоритма, лежащего в основе используемого фильтра. Основной показатель качества фильтра предсказания – среднеквадратичная ошибка предсказания σ_e.

Линейный предсказатель дает оптимальное по критерию минимума σ_e предсказание только для стационарных случайных процессов (ССП). Если характеристики ССП (математическое ожидание, дисперсия и пр.) удалось с заданной степенью точности найти, то задача прогноза становится достаточно простой.

Поэтому большинство известных нерекурсивных и рекурсивных алгоритмов, используемых в фильтрах предсказания, ориентировано на оценивание ССП. Простые градиентные алгоритмы (Least Mean Squares, LMS), как правило, используются при аппаратной реализации адаптивных фильтров. Сложные RLS (Recursive Least Squares) и FAP (Fast Affine Projections)-алгоритмы в основном ориентированы на программную реализацию [2].

На практике большинство процессов являются нестационарными, и получение оптимальных оценок усложняется. Это связано с тем, что, как правило, априори неизвестны характер нестационарности и закон её изменения во времени.

Существующие способы: сведения нестационарного случайного процесса (НСП) к стационарному за счёт низкочастотной фильтрации [6]; разбитие на участки стационарности; выделение тренда среднего фильтровыми или регрессионными методами с последующим определением характера нестационарности (быстрая, медленная) [10] требуют анализа индивидуальных характеристик конкретного процесса.

Рекуррентное же оценивание по Калману, несмотря на многочисленные модификации [7; 10], сводится к решению задачи динамического программирования, что в целом является довольно громоздкой задачей.

Таким образом, представляет интерес оценить эффективность применения фильтра с конечной импульсной характеристикой, который достаточно просто реализуется как аппаратно, так и программно для ССП, при оценке значений НСП.

Эффективность фильтра предсказания

Для решения поставленных задач в дальнейшем будем рассматривать процессы с непрерывными состояниями и дискретным временем.

Случайный процесс с дискретным временем называют стационарным, если распределение величин Y_{t1}, Y_{t2},…, Y_{tn} совпадает с распределением Y_{t1+t}, Y_{t2+t},…, Y_{tn+t} для любого конечного множества целых чисел $\{t_1,\dots t_n\}$ и любого целого t [5]. Случайная функция X(t) называется *стационарной в широком смысле*, если ее математическое ожидание постоянно, а корреляционная функция зависит только от разности аргументов t_1 и t_2: $R[x(t_1,t_2)] = R[x(\tau)]$, где $\tau = t_2 - t_1$. Случайная функция X(t) называется *стационарной в узком смысле*, если ее n-мерный закон распределения при любом *n* зависит только от интервалов t_2-t_1, и совсем не зависит от положения этих интервалов в области изменения аргумента t. В практических задачах обычно применяют понятие стационарной функции в широком смысле [8]. Итак, для ССП характерна неизменность во времени его основных вероятностных характеристик, таких, как математическое ожидание и дисперсия.

Одним из важнейших свойств ССП является эргодичность, состоящая в том, что каждая отдельная реализация СП является как бы полномочным представителем всей совокупности возможных реализаций, что позволяет по одной реализации находить все необходимые характеристики СП. Понятно, что оценки этих величин с увеличением размера выборки будут только улучшаться и приближаться к их истинным значениям.

Нестационарные процессы, в противоположность стационарным, отличаются тем, что они меняют во времени все свои характеристики. Иначе говоря, у НСП в принципе не может быть математического ожидания и, каких либо других характеристик, присущих ССП. Зачастую данная проблема или игнорируется, или рассматривается вскользь. Все взаимосвязи и взаимозависимости объекта прогнозирования меняются во времени. Таким образом, под НСП понимаются неоднородные во времени процессы, характеристики которых необратимо меняются с течением времени t так, что они являются вариантными относительно временных сдвигов [8].

В задаче предсказания необходимо предсказать текущее значение сигнала y(n) по его известным предыдущим отсчетам. Отсюда можно сделать вывод, что линейное предсказание – это вычислительная процедура, позволяющая по некоторой линейной комбинации предшествующих взвешенных отсчетов недетерминированного сигнала предсказать (с определенной точностью) будущее значение отсчета.

