УДК 681.5.013 DOI: 10.30748/soi.2018.152.05

Ю.И. Дорофеев, А.А. Никульченко

Национальный технический университет «ХПИ», Харьков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНО ДОПУСТИМОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ ПРИ СИНТЕЗЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ В СЕТЯХ ПОСТАВОК

В статье предложен подход к решению задачи определения максимально допустимой величины запаздывания в сетях поставок с неопределенными задержками поставок в условиях неизвестного, но ограниченного внешнего спроса. С помощью дескрипторного преобразования дискретной модели узла сети поставок в пространстве состояний и построения функционала Ляпунова-Красовского, зависящего от величины интервала запаздывания, получено условие существования гарантирующего регулятора, который минимизирует верхнее граничное значение квадратичного критерия качества. Построение функционала выполнено на основе разбиения интервала запаздывания на два неравных подынтервала. Для выбора настраиваемого параметра, определяющего точку разбиения, предложен вычислительный алгоритм. С помощью техники линейных матричных неравенств рассмотренная задача сведена к задаче полуопределенного программирования. Рассмотрен численный пример.

Ключевые слова: *дискретная модель с запаздыванием, гарантирующее управление, дескрипторная модель, функционал Ляпунова-Красовского, линейное матричное неравенство, задача полуопределенного программирования.*

Введение

Характерной особенностью систем производства-хранения-распределения ресурсов является наличие запаздывания между моментом формирования заказа на пополнение запасов и поступлением заказанных ресурсов на склад. Запаздывания возникают вследствие затрат времени на переработку сырья и полуфабрикатов в узлах сети, наличия технологических ограничений системы коммуникаций, затрат времени на транспортировку ресурсов между узлами сети. Поскольку наличие запаздывания по управлению является причиной потери устойчивости либо ухудшения качества работы системы, проблемам анализа устойчивости и синтеза регуляторов для систем с временными задержками уделяется значительное внимание [1].

В последнее время отмечается повышенный интерес к проблеме анализа устойчивости линейных дискретных систем с неизвестным, но ограниченным запаздыванием, для которых получен ряд условий устойчивости [2]. В то время как для систем без запаздывания методы анализа устойчивости основаны на существовании строго убывающей функции Ляпунова (ФЛ), классическая теория Ляпунова не применима напрямую к системам с запаздыванием. Это связано с тем, что влияние запаздывающих состояний может вызвать нарушение условия монотонного убывания, которому удовлетворяет стандартная ФЛ. Поэтому для анализа устойчивости систем с запаздыванием вместо функций Ляпунова вводятся функционалы Ляпунова-Красовского (ФЛК), обладающие аналогичными свойствами. Однако, долгое время отсутствовали алгоритмы построения таких функционалов. Только после того, как исследователи стали применять технику линейных матричных неравенств (ЛМН) и были развиты вычислительные методы, основанные на идеях выпуклой оптимизации, удалось упростить процесс построения ФЛК, что способствовало развитию данного метода.

Одна из главных проблем связана с анализом влияния величины запаздывания на устойчивость замкнутой системы. С использованием техники ЛМН получена оценка максимально допустимой верхней границы (МДВГ) величины запаздывания, при которой сохраняется устойчивость системы [3]. Соответственно, полученная МДВГ выступает в качестве ключевого показателя эффективности при оценивании степени «консерватизма» критериев устойчивости, зависящих от величины запаздывания. Консерватизм проявляется в том, что получаемые значения МДВГ оказываются неоправданно заниженными. Существуют два основных фактора, приводящие к консерватизму полученных результатов: способ преобразования исходной математической модели системы с запаздыванием и техника построения ФЛК.

Для уменьшения степени консерватизма критериев устойчивости предложены новые методы, в частности, метод дескрипторного преобразования системы [4], метод свободной весовой матрицы [5] и другие. Суть критериев устойчивости состоит в проверке вариации значений ФЛК в течение всего интервала запаздывания. В противоположность такому подходу в работе [6] для получения менее консервативных условий устойчивости интервал запаздывания разбивается на множество эквидистантных подынтервалов. Путем проверки вариации значений ФЛК на подынтервалах получены новые критерии устойчивости, зависящие от величины запаздывания. Основное преимущество такого способа построения ФЛК заключается в возможности выбирать различные весовые матрицы на разных подынтервалах, что позволяет уменьшить степень консерватизма полученных результатов. На основе идеи о декомпозиции интервала запаздывания в работе [7] предложено делить интервал на два неравных подынтервала, причем точка деления является настраиваемым параметром. Показано, что полученное условие устойчивости является менее консервативным, поскольку позволяет получить большее значение МДВГ запаздывания по сравнению с другими критериями. Однако, полученные результаты не могут быть напрямую применены к сетям поставок, поскольку при построении модели авторы не рассматривали внешние возмущения, а также не вводили критерий качества управления.

Указанные обстоятельства обуславливают необходимость разработки подхода к оцениванию максимально допустимого запаздывания в сетях поставок с неопределенными задержками поставок в условиях неизвестного, но ограниченного внешнего спроса на основе декомпозиции интервала запаздывания с использованием дескрипторного преобразования модели производственной системы и построения функционала Ляпунова-Красовского, зависящего от величины запаздывания.

Постановка задачи. Рассмотрим дискретную модель производственной системы с задержками поставок, которая описывается разностным уравнением с запаздыванием

$$x(k+1) = x(k) + Bu(k-h(k)) + Gd(k), \tag{1}$$

где $x(k) \in \mathbf{R}^n$ – вектор состояний, компоненты которого описывают наличные уровни запасов ресурсов; n – количество видов ресурсов; $u(k) \in R^m$ – вектор управляющих воздействий, компоненты которого описывают размеры заказов на поставку ресурсов; $d(k) \in R^q$ – вектор внешних возмущений, описывающий размеры внешнего спроса; $B \in R^{n \times m}$, $G \in R^{n \times q}$ – известные матрицы влияния управлений и возмущений, соответственно; $h(k)$ – целое положительное число, кратное периоду дискретизации, которое определяет величину запаздывания и предполагается неизвестным, изменяющимся с течением времени и удовлетворяющим неравенству

$$0 \le h(k) \le h_m, \tag{2}$$

где значение h_m известно.

