Математичні моделі та методи

УДК 519.6:55.516 DOI: 10.30748/soi.2018.153.10

В.Ю. Дубницкий, О.Е. Петренко, А.И. Ходырев

Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ Университета банковского дела, Харьков

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КРИЦКОГО – МЕНКЕЛЯ

Для определения доверительных интервалов оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля, получаемых методом максимального правдоподобия, предложена последовательность действий, состоящая из следующих этапов: составление системы уравнений метода максимума правдоподобия; выбор способа решения системы уравнений метода максимума правдоподобия; определение начального приближения системы уравнений метода максимума правдоподобия; решение системы уравнений метода максимума правдоподобия; определение элементов информационной матрицы Фишера; определение границ доверительных интервалов для полученных оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля. Для решения систем уравнений метода максимума правдоподобия выбран метод Ньютона. Получение начального приближения выполнено по методике, использующей графоаналитический метод. Приведены выражения, необходимые для вычисления значений якобианов, входящих в процедуру решения полученной системы. Приведен способ получения информационной матрицы Фишера, необходимой для вычисления доверительных интервалов оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля. Получены выражения, необходимые для вычисления значений гессианов, входящих в процедуру вычисления дисперсий полученных оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля. Приведены выражения для определения доверительных интервалов распределения Крицкого-Менкеля.

Ключевые слова: *распределение Крицкого-Менкеля, метод максимума правдоподобия, оценки распределения Крицкого-Менкеля, доверительные интервалы оценок распределения Крицкого-Менкеля.*

Введение

При определении исходных данных, необходимых для проведения гидрологических и водохозяйственных расчетов, необходимо выполнить работы, связанные с обработкой данных многолетних наблюдений. Первая работа, в которой обработка этих данных была сделана с использованием статистических методов, опубликована 103 года тому назад [1].

В настоящее время применение этих методов составляет неотъемлемую часть соответствующих нормативных документов [2]. Естественно, что за это время и статистические методы и способы вычислений существенно изменились. Как правило, результаты статистического анализа гидрологических рядов используют при определении расчётных значений максимального (минимального) уровня паводка или грунтовых вод. Естественно, что уточнение методов расчета этих характеристик имеет большое значение для рационального выбора параметров проектируемых гидротехнических сооружений.

Анализ литературы. Основным типом распределения, используемого в гидротехнических расчётах, служит трёхпараметрическое гамма-распределение. В русскоязычной литературе оно представлено в работе [3]:

$$f(x)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(x-c\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda\left(x-c\right)\right)\ ;\ x<c\,. \quad (1)$$

В условии (1) принято, что λ – параметр масштаба, (λ>0); a – параметр формы, (a>0); c – параметр смещения.

В англоязычной литературе, например, в работе [4], его принято представлять в виде:

$$f(x)=\frac{\left(x-\gamma\right)^{\alpha-1}\exp\left(-\left(x-\gamma\right)/\beta\right)}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)};$$

$$\alpha>0,\beta>0,x>\gamma\,. \quad (2)$$

Здесь и далее $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера от аргумента, стоящего в круглых скобках.

В литературе по гидротехническим расчётам [5] это же распределение представлено в виде:

$$f(x)=\left[\frac{\Gamma\left(\gamma+b\right)}{\Gamma\left(\gamma\right)}\right]^{\gamma/b}\frac{\left(x/x_0\right)^{(\gamma/b)-1}}{\Gamma\left(\gamma\right)\cdot\left|b\right|\cdot x_0}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{-\left[\frac{x}{x_0}\cdot\frac{\Gamma\left(\gamma+b\right)}{\Gamma\left(\gamma\right)}\right]^{1/b}\right\};$$

$$x > 0. \qquad (3)$$

В задачах по оценке надёжности технических систем, в том числе ядерных энергетических установок [6], это же распределение представлено в виде:

$$f(x) = \frac{\gamma/\beta}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^{\gamma/b-1} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{cx}{a}\right)}{\beta \cdot \Gamma(\gamma)}. \qquad (4)$$

Общее для условий (2–4) то, что все эти распределения трёхпараметрические. Распределение Крицкого-Менкеля, используемое в гидротехнике – это вариант трёхпараметрического гамма-распределения, впервые введенное в работе [7]. В данном сообщении распределение Крицкого-Менкеля будет использовано в виде, приведенном в работе [8, С. 41]:

$$f(k) = \frac{\alpha^{\alpha}}{g^{\alpha/b}\Gamma(\alpha) \cdot b} \exp\left[-\alpha (k/g)^{1/b}\right] \cdot k^{(\alpha/b)-1}. \qquad (5)$$

В условии (5), в соответствии с традициями, принятыми в гидротехнических расчётах, вместо переменной x введена переменная:

$$k = x/\bar{x}; \qquad (6)$$

где $\bar{x}$ – среднее значение исходной выборки $X=x_1,\ldots x_i,\ldots x_n$.