С целью сравнительного анализа эффективности фильтра предсказания в зависимости от его структуры и порядка получим выражения для расчёта нормированной по дисперсии собственных шумов или случайного процесса минимальной ошибки предсказания для различных уровней мощности и ширины спектра случайного процесса. Рассмотрим устройство оценки в виде нерекурсивного фильтра порядка N, структура которого приведена на рис. 1.

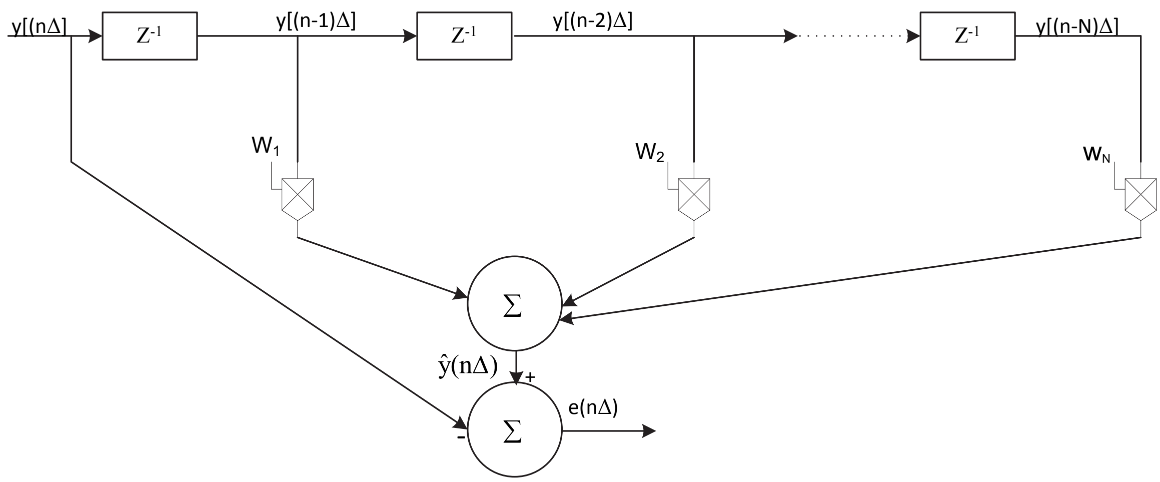


Рис. 1. Структурная схема нерекурсивного фильтра предсказания

Здесь: $\dot y(n) = \dot y_п(n) + \dot y_ш(n)$ – n-й отсчёт комплексной амплитуды принимаемых в n-м тактовом интервале Δ СП и аддитивных собственных шумов.

Таким образом, оценка комплексной амплитуды $\hat{y}(n)$ n-го отсчёта СП образуется после линейного весового суммирования его предыдущих N значений.

Соответственно

$$\hat{y}(n) = \sum_{k=1}^{N} \dot y(n-k) w_k \,, \qquad (1)$$

где w_k – весовые коэффициенты фильтра.

В матрично-векторной форме выражение (1) можно записать в виде:

$$\hat{y}(n) = \dot{Y}^T(n)\dot{\mathbf{W}}, \qquad (2)$$

где $\dot{Y}^T(n) = \|y[(n-1)], y[(n-2)], \ldots, y[(n-N)]\|$, $\dot{\mathbf{W}}^T = \|w_1, w_2, \ldots, w_N\|$ – вектор-столбцы комплексных амплитуд входных отсчётов и весовых коэффициентов фильтра соответственно.

Здесь и далее верхний индекс T обозначает транспонирование вектора.

В свою очередь, ошибка оценивания определяется как [9]:

$$e(n) = \dot{y}(n) - \dot{Y}^T(n)\dot{\mathbf{W}}. \qquad (3)$$

Соответственно дисперсия ошибки оценивания

$$\sigma_e^2(n) = \langle e^2(n)\rangle = \langle(\dot{y}(n) - \hat{y}(n))(\dot{y}(n) - \hat{y}(n))^*\rangle =$$
$$= \langle(\dot{y}(n) - \dot{\mathbf{W}}^T\dot{Y}(n))(\dot{y}(n) - \dot{\mathbf{W}}^T\dot{Y}(n))^*\rangle =$$
$$= \langle\dot{y}(n)\dot{y}(n)^*\rangle - 2\dot{\mathbf{W}}^T\langle\dot{y}(n)\dot{Y}(n)\rangle +$$
$$+\dot{\mathbf{W}}^T\langle\dot{Y}^*(n)\dot{Y}^T(n)\rangle\dot{\mathbf{W}}.$$

Здесь: <·>, * – операции статистического усреднения и комплексного сопряжения соответственно.