Одним из подходов к решению задачи управления запасами в условиях неопределенности спроса является использование концепции «неизвестных, но ограниченных» воздействий, в соответствии с которой неопределенность спроса описывается с помощью набора интервалов, в пределах которых компоненты векторной функции $d(k)$ принимают значения произвольным образом. В результате внешние возмущения удовлетворяют ограничениям

$$d(k) \in D = \{d \in R^q : 0 \le d^{min} \le d \le d^{max}\}, \tag{3}$$

где векторы граничных значений спроса d^{min} и d^{max} считаются известными.

Управление запасами заключается в определении моментов времени формирования заказов и размеров заказов на восполнение запасов. В работе используется модель периодической проверки, которая предполагает контроль уровня запасов и формирование заказов в каждом периоде.

Традиционным средством управления в условиях неопределенности спроса является создание страховых запасов, размеры которых вычисляются на основе верхних граничных значений спроса с учетом максимальной величины запаздывания

$$x^* = h_m d^{max}. \tag{4}$$

Предполагается, что уровни наличных запасов ресурсов доступны для измерения. Тогда закон управления строится в виде линейной обратной связи по рассогласованию между наличными и страховыми уровнями запасов ресурсов

$$u(k) = K(x(k) - x^*), \tag{5}$$

где $K \in R^{m \times n}$ – матрица коэффициентов обратной связи. Тогда уравнение замкнутой системы для управления (5) примет вид

$$x(k+1) = x(k) + BK(x(k-h(k)) - x^*) + Gd(k). \tag{6}$$

Критерий качества для бесконечного временного горизонта выбран в виде

$$J_\infty(k) = \sum_{t=k}^{\infty} \beta^t ((x(t)-x^*)^T W_x (x(t)-x^*) + u^T(t) W_u u(t)), \tag{7}$$

где $0 \prec W_x \in R^{n \times n}$, $0 \prec W_u \in R^{m \times m}$ – диагональные весовые матрицы; $0 < \beta < 1$ – коэффициент дисконтирования. Первое слагаемое в (7) определяет размеры штрафов за отклонение текущих уровней запасов ресурсов от страховых, второе – стоимость производства и хранения ресурсов; наличие множителя β^t обеспечивает ограниченность критерия на бесконечном временном интервале.

Для системы (1) с ограничениями (2–3) необходимо решить задачу определения МДВГ запаздывания h_m, при которой:

1) для любого допустимого спроса $d(k) \in D$ $\forall k \ge 0$ сохраняется асимптотическая устойчивость

замкнутой системы (6) при условии удовлетворения спроса на ресурсы, то есть выполнения требования неотрицательности значений состояний

$$x(k) \in X = \{x \in R^n : \ 0 \le x\}; \qquad (8)$$

2) обеспечивается гарантированная стоимость управления, которая означает, что значение критерия качества (7) для замкнутой системы не превысит некоторого граничного значения J^*.

Дескрипторное преобразование модели. Если при построении моделей объектов управления вводятся дополнительные переменные состояний, которые алгебраически связаны с основными переменными, такие системы называют дескрипторными. Из-за наличия дополнительных связей между переменными состояний дескрипторные модели приобретают свойства, не характерные для традиционного способа описания систем.

Введем дополнительную переменную [4]:

$$y(k) = x(k+1) - x(k) \qquad (9)$$

и выполним дескрипторное преобразование замкнутой системы (6):

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ 0_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(k)+y(k) \\ -y(k)+BK(x(k-h(k))-x^*)+Gd(k) \end{bmatrix},$$

где 0_n – нулевой вектор размерности n.

Нетрудно убедиться, что выполняется

$$x(k-h(k)) = x(k) - \sum_{i=k-h(k)}^{k-1} y(i). \qquad (10)$$

С учетом (10) представим модель в виде

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ 0_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x(k)+y(k) \\ -y(k)+BKx(k)-BKx^*-BK\sum_{i=k-h(k)}^{k-1} y(i)+Gd(k) \end{bmatrix}.$$

Построим составной вектор состояний дескрипторной модели $\xi(k) = \begin{bmatrix} x(k)-x^* \\ y(k) \end{bmatrix}$ и введем обозначения: $E = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ BK & -I_n \end{bmatrix}$, $\overline{B} = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} \\ BK \end{bmatrix}$, $\overline{G} = \begin{bmatrix} 0_{n\times q} \\ G \end{bmatrix}$, где $0_{n\times m}$ – нулевая матрица соответствующей размерности.

Окончательно получим дескрипторную модель системы, замкнутой управлением (5), в виде

$$E\xi(k+1) = A\xi(k) - \overline{B}\sum_{i=k-h(k)}^{k-1} y(i) + \overline{G}d(k). \qquad (11)$$

Таким образом, если последовательность $x(k),\ k = 0,1,2,...$ является решением системы (6), тогда $col\{x(k)-x^*, y(k)\},\ k = 0,1,2,...,$ где $y(k)$ определяется в соответствии с (9), является решением системы (11) и наоборот.

Изложение основного материала

Гарантирующими [8] называют управляющие воздействия, при которых гарантируется минимизация верхнего граничного значения показателя качества при любых допустимых возмущениях и любом варианте реализации неопределенности модели, то есть выполняется

$$J^* = \inf_{u(k)} \sup_{d(k)\in D,\, 0\le h(k)\le h_m} J_\infty(k).$$

Для того, чтобы функционал (7) был конечен, необходимо и достаточно, чтобы замкнутая система (11) была устойчива. Разделим интервал запаздывания $[k-h_m, k-1]$ на два неравных подынтервала $[k-h_m, k-\alpha-1]$ и $[k-\alpha, k-1]$, где $0<\alpha<h_m$ – настраиваемый параметр. Определим блочные матрицы $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_2^T & \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}$ и $Q_i = \begin{bmatrix} Q_{i1} & Q_{i2} \\ Q_{i2}^T & Q_{i3} \end{bmatrix}$, где $0 \prec \mathbf{P}_i \in R^{n\times n}$, $0 \prec Q_{ij} \in R^{n\times n}$, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1^T$, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3^T$, $Q_{i1} = Q_{i1}^T$, $Q_{i3} = Q_{i3}^T$, и матрицы $0 \prec \mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i^T \in R^{n\times n}$, $i = 1,2,3$. Построим для дескрипторной системы (11) функционал Ляпунова-Красовского, зависящий от величины интервала запаздывания:

$$V(k) = V_1(k) + V_2(k) + V_3(k), \qquad (12)$$

$$V_1(k) = \beta^k \xi^T(k)\mathbf{EPE}\,\xi(k) = \beta^k(\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}^*)^T\mathbf{P}_1(\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}^*), \qquad (13)$$

$$V_2(k) = \beta^k\left(\sum_{i=k-\alpha}^{k-1}(\mathbf{x}(i)-\mathbf{x}^*)^TQ_{11}(\mathbf{x}(i)-\mathbf{x}^*) + \sum_{i=k-h_m}^{k-1-\alpha}(\mathbf{x}(i)-\mathbf{x}^*)^TQ_{21}(\mathbf{x}(i)-\mathbf{x}^*) + \sum_{i=k-h(k)}^{k-1}(\mathbf{x}(i)-\mathbf{x}^*)^TQ_{31}(\mathbf{x}(i)-\mathbf{x}^*)\right), \qquad (14)$$

$$V_3(k) = \beta^k\left(\sum_{i=-\alpha}^{-1}\sum_{j=k+i}^{k-1}\mathbf{y}^T(j)\mathbf{Z}_1\mathbf{y}(j) + \sum_{i=-h_m}^{-1-\alpha}\sum_{j=k+i}^{k-1}\mathbf{y}^T(j)\mathbf{Z}_2\mathbf{y}(j) + \sum_{i=-h(k)}^{-1}\sum_{j=k+i}^{k-1}\mathbf{y}^T(j)\mathbf{Z}_3\mathbf{y}(j)\right). \qquad (15)$$

Вычислим первую разность по k ФЛК (12–15) $\Delta V_i(k) = V_i(k+1) - V_i(k)$ в силу системы (11):

$$\Delta V_1(k)=\beta^k\Big[\beta(x(k+1)-x^*)^T P_1(x(k+1)-x^*)-(x(k)-x^*)^T P_1(x(k)-x^*)\Big]=$$
$$=\beta^k\Big[(x(k)-x^*)^T(\beta-1)P_1(x(k)-x^*)+(x(k)-x^*)^T\beta P_1BK(x(k-h(k))-x^*)+$$
$$+(x(k)-x^*)^T\beta P_1G(d(k)-d^*)+(x(k)-x^*)^T\beta P_1Gd^*+(x(k-h(k))-x^*)^T\beta K^TB^TP_1(x(k)-x^*)+$$
$$+(x(k-h(k))-x^*)^T\beta K^TB^T\mathbf{P}_1BK(x(k-h(k))-x^*)+(x(k-h(k))-x^*)^T\beta K^TB^TP_1G(d(k)-d^*)+ \qquad (16)$$
$$+(x(k-h(k))-x^*)^T\beta K^TB^TP_1Gd^*++(d(k)-d^*)^T\beta G^TP_1(x(k)-x^*)+$$
$$+(d(k)-d^*)^T\beta G^TP_1BK(x(k-h(k))-x^*)+(d(k)-d^*)^T\beta G^TP_1G(d(k)-d^*)+(d(k)-d^*)^T\beta G^TP_1Gd^*+$$
$$+d^{*T}G^TP_1(x(k)-x^*)+d^{*T}G^TP_1BK(x(k-h(k))-x^*)++d^{*T}G^TP_1G(d(k)-\mathbf{d}^*)+d^{*T}G^TP_1Gd^*\Big],$$

$$\Delta V_2(k)=\beta^k\Big[(\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}^*)^TQ_{11}(\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}^*)-(\mathbf{x}(k-\alpha)-\mathbf{x}^*)^TQ_{11}(\mathbf{x}(k-\alpha)-\mathbf{x}^*)+$$
$$+(\mathbf{x}(k-\alpha)-\mathbf{x}^*)^TQ_{21}(\mathbf{x}(k-\alpha)-\mathbf{x}^*)-(\mathbf{x}(k-h_m)-\mathbf{x}^*)^TQ_{21}(\mathbf{x}(k-h_m)-\mathbf{x}^*)+ \qquad (17)$$
$$+(\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}^*)^TQ_{31}(\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}^*)-(\mathbf{x}(k-h(k))-\mathbf{x}^*)^TQ_{31}(\mathbf{x}(k-h(k))-\mathbf{x}^*)\Big],$$

$$\Delta V_3(k)=\beta^k\sum_{i=-\alpha}^{-1}\Big[\mathbf{y}^T(k)\mathbf{Z}_1\mathbf{y}(k)-\mathbf{y}^T(k+i)\mathbf{Z}_1\mathbf{y}(k+i)\Big]+\beta^k\sum_{i=-h_m}^{-1-\alpha}\Big[\mathbf{y}^T(k)\mathbf{Z}_2\mathbf{y}(k)-\mathbf{y}^T(k+i)\mathbf{Z}_2\mathbf{y}(k+i)\Big]+$$
$$+\beta^k\sum_{i=-h(k)}^{-1}\Big[\mathbf{y}^T(k)\mathbf{Z}_3\mathbf{y}(k)-\mathbf{y}^T(k+i)\mathbf{Z}_3\mathbf{y}(k+i)\Big]=\beta^k\alpha\mathbf{y}^T(k)\mathbf{Z}_1\mathbf{y}(k)-\beta^k\sum_{i=-\alpha}^{-1}\mathbf{y}^T(k+i)\mathbf{Z}_1\mathbf{y}(k+i)+$$
$$+\beta^k(h_m-\alpha)\mathbf{y}^T(k)\mathbf{Z}_2\mathbf{y}(k)-\beta^k\sum_{i=-h_m}^{-1-\alpha}\mathbf{y}^T(k+i)\mathbf{Z}_2\mathbf{y}(k+i)+\beta^kh(k)\mathbf{y}^T(k)\mathbf{Z}_3\mathbf{y}(k)- \qquad (18)$$
$$-\beta^k\sum_{i=-h(k)}^{-1}\mathbf{y}^T(k+i)\mathbf{Z}_3\mathbf{y}(k+i)=\beta^k\mathbf{y}^T(k)\big[\alpha\mathbf{Z}_1+(h_m-\alpha)Z_2+h(k)Z_3\big]\mathbf{y}(k)-$$
$$-\beta^k\sum_{i=-\alpha}^{-1}\mathbf{y}^T(k+i)\mathbf{Z}_1\mathbf{y}(k+i)-\beta^k\sum_{i=-h_m}^{-1-\alpha}\mathbf{y}^T(k+i)\mathbf{Z}_2\mathbf{y}(k+i)-\beta^k\sum_{i=-h(k)}^{-1}\mathbf{y}^T(k+i)\mathbf{Z}_3\mathbf{y}(k+i).$$

Из (2) следует, что $\forall k>0\;\; h(k)\in[0,\alpha]$ либо $h(k)\in[\alpha+1,h_m]$. Определим два множества: $\Omega_1=\{k:k>0,\,h(k)\in[0,\alpha]\}$ и $\Omega_2=\{k:k>0,\,h(k)\in[\alpha+1,h_m]\}$. Рассмотрим вариацию значений $\Delta V(k)$ для двух случаев: $k\in\Omega_1$ и $k\in\Omega_2$.