Для стационарного случайного процесса

$$\sigma_e^2 = \sigma_{пш}^2 - 2\dot{\mathbf{W}}^T\ \dot{\mathbf{P}}\ +\ \dot{\mathbf{W}}^T\ \Phi_{пш}\ \dot{\mathbf{W}}, \qquad (4)$$

где $\sigma_{пш}^2 = \langle\dot{y}(n)\dot{y}(n)^*\rangle = \sigma_п^2 + \sigma_ш^2$ – дисперсия статистически независимой помехи и собственного шума; $\dot{\mathbf{P}}^T = \langle\dot{y}(n)\dot{\mathbf{U}}^T(n)\rangle$ – вектор-столбец взаимных ковариаций между оцениваемым отсчётом и отсчётами, которые подвергаются весовому суммированию; $\mathbf{\Phi}_{пш} = <\dot{Y}^*\ \dot{Y}^T>$ – автоковариационная матрица СП и шума с элементами

$$\varphi_{пш}^{i,k} = <\dot{y}_{пш}^i \dot{y}_{пш}^{k*}> = \sigma_п^2\rho_{ik} + \sigma_ш^2\delta_{ik};\ i, k = 1, N,$$

где ρ_{ik} – коэффициент корреляции СП между i и k отсчётами, δ_{ik} – символ Кронекера.

Из уравнения $\partial\sigma_e^2/\partial\dot{\mathbf{W}}^T = 0$ можно определить весовой вектор, обеспечивающий минимальную дисперсию ошибки предсказания [1].

Дифференцируя (4) по вектору весовых коэффициентов фильтра, получаем известное соотношение Винера-Хопфа

$$\dot{\mathbf{W}}_{опт}^T = \mathbf{\Phi}_{пш}^{-1}\dot{\mathbf{P}} \qquad (5)$$

или, в другой форме записи

$$\mathbf{\Phi}_{пш}\ \dot{\mathbf{W}}_{опт}^T = \dot{\mathbf{P}}. \qquad (6)$$

Подставляя (6) в (4), получаем выражения для минимальной дисперсии ошибки оценивания

$$\sigma_{e\ мин}^2 = \sigma_{пш}^2 - \dot{\mathbf{W}}_{опт}^T\ \dot{\mathbf{P}} = \dot{\mathbf{P}}^{\mathbf{T}}\ \mathbf{\Phi}_{пш}^{-1}\ \dot{\mathbf{P}}, \qquad (7)$$

$$\sigma_{e\ мин}^2 = \sigma_{пш}^2 - \dot{\mathbf{W}}_{опт}^T\ \mathbf{\Phi}_{пш}\ \dot{\mathbf{W}}_{опт(r)}. \qquad (8)$$

Нормированные, относительно дисперсий собственных шумов и СП, значения $\sigma_{e\ мин}^2$ представляются в виде

$$\frac{\sigma_{e\ мин}^2}{\sigma_ш^2} = 1 + b - \dot{\mathbf{W}}_{опт}^T\ \mathbf{\Phi}'_{пш}\ \dot{\mathbf{W}}_{опт}, \qquad (9)$$

$$\frac{\sigma_{e\ мин}^2}{\sigma_п^2} = 1 + 1/b - \dot{\mathbf{W}}_{опт}^T\ \mathbf{\Phi}''_{пш}\ \dot{\mathbf{W}}_{опт}, \qquad (10)$$

где $b = \sigma_п^2/\sigma_ш^2$, $\varphi_{пш}^{ik'} = b\rho_{ik} + \delta_{ik}$, $\varphi_{пш}^{ik''} = \rho_{ik} + \delta_{ik}/b$.