Случай 1. Для любой величины запаздывания $0\le h(k)\le\alpha$ выполняется

$$\sum_{m=k-\alpha}^{k-1}y^T(m)Z_1y(m)=\sum_{m=k-\alpha}^{k-1-h(k)}y^T(m)Z_1y(m)+\sum_{m=k-h(k)}^{k-1}y^T(m)Z_1y(m).$$

Тогда с учетом (18) получим

$$\Delta V_3(k)=\beta^ky^T(k)\big[\alpha Z_1+(h_m-\alpha)Z_2+h(k)Z_3\big]y(k)-\beta^k\sum_{m=k-\alpha}^{k-1-h(k)}y^T(m)Z_1y(m)-$$
$$-\beta^k\sum_{m=k-h(k)}^{k-1}y^T(m)\big(Z_1+Z_3\big)y(m)-\beta^k\sum_{m=k-h_m}^{k-1-\alpha}y^T(m)Z_2y(m). \qquad (19)$$

Воспользуемся леммой, доказанной в [9]: для любых чисел $0\le\tau_1\le\tau_2$ и любой матрицы $M\succ0$ (положительно определенной) выполняется

$$-(\tau_2-\tau_1)\sum_{m=k-\tau_2}^{k-1-\tau_1}y^T(m)M\,y(m)\le\begin{bmatrix}x(k-\tau_1)\\x(k-\tau_2)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-M & M\\ M & -M\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k-\tau_1)\\x(k-\tau_2)\end{bmatrix}= \qquad (20)$$
$$=-\big[x(k-\tau_1)-x(k-\tau_2)\big]^TM\big[x(k-\tau_1)-x(k-\tau_2)\big].$$

Поскольку $Z_1+Z_3\succ0$ и $h(k)\le\alpha$, с учетом (20) получим:

$$-\sum_{m=k-h(k)}^{k-1} y^T(m)\left(Z_1+Z_3\right)y(m) \le -\frac{1}{h(k)}\left(x(k)-x(k-h(k))\right)^T\left(Z_1+Z_3\right)\left(x(k)-x(k-h(k))\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha}(x(k)-x^*)^T\left(-Z_1-Z_3\right)(x(k)-x^*)+\frac{1}{\alpha}(x(k)-x^*)^T\left(Z_1+Z_3\right)(x(k-h(k))-x^*)+ \quad (21)$$

$$+\frac{1}{\alpha}(x(k-h(k))-x^*)^T\left(Z_1+Z_3\right)(x(k)-x^*)+\frac{1}{\alpha}(x(k-h(k))-x^*)^T\left(-Z_1-Z_3\right)(x(k-h(k))-x^*),$$

$$-\sum_{m=k-\alpha}^{k-1-h(k)} y^T(m)Z_1y(m) \le -\frac{1}{\alpha-h(k)}\left[x(k-h(k))-x(k-\alpha)\right]^T Z_1\left[x(k-h(k))-x(k-\alpha)\right] \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha}(x(k-h(k))-x^*)^T\left(-Z_1\right)(x(k-h(k))-x^*)+\frac{1}{\alpha}(x(k-h(k))-x^*)^T Z_1(x(k-\alpha)-x^*)+ \quad (22)$$

$$+\frac{1}{\alpha}(x(k-\alpha)-x^*)^T Z_1(x(k-h(k))-x^*)+\frac{1}{\alpha}(x(k-\alpha)-x^*)^T\left(-Z_1)\right)(x(k-\alpha)-x^*),$$

$$-\sum_{m=k-h_m}^{k-1-\alpha} y^T(m)Z_2y(m) \le -\frac{1}{h_m-\alpha}\left[x(k-\alpha)-x(k-h_m)\right]^T Z_2\left[x(k-\alpha)-x(k-h_m)\right] \le$$

$$\le \frac{1}{h_m-\alpha}(x(k-\alpha)-x^*)^T\left(-Z_2\right)(x(k-\alpha)-x^*)+\frac{1}{h_m-\alpha}(x(k-\alpha)-x^*)^T Z_2(x(k-h_m)-x^*)+ \quad (23)$$

$$+\frac{1}{h_m-\alpha}(x(k-h_m)-x^*)^T Z_2(x(k-\alpha)-x^*)+\frac{1}{h_m-\alpha}(x(k-h_m)-x^*)^T\left(-Z_2\right)(x(k-h_m)-x^*).$$

С учетом (16 – 19), (21 – 23) получим

$$\Delta V(k)=\Delta V_1(k)+\Delta V_2(k)+\Delta V_3(k) \le \mathbf{s}^T(k)M\mathbf{s}(k)\,, \quad (24)$$

где

$$s(k)=\mathrm{col}\left\{\beta^{k/2}\left(x(k)-x^*\right),\beta^{k/2}K\left(x(k-h(k))-x^*\right),\beta^{k/2}\left(x(k-\alpha)-x^*\right),\beta^{k/2}\left(x(k-h_m)-x^*\right),\beta^{k/2}\left(d(k)-d^*\right),\beta^{k/2}d^*\right\},$$

$$M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & M_{15} & M_{16}\\ * & M_{22} & M_{23} & 0_{n\times n} & M_{25} & M_{26}\\ * & * & M_{33} & M_{34} & 0_{q\times q} & 0_{q\times q}\\ * & * & * & M_{44} & 0_{q\times q} & 0_{q\times q}\\ * & * & * & * & M_{55} & M_{56}\\ * & * & * & * & * & M_{66}\end{bmatrix},\ M_{11}=(\beta-1)P_1+Q_{11}+Q_{31}-\frac{1}{\alpha}\left(Z_1+Z_3\right),$$

$$M_{12}=\beta P_1B+\frac{1}{\alpha}\left(Z_1+Z_3\right),\ M_{15}=M_{16}=\beta P_1G\,,\ M_{22}=\beta B^T\left(P_1+R_1\right)B-Q_{31}-\frac{1}{\alpha}\left(2Z_1+Z_3\right),\ M_{23}=\frac{1}{\alpha}Z_1\,,$$

$$M_{25}=M_{26}=\beta B^T\left(P_1+R_1\right)G\,,\ M_{33}=-Q_{11}+Q_{21}-\frac{1}{\alpha}Z_1-\frac{1}{h_m-\alpha}Z_2\,,\ M_{34}=\frac{1}{h_m-\alpha}Z_2\,,$$

$$M_{44}=-Q_{21}-\frac{1}{h_m-\alpha}Z_2\,,\ M_{55}=M_{56}=M_{66}=\beta G^T\left(P_1+R_1\right)G\,,\ R_1=\alpha Z_1+(h_m-\alpha)Z_2+\alpha Z_3\,,$$

символ «*» обозначает соответствующий блок в симметрической матрице неравенства.

Потребуем, чтобы значение ФЛК (12 – 15) с течением времени убывало с некоторой гарантированной скоростью, определяемой текущим значением критерия (7):

$$\Delta V(k) \le$$
$$\le -\beta^k(\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{W}_x+\mathbf{K}^T\mathbf{W}_u\mathbf{K})(\mathbf{x}(k)-\mathbf{x}^*). \quad (25)$$

Просуммировав левые и правые части неравенства (25) по k от 0 до ∞, получим

$$J^\infty(k) \le (\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}^*)^T\mathbf{P}_1(\mathbf{x}(0)-\mathbf{x}^*)+(\mathbf{x}(-\alpha)-\mathbf{x}^*)^TQ_{11}(\mathbf{x}(-\alpha)-\mathbf{x}^*)+$$

$$+(\mathbf{x}(-h_m+\alpha)-\mathbf{x}^*)^TQ_{21}(\mathbf{x}(-h_m+\alpha)-\mathbf{x}^*)+(\mathbf{x}(-h_m)-\mathbf{x}^*)^TQ_{31}(\mathbf{x}(-h_m)-\mathbf{x}^*)+\alpha\mathbf{y}^T(0)\mathbf{Z}_1\mathbf{y}(0)-$$

$$-\sum_{j=-\alpha}^{-1}\mathbf{y}^T(j)\mathbf{Z}_1\mathbf{y}(j)+(h_m-\alpha)\mathbf{y}^T(0)\mathbf{Z}_2\mathbf{y}(0)-\sum_{j=-h_m}^{-1-\alpha}\mathbf{y}^T(j)\mathbf{Z}_2\mathbf{y}(j)+h_m\mathbf{y}^T(0)\mathbf{Z}_3\mathbf{y}(0)-\sum_{j=-h_m}^{-1}\mathbf{y}^T(j)\mathbf{Z}_3\mathbf{y}(j)=J^*, \quad (26)$$

то есть ФЛК (12–15), вычисленный в момент времени $k = 0$, определяет верхнее граничное значение J^* критерия (7).

Таким образом, задача синтеза гарантирующего управления сводится к построению регулятора, который обеспечивает минимизацию по некоторому критерию значения J^*. В качестве критерия выбрана сумма следа матриц $\mathbf{P}_1$, Q_{11}, Q_{21}, Q_{31}, Z_1, Z_2, Z_3.

Выполним аппроксимацию множества D значений внешнего спроса эллипсоидом наименьшего объема, который задается уравнением

$$E(d^*, Q_d) = \{d \in \mathbf{R}^q : (d(k) - d^*)^T Q_d^{-1}(d(k) - d^*) \le 1\}. \quad (27)$$

Матрица эллипсоида $Q_d \in R^{q\times q}$ и вектор координат центра $d^* \in \mathbf{R}^q$ определяются аналогично тому, как это сделано в работе [10].

Введем обозначения:

$$f_i(s) = s^T(k) M_i s(k), \quad M_i \in R^{(4n+2q)\times(4n+2q)}, \quad i = 0, 1,$$

$$M_0 = M + \text{block diag}\{W_x + K^T W_u K,\ 0_{n\times n},\ 0_{n\times n},\ 0_{n\times n},\ 0_{q\times q},\ 0_{q\times q}\},$$

$$M_1 = \text{block diag}\{0_{n\times n}, 0_{n\times n}, 0_{n\times n}, 0_{n\times n}, Q_d^{-1}, 0_{q\times q}\}.$$

Тогда неравенства (24–25), обеспечивающие убывание ФЛК (12 – 15) вдоль любой траектории замкнутой системы (11), и неравенство (27), описывающее эллипсоид, который аппроксимирует допустимое множество значений внешнего спроса, запишем в виде $f_0(s) \le 0 \ \ \forall s: \ f_1(s) \le 1$.

В силу неущербности S-процедуры с одним ограничением [11] знакоопределенность записанных квадратичных форм эквивалентна выполнению для некоторого скалярного параметра $\tau > 0$ линейного матричного неравенства

$$M_0 - \tau M_1 \preceq 0,$$

которое с помощью леммы Шура представим в виде

$$\begin{bmatrix} M_{11} + W_x & M_{12} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & M_{15} & M_{16} & K^T W_u^{1/2} \\ * & M_{22} & M_{23} & 0_{n\times n} & M_{25} & M_{26} & 0_{n\times m} \\ * & * & M_{33} & M_{34} & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} & 0_{n\times m} \\ * & * & * & M_{44} & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} & 0_{n\times m} \\ * & * & * & * & M_{55} - \tau Q_d^{-1} & M_{56} & 0_{q\times m} \\ * & * & * & * & * & M_{66} & 0_{q\times m} \\ * & * & * & * & * & * & -I_m \end{bmatrix} \preceq 0. \quad (28)$$

Таким образом, если для системы (11), (2) при $h(k) \in [0, \alpha]$ и ограничении (3) матрица $K \in R^{m\times n}$ получена в результате решения задачи

$$\text{tr}\,P_1 + \text{tr}\,Q_{11} + \text{tr}\,Q_{21} + \text{tr}\,Q_{31} + \text{tr}\,Z_1 + \text{tr}\,Z_2 + \text{tr}\,Z_3 \to \min \quad (29)$$

при ограничении (28) на матричные переменные $0 \prec \mathbf{P}_1 = P_1^T \in R^{n\times n}$, $0 \prec Q_{i1} = Q_{i1}^T \in R^{n\times n}$, $0 \prec \mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i^T \in R^{n\times n}$, $i = 1,2,3$ и скалярные параметры $\alpha > 0$ и $\tau > 0$, то закон управления (5) обеспечивает достижение заданных целей управления для дескрипторной системы и, следовательно, для исходной системы (1) с запаздыванием (2).