Полученные выше выражения, при известных статистических характеристик ССП, позволяют рассчитать минимально возможную среднеквадратическую ошибку оценивания отсчётов СП и таким образом оценить эффективность фильтра предсказания.

Можно сделать вывод, что потенциальная точность оценки комплексной амплитуды ССП зависит от порядка предсказывающего фильтра, степени статистической взаимосвязи отсчётов (коэффициента корреляции, ширины спектра) и дисперсии СП.

Реализация имитационной модели случайного процесса

Для формирования квадратурных компонент коррелированных отсчётов СП y(t) применялась имитационная модель дискретного случайного процесса скользящего среднего порядка q. Соответственно косинусные и синусные компоненты – мгновенные значения СП вычисляются в выражении

$$y_t^{C(S)} = \sum_{k=0}^{q} d_k Z_{k+\zeta t}^{C(S)}, \qquad (11)$$

где $d_k = e^{-2\pi(k-\frac{q}{2})^2}$ – весовые коэффициенты равные значению формирующего фильтра в соответствующих точках отсчета k = 0…q-1; Z_i – независимые случайные гауссовские величины с нулевым математическим ожиданием. Значение ζ определяет степень статистической взаимосвязи отсчётов процесса, т.е. корреляционной функции

$$R(\tau) = R(0)e^{-(\frac{\tau}{\tau_k})^2}, \qquad (12)$$

где τ_k – интервал корреляции и спектральной плотности

$$S(F) = S(0)e^{-\pi(\frac{F}{П})^2}, \qquad (13)$$

где П – энергетическая ширина спектра процесса связанная с τ_k соотношением τ_k П = 1.

На рис. 2 приведены расчётные (для статистического усреднения использовалось 10^4 реализаций) и теоретические по формуле (12) зависимости нормированной корреляционной функции СП ρ(τ).

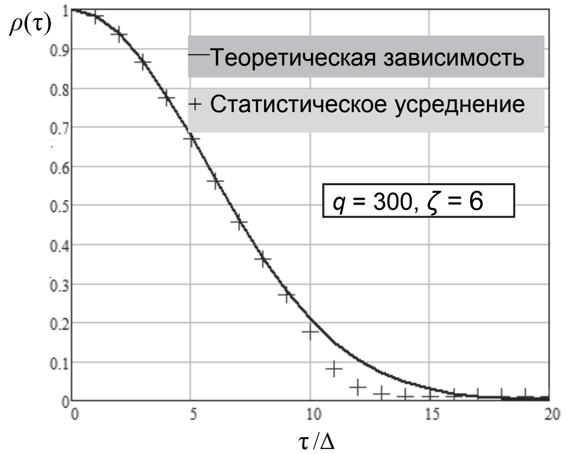
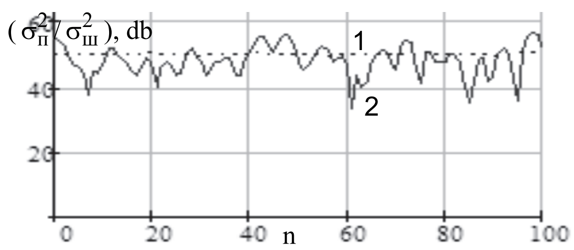


Рис. 2. Расчётная и теоретическая нормированные корреляционные функции ССП

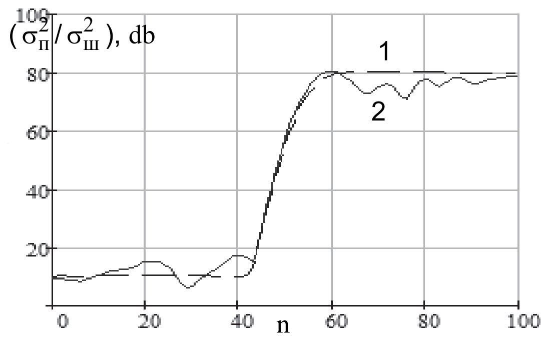
Таким образом, далее используем для исследований модель СП с заранее известными статистическими характеристиками.