Случай 2. Применяя аналогичные рассуждения, легко показать, что для $k \in \Omega_2$, т.е. при любом значении запаздывания $\alpha + 1 \le h(k) \le h_m$, аналогичные результаты получаются в результате решения задачи (29) при ограничении

$$\begin{bmatrix} N_{11} + W_x & N_{12} & N_{13} & 0_{n\times n} & N_{15} & N_{16} & K^T W_u^{1/2} \\ * & N_{22} & N_{23} & N_{24} & N_{25} & N_{26} & 0_{n\times m} \\ * & * & N_{33} & 0_{n\times n} & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} & 0_{n\times m} \\ * & * & * & N_{44} & 0_{n\times q} & 0_{n\times q} & 0_{n\times m} \\ * & * & * & * & N_{55} - \tau Q_d^{-1} & N_{56} & 0_{q\times m} \\ * & * & * & * & * & N_{66} & 0_{q\times m} \\ * & * & * & * & * & * & -I_m \end{bmatrix} \preceq 0, \quad (30)$$

где $N_{11} = M_{11}$, $N_{12} = \beta P_1 B$, $N_{13} = \dfrac{1}{\alpha}(Z_1 + Z_3)$,

$$N_{15} = N_{16} = M_{15},$$

$$N_{22} = \beta B^T (P_1 + R_2) B - Q_{31} - \frac{1}{h_m - \alpha}(2Z_2 + Z_3),$$

$$N_{23} = \frac{1}{h_m - \alpha}(Z_2 + Z_3), \quad N_{24} = \frac{1}{h_m - \alpha} Z_2,$$

$$N_{25} = N_{26} = \beta B^T (P_1 + R_2) G,$$

$$N_{33} = -Q_{11} + Q_{21} - \frac{1}{\alpha}(Z_1 + Z_3) - \frac{1}{h_m - \alpha}(Z_2 + Z_3),$$

$$N_{44} = M_{44},$$

$$N_{55} = N_{56} = N_{66} = \beta G^T \left(P_1 + R_2 \right) G,$$

$$R_2 = \alpha Z_1 + (h_m - \alpha) Z_2 + h_m Z_3.$$

Таким образом, если для системы (1) с запаздыванием (2) при ограничении (3) $\forall k \ge 0$ существует решение $\hat{K}$, $\hat{P}_1$, $\hat{Q}_{i1}$, $\hat{Z}_i$, $\hat{\alpha}$, $\hat{\tau}$, $i = 1,2,3$ задачи (29) при ограничениях (28; 30) на матричные переменные $0 \prec \mathbf{P}_1 = P_1^T \in R^{n \times n}$, $0 \prec Q_{i1} = Q_{i1}^T \in R^{n \times n}$, $0 \prec \mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i^T \in R^{n \times n}$, $i = 1,2,3$ и скалярные параметры $\alpha > 0$ и $\tau > 0$, то закон управления $u(k) = \hat{K}(x(k) - x^*)$ обеспечивает достижение заданных целей управления.

Отметим, что задача (29) минимизации линейной функции при ограничениях, представленных в виде ЛМН (28; 30), является задачей полуопределенного программирования, для решения которой применяются свободно распространяемые пакеты прикладных программ на базе системы MATLAB.

При построении ФЛК (12 – 15) интервал запаздывания $\left[k - h_m, k - 1\right]$ делится на два подынтервала $\left[k - h_m, k - \alpha - 1\right]$ и $\left[k - \alpha, k - 1\right]$, где $0 < \alpha < h_m$ – настраиваемый параметр. При этом в разных подынтервалах используются различные весовые матрицы, что позволяет полнее учитывать информацию о состоянии с задержкой $x(k - \alpha)$.

Главным преимуществом предложенного подхода является то, что с использованием результатов леммы (20) и деления интервала запаздывания на подынтервалы получены более точные верхние оценки (21 – 23) значений термов функционала Ляпунова-Красовского (12 – 15), поскольку верхняя граница h_m величины запаздывания $h(k)$ на интервале $0 \le h(k) \le h_m$ заменяется двумя менее консервативными верхними границами α и h_m на подынтервалах $0 \le h(k) \le \alpha$ и $\alpha \le h(k) \le h_m$, соответственно. Таким образом, метод декомпозиции интервала запаздывания позволяет получить более точное значение МДВГ запаздывания по сравнению с другими подходами.

В работе [8] предложен алгоритм поиска значений настраиваемого параметра α $(0 < \alpha < h_m)$, при которых МДВГ h_m достигает максимального значения. После соответствующих модификаций алгоритм может быть применен для определения МДВГ запаздывания в сетях поставок.

Алгоритм определения максимального запаздывания в сетях поставок

Шаг 1. Установить $h = 1$ и $\alpha = 0$.

Шаг 2. Увеличить значение $h = h + 1$.

Шаг 3. Увеличить значение $\alpha = \alpha + 1$.

Шаг 4. Если задача (29) при ограничениях (28; 30) имеет решение, то установить $\alpha_m = \alpha$, $\alpha = 0$ и перейти к шагу 2; в противном случае перейти к шагу 5.

Шаг 5. Если $\alpha = h - 1$, перейти к шагу 6; в противном случае перейти к шагу 3.

Шаг 6. Установить максимальное значение величины запаздывания $h_m = h - 1$ и максимальное значение настраиваемого параметра α_m.

Численный пример

В качестве примера рассмотрена сеть поставок, состоящая из трех узлов, которая исследовалась в работе [12]. Структура сети представлена на рис. 1.

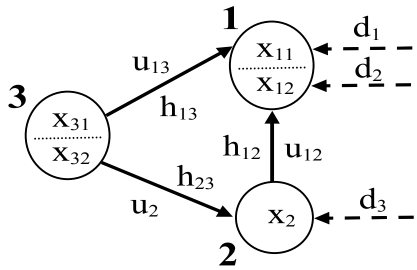

Рис. 1. Графическое представление модели сети поставок

Узел 1 реализует два вида продукции: x_{11}, запасы которой пополняются со склада 3, и x_{12}, пополняемой из узла 2. Период дискретизации равен 1 суткам. Время задержки поставок h_{13} составляет от 2 до 6 суток, h_{12} – от 1 до 2 суток.

Узел 2 реализует продукцию x_2, которая пополняется со склада 3. Время задержки h_{23} составляет от 2 до 4 суток. Запасы продукции на складе 3 пополняются в течение одного периода дискретизации.

Дуги d_1, d_2 и d_3, изображенные пунктиром, обозначают внешний спрос. Размерности моделей равны $n_1 = m_1 = n_3 = m_3 = 2$, $n_2 = m_2 = 1$, $q_1 = q_2 = q_3 = 1$.

На основе информации об объемах продаж за первые 50 дней 2017 года, предоставленной компанией CloudWorks LTD, г. Харьков (http://www.cloudwk.com/), которая разрабатывает программное обеспечение для автоматизированных систем управления запасами, определены граничные значения спроса $\mathbf{d}^{\min} = \mathrm{col}\{6; 19; 22\}$ и $\mathbf{d}^{\max} = \mathrm{col}\{112; 326; 263\}$. В соответствии с (4) определены размеры страховых запасов ресурсов: $x_1^* = \mathrm{col}\{672;\ 652\}$, $x_2^* = 2356$, $x_3^* = \mathrm{col}\{112;\ 589\}$.

Численное решение соответствующих задач полуопределенного программирования выполнено в среде MATLAB с помощью свободно распространяемого пакета CVX [13].

В результате определены максимально допустимые величины задержки поставок продукции x_{11} и x_{12}: $h_m = 7$ для $\alpha = 1,2$; и продукции x_2: $h_m = 8$ для $\alpha = 1,2$.

Таким образом, доказано, что при установленных в сети интервалах запаздывания пополнения запасов гарантируется асимптотическая устойчивость замкнутой системы при условии полного удовлетворения спроса на ресурсы.

Выводы

В статье предложен подход к решению задачи оценивания максимально допустимой величины запаздывания в сетях поставок с неопределенными задержками поставок в условиях неизвестного, но ограниченного внешнего спроса. С помощью дескрипторного преобразования дискретной модели узла сети поставок в пространстве состояний и построения функционала Ляпунова-Красовского, зависящего от величины интервала запаздывания, получено условие существования гарантирующего регулятора, который минимизирует верхнее граничное значение квадратичного критерия качества. Построение функционала выполнено на основе разбиения интервала запаздывания на два неравных подынтервала. Для выбора настраиваемого параметра, определяющего точку разбиения, предложен вычислительный алгоритм. С помощью техники ЛМН рассмотренная задача сведена к задаче полуопределенного программирования.

Список литературы

1. Zhu X.L. New results of stability analysis for systems with time-varying delay / X.L. Zhu, G.H. Yang // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2010. – Vol. 20. – P. 596-606.

2. Leite V. Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay: an LMI approach / V. Leite, M. Miranda // Mathematical Problems in Engineering. – 2008. – Article ID 876509. – 15 p.

3. Wu V. Stability analysis and robust control of time-delay systems / V. Wu, Y. He, J.-H. She. – New-York: Springer, 2010. – 353 p.

4. Zhang W. Robust stability test for uncertain discrete-time systems: a descriptor system approach / W. Zhang, H. Su, Y. Liang, Z. Han // Latin American Applied Research. – 2011. – Vol. 41. – No. 4. – P. 359-364.

5. Zhang C.-K. Delay-variation-dependent stability of delayed discrete-time systems / C.-K. Zhang, Y. He, L. Jiang, M. Wu, H.-B. Zeng // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2016. – Vol. 61. – No. 9. – P. 2663-2669.

6. Zhang X.M. A delay decomposition to delay-dependent stability for linear systems with time-varying delays / X.M. Zhang, Q.L. Han // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2009. – Vol. 19. – P. 1922-1930.

7. Stojanovic S.B. Stability of discrete-time systems with time-varying delay: delay decomposition approach / S.B. Stojanovic, D.LJ. Debeljkovic, N. Dimitrijevic // International Journal of Computers Communications & Control. – 2012. – Vol. 7. – No. 4. – P. 776-784.

8. Афанасьев В.Н. Гарантирующее управление нелинейными динамическими объектами / В.Н. Афанасьев. – Москва: МИЭМ, 2012.

9. Yue D. A piecewise analysis method to stability analysis of linear continuous/discrete systems with time-varying delay / D. Yue, E. Tian, Y. Zhang // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2009. – Vol. 19. – P. 1493-1518.

10. Дорофеев Ю.И. Синтез системы оптимального управления запасами с дискретным ПИД-регулятором с использованием ЛМН / Ю.И. Дорофеев // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Харків: ХУПС, 2014. – Вип. 4 (41). – С. 34-41.

11. Поляк Б.Т. Управление линейными системами при внешних возмущениях (техника линейных матричных неравенств) / Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, П.С. Щербаков. – Москва: ЛЕНАНД, 2014. – 560 с.

12. Дорофеев Ю.И. Дескрипторный подход к синтезу децентрализованного гарантирующего управления запасами в сетях поставок с неопределенными запаздываниями / Ю.И. Дорофеев, А.А. Никульченко // Вісник Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ», 2017. – № 51(1272). – С. 21-31.

13. Grant M. CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1 [Электронный ресурс] / M. Grant, S. Boyd. – Режим доступа: http://cvxr.com/cvx (Accessed 4 December 2017).

References

1. Zhu, X.L. and Yang, G.H. (2010), New results of stability analysis for systems with time-varying delay, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, No. 20, pp. 596-606.

2. Leite, V. and Miranda, M. (2008), Robust stabilization of discrete-time systems with time-varying delay: an LMI approach, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 876509, 15 p.

3. Wu, V., He, Y. and She, J.-H. (2010), *Stability analysis and robust control of time-delay systems*, Springer, New-York, 353 p.