На рис. 3, а приведена одна из реализаций центрированного ССП с дисперсией 50 db по уровню спектральной плотности собственных шумов и интервалом корреляции 7Δ по уровню 0,5 нормированной корреляционной функции СП.

Для формирования нестационарного по дисперсии СП применялось ступенчатое, начиная с некоторого отсчёта, изменение уровня мощности Z_i. Реализация результатов моделирования НСП с изменением дисперсии с 10 до 80 db приведена на рис. 3, б.



а



б

Рис. 3. Реализации ССП и НСП:

1 – закономерная зависимость дисперсии СП;

2 – реализация СП

Основные результаты эксперимента

Используя для расчёта весового вектора соотношение (5), т.е. известную статистику ССП, находили ошибку предсказания по формуле (3) и нормировали её по уровням собственных шумов и СП. Усреднённые по 10^3 реализациям результаты обработки НСП в фильтре десятого порядка приведены на рис. 4.

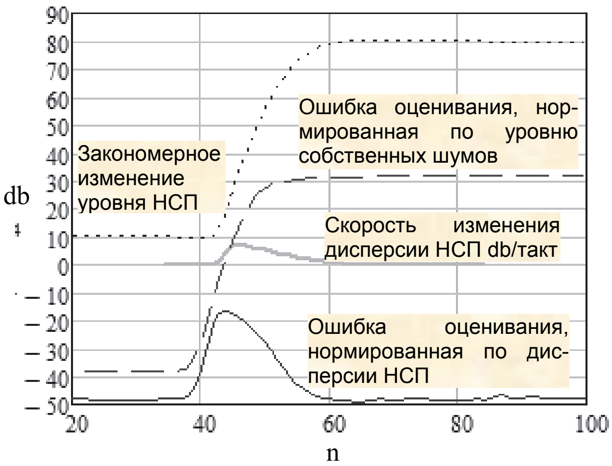


Рис. 4. Результаты обработки НСП в фильтре предсказания

Можно отметить, что ошибка предсказания, нормированная по уровню СП, достигает максимума для наибольшей скорости изменения дисперсии НСП. Закономерность зависимости этого максимума относительно уровня ошибки для участков стационарности от скорости изменения дисперсии показана на рис. 5.

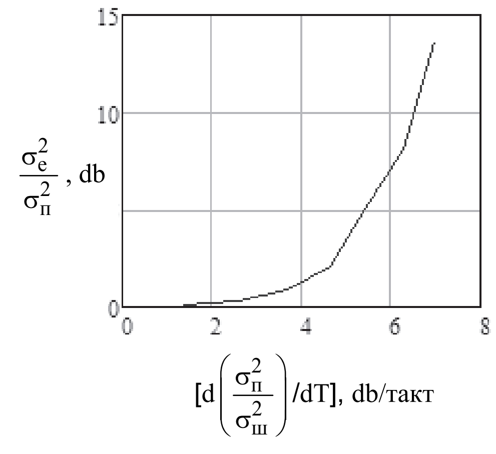


Рис. 5. Зависимость относительной ошибки предсказания от скорости изменения дисперсии СП

Влияние порядка фильтра N на максимальную ошибку предсказания демонстрируют зависимости на рис. 6. Видно, что начиная с 5-6 порядка фильтра, точность оценивания отсчётов НСП практически не изменяется.

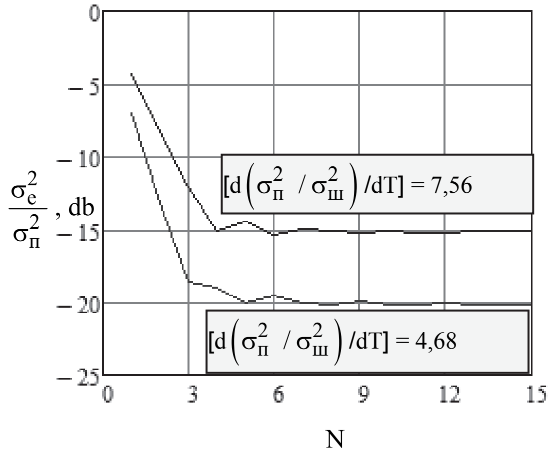


Рис. 6. Зависимость ошибки предсказания от порядка фильтра предсказания и скорости изменения дисперсии НСП

Выводы

По результатам имитационного моделирования можно сделать следующие выводы.