4. Zhang, W., Su, H., Liang, Y. and Han, Z. (2011), Robust stability test for uncertain discrete-time systems: a descriptor system approach, *Latin American Applied Research*, Vol. 41, No. 4, pp. 359-364.

5. Zhang, C.-K., He, Y., Jiang, L., Wu, M. and Zeng, H.-B. (2016), Delay-variation-dependent stability of delayed discrete-time systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 61, No. 9, pp. 2663-2669.

6. Zhang, X.M. and Han, Q.L. (2009), A delay decomposition to delay-dependent stability for linear systems with time-varying delays, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 19, pp. 1922-1930.

7. Stojanovic, S.B., Debeljkovic, D.LJ., and Dimitrijevic, N. (2012), Stability of discrete-time systems with time-varying delay: delay decomposition approach, *International Journal of Computers Communications & Control*, Vol. 7 (4), pp. 776-784.

8. Afanas'ev, V.N. (2012), "*Garantiruyushchee upravlenie nelinejnymi dinamicheskimi ob'ektami*" [*Guaranteed cost control of nonlinear dynamic objects*], Moskovskij gosudarstvennyj institut elektroniki i matematiki, Moscow.

9. Yue, D., Tian, E. and Zhang, Y. (2009), A piecewise analysis method to stability analysis of linear continuous/discrete systems with time-varying delay, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, Vol. 19, pp. 1493-1518.

10. Dorofieiev, Y.I. (2014), "Sintez sistemy optimal'nogo upravleniya zapasami s diskretnym PID-regulyatorom s ispol'zovaniem LMN" [Synthesis of the optimal inventory control system with a discrete PID-controller using LMI], S*cientific works of Kharkiv Air Forces University*, No. 4 (41), pp. 34-41.

11. Polyak, B.T., Hlebnikov, M.V. and Shcherbakov, P.S. (2014), "*Upravlenie linejnymi sistemami pri vneshnih vozmushchenijah (tekhnika linejnyh matrichnyh neravenstv)*" [*Control of linear systems under external perturbations (the technique of linear matrix inequalities)*], LENAND, Moscow, 514 p.

12. Dorofieiev, Y.I. and Nikulchenko, A.A. (2017), "Deskriptornyj podkhod k sintezu detsentralizovannogo garantiruyushchego upravlenija zapasami v setjakh postavok s neopredelennymi zapazdyvanijami" [Descriptor system approach to the synthesis of decentralized guaranteed cost inventory control in supply networks with uncertain delays], *Bulletin of National Technical University «KhPI»*, No. 51 (1272), pp. 21-31.

13. Grant, M. and Boyd, S. (2017), *CVX: MATLAB software for disciplined convex programming, version 2.1*, www.cvxr.com/cvx (accessed 4 December 2017).

Поступила в редколлегию 26.01.2018
Одобрена к печати 20.03.2018

Відомості про авторів:

Дорофєєв Юрій Іванович
доктор технічних наук доцент
професор кафедри Національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут»,
Харків, Україна
https://orcid.org/0000-0002-7964-1286
e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu

Нікульченко Артем Олександрович
асистент кафедры
Національного технічного університету
«Харківський політехнічний інститут»,
Харків, Україна
https://orcid.org/0000-0003-2154-291X
e-mail: an@cloudwk.com

Information about the authors:

Yuri Dorofieiev
Doctor of Technical Sciences Associate Professor
Professor of Department of the National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,
Kharkiv, Ukraine
https://orcid.org/0000-0002-7964-1286
e-mail: dorofeev@kpi.kharkiv.edu

Artem Nikulchenko
Assistant of Department
of the National Technical University
«Kharkiv Polytechnic Institute»,
Kharkiv, Ukraine
https://orcid.org/0000-0003-2154-291X
e-mail: an@cloudwk.com

ВИЗНАЧЕННЯ МАКСИМАЛЬНО ДОПУСТИМОГО ЗАПІЗНЕННЯ ПРИ СИНТЕЗІ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ ЗАПАСАМИ В МЕРЕЖАХ ПОСТАВОК

Ю.І. Дорофєєв, А.О. Нікульченко

У статті запропоновано підхід до вирішення задачі оцінювання максимально допустимої величини запізнення в мережах поставок з невизначеними затримками поставок в умовах невідомого, але обмеженого зовнішнього попиту. За допомогою дескрипторного перетворення дискретної моделі вузла мережі поставок в просторі станів і побудови функціоналу Ляпунова-Красовського, який залежить від розміру інтервалу запізнення, отримано умову існування гарантуючого регулятора, який мінімізує верхнє граничне значення квадратичного критерію якості. Побудову функціоналу виконано на основі розбиття інтервалу запізнення на два нерівних підінтервали. Для вибору настроюваного параметра, що визначає точку розбиття, запропоновано обчислювальний алгоритм. За допомогою техніки ЛМН розглянута задача зведена до задачі напіввизначеного програмування. Розглянуто чисельний приклад.

Ключові слова: *керування запасами, гарантуюче керування, метод інваріантних еліпсоїдів, функціонал Ляпунова-Красовського, лінійна матрична нерівність, задача напіввизначеного програмування.*

DETERMINATION OF THE MAXIMUM ALLOWABLE DELAY AT SYNTHESIS OF INVENTORY CONTROL SYSTEM IN SUPPLY NETWORKS

Yu. Dorofieiev, A. Nikulchenko

This article deal with the problem of obtaining delay-dependent stability conditions for a class of discrete-time supply networks with uncertain supply time-delays under unknown, but bounded external demand. An approach to solve the estimation problem of the maximum allowable upper bound of delay when synthesizing the inventory control system is proposed. Descriptor transformation of discrete model in states space of supply network node is applied. The Lyapunov-Krasovskii functional which depends on delay interval size for descriptor model is constructed. Construction of Lyapunov-Krasovskii functional is executed on the basis of decomposition the delay interval into two unequal subintervals. This leads to reduction of conservatism in terms of the upper bounds of the maximum time-delay. The computational algorithm for the choice of the tuning parameter defining a point of splitting the delay interval is offered. The sufficient condition of existence of the guaranteed controller which minimizes the upper boundary value of quadratic quality criterion is received. The considered problem is reduced to a semidefinite programming problem by means of linear matrix inequalities technique. A numerical example is provided.

Keywords: *inventory control, guaranteed cost control, invariant ellipsoids method, Lyapunov-Krasovskii functional, linear matrix inequality, semidefinite programming.*