1. Ошибка оценивания нестационарного по дисперсии СП фильтром, весовой вектор которого рассчитывался по известным статистическим характеристикам ССП, существенно зависит от скорости изменения дисперсии процесса.

2. Приращение эффективности фильтра предсказания становится пренебрежимо малым, начиная с порядка фильтра более 5 … 6, практически во всем диапазоне изменения дисперсии и ширины спектра СП.

3. Расчет σ_e для реализаций нестационарного случайного процесса показал, что проводя оценку фильтром, рассчитанным для участков стационарности можно получить приемлемую во многих случаях точность оценки и для интервалов нестационарности.

Список литературы

1. Уидроу Б. Адаптивная обработка сигналов: пер. с англ. / Б. Уидроу, С. Стирнз. – М. : Радио и связь, 1989. – 440 с.

2. Джиган В.И. Быстрый RLS-алгоритм линейно-ограниченной адаптивной фильтрации нестационарных сигналов / В.И. Джиган // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. – 2005. – №2. – С. 72-80.

3. Радиоэлектронные системы: основы построения и теория. Справочник / Под ред. проф. Я.Д. Ширмана. – М.: ЗАО «МАКВИС», 1998. – 828 с.

4. Солонина А.И. Алгоритмы и процессоры цифровой обработки сигналов / А.И. Солонина, Д.А. Улахович, Л.А. Яковлев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 464 с.: ил.

5. Справочник по математике для экономистов: учеб. пособие / Под ред. проф. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРАМ, 2007. – 361 с.

6. Кагановский Ю.Д. Применение модели линейного предсказания для анализа стохастических сигналов / Ю.Д. Кагановский // Технические науки: традиции и инновации: материалы Междунар. науч. конф. – Челябинск: 2012. – С. 12-14.

7. Diniz P. S. R. Adaptive filtering algorithms and practical implementation. Third edition. – New York, Springer Science + Business Media, 2008. – 627 p.

8. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. 2-е изд., перераб. и доп. / В.И. Тихонов. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.

9. Корж Ю.Н. Оценка эффективности симметричных цифровых нерекурсивных фильтров предсказания / Ю.Н. Корж, С.В. Сомов, В.Н. Курчанов // Системи обробки інформації. – Х.: ХУПС, 2016. – Вип. 1(138). – С. 22-25.

10. Медведев Г.А., Морозов В.А. Практикум на ЭВМ по анализу временных рядов [Электронный ресурс]: Учебное пособие. – Мн.: "Электронная книга БГУ", 2003.

Поступила в редколлегию 25.02.2017

Рецензент: д-р техн. наук проф. О.Л. Ляхов, Полтавский государственный технический университет, Полтава.

ЕФЕКТИВНІСТЬ НЕРЕКУРСИВНИХ ФІЛЬТРІВ ПЕРЕДБАЧЕННЯ ДЛЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Ю.М. Корж, О.І. Тиртишніков, С.В. Сомов, П.Н. Гроза, О.В. Тесленко

У статті проведено оцінювання ефективність нерекурсивних цифрових фільтрів передбачення за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки в умовах нестаціонарних випадкових процесів. Показано, що в такому випадку точність оцінювання залежить від порядку фільтра і погіршуються із збільшенням швидкості зміни дисперсії процесу.

Ключові слова: *цифровий фільтр, помилка передбачення, випадковий корельований процес.*

EFFICIENCY OF NON-RECURSIVE FILTERS OF PREDICTION FOR NON-STATIONARY CASUAL PROCESSES

Y.N. Korzh, A.I. Tyrtyshnikov, S.V. Somov, P.N. Groza, O.V. Teslenko

In the article efficiency of non-recursive digital filters of prediction on the criterion of minimum of middling quadratic error is appraised in the conditions of casual transients. It is shown that at that rate exactness of estimation depends on the order of filter and gets worse with the increase of speed of change of dispersion of process.

Keywords: *digital filter, error of prediction, casual correlated process.*