Оценивание параметров распределения Крицкого-Менкеля имеет свои особенности, рассмотренные далее. Алгоритм и программа оценивания параметров распределения вида (1) по методу моментов описана в работе [10, С. 8]. В работе [11, С. 12] для преобразованной по условию (6) выборки приведены выражения для коэффициентов изменчивости (вариации) C_v и асимметрии C_s:

$$C_v = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^2}{n-1}}; \qquad (7)$$

$$C_s = \frac{n}{(n-1)(n-2)} \frac{\sum_{i=1}^{n}(k_i - 1)^3}{C_v^3}. \qquad (8)$$

При подготовке документов [2] и [11] стало ясно, что погрешность вычисления величин C_v и C_s существенно зависит от объёма имеющейся выборки. Это явление было исследовано подробно в работах [12–13] и в данном сообщении не рассматривается. Определение параметров описанных распределений также имеет свои особенности. В работе [8] описана наиболее распространённая в гидротехнических расчётах методика определения параметров распределений Крицкого-Менкеля и состоящая в следующем. По вычисленным по выражениям (7–8) величинам C_v и C_s параметры распределения определяют по специальным графикам и таблицам. Применение метода максимума правдоподобия, основы которого изложены в работе [14], усложнено тем, что в рассмотренной литературе отсутствуют рекомендации по выбору начального приближения получаемой системы уравнений. Также в рассмотренной литературе отсутствуют рекомендации по определению доверительных интервалов для получаемых оценок. Это обстоятельство существенно сужает эффективность применение метода максимума правдоподобия для получения оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля.

Постановка задачи. Разработка рекомендаций по определению доверительных интервалов оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля, получаемых методом максимального правдоподобия.

1. Полученные результаты

Последовательность этапов решения поставленной задачи в соответствии с работой [15, С. 228, 400] принята следующей:

– составление системы уравнений метода максимума правдоподобия;

– выбор способа решения системы уравнений метода максимума правдоподобия;

– определение начального приближения системы уравнений метода максимума правдоподобия;

– решение системы уравнений метода максимума правдоподобия;

– определение элементов информационной матрицы Фишера;

– определение доверительных интервалов для полученных оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля.

Составление системы уравнений метода максимума правдоподобия. Функция правдоподобия для распределения Крицкого-Менкеля, представленного условием (5), примет вид:

$$L = \left[\frac{\alpha^{\alpha}}{g^{\alpha/b}\Gamma(\alpha) b}\right]^{n} \cdot \exp\left[-\sum_{i=1}^{n} \alpha \left(\frac{k_i}{g}\right)^{1/b}\right] \cdot \prod_{i=1}^{n} k_i^{(\alpha/b)-1}. \qquad (9)$$

Λ – логарифм функции правдоподобия L примет вид:

$$\Lambda = \ln L = n \ln\left[\frac{\alpha^{\alpha}}{g^{\alpha/b}\Gamma(\alpha) b}\right] - \sum_{i=1}^{n} \alpha \left(\frac{k_i}{g}\right)^{1/b} + \left(\frac{\alpha}{b} - 1\right) \sum_{i=1}^{n} \ln k_i. \qquad (10)$$

Система уравнений метода максимума правдоподобия для условия (10) примет вид:

$$U = \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha} = n(\ln \alpha + 1) + \frac{\sum_{i=1}^{n} \ln k_i - n \ln g}{b} - g^{-1/b} \sum_{i=1}^{n} k_i^{1/b} - n\Psi(\alpha) = 0. \qquad (11)$$

$$V=\frac{\partial\Lambda}{\partial b}=g^{-1/b}\cdot$$

$$\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}\cdot\left(\frac{\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln k_i-\alpha\ln g}{b^2}\right)+\frac{n\alpha\ln g-\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln k_i}{b^2}- \quad (12)$$

$$-\frac{n}{b}=0.$$

$$W=\frac{\partial\Lambda}{\partial g}=\frac{\alpha g^{-(b+1)/b}\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}}{b}-\frac{n\alpha}{gb}=0. \quad (13)$$

В условии (11) принято, что дигамма-функция $\Psi(\alpha)=\Gamma'\ln(\alpha)$. Её свойства и способы вычисления рассмотрены в работе [16].

Выбор способа решения системы уравнений метода максимума правдоподобия. Конечная цель работы – определение доверительных интервалов параметров α, b, g распределения вида (5). Доверительные интервалы параметров распределения вида (5) при использовании метода максимума правдоподобия определяют из выражений вида:

$$\hat{\alpha}-K_\alpha\sqrt{\sigma^2(\alpha)}\le\alpha\le\hat{\alpha}+K_\alpha\sqrt{\sigma^2(\alpha)}\,; \quad (14)$$

$$\hat{b}-K_\alpha\sqrt{\sigma^2(b)}\le b\le\hat{b}+K_\alpha\sqrt{\sigma^2(b)}\,; \quad (15)$$

$$\hat{g}-K_\alpha\sqrt{\sigma^2(g)}\le g\le\hat{g}+K_\alpha\sqrt{\sigma^2(g)}\,. \quad (16)$$

В условиях (14–16) принято, что символ $(\hat{\cdot})$ означает оценку соответствующей переменной, которая служит одним из корней системы (11–13). $\sigma^2(\cdot)$ означает дисперсию соответствующего параметра распределения (5). K_α – квантиль двусторонней доверительной вероятности уровня α. Величины $\sigma^2(\alpha)$, $\sigma^2(b)$, $\sigma^2(g)$ определяют как элементы главной диагонали матрицы, обратной умноженному на «–1» гессиана выражения (10):

$$\begin{pmatrix}\sigma^2(\alpha) & \mathrm{cov}(\alpha,b) & \mathrm{cov}(\alpha,g)\\ \mathrm{cov}(\alpha,b) & \sigma^2(b) & \mathrm{cov}(b,g)\\ \mathrm{cov}(\alpha,g) & \mathrm{cov}(b,g) & \sigma^2(g)\end{pmatrix}=$$

$$=(-1)\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha\partial b} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha\partial g}\\ \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha\partial b} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial b^2} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial b\partial g}\\ \frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha\partial g} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial b\partial g} & \frac{\partial^2\Lambda}{\partial g^2}\end{pmatrix}^{-1}_{\alpha=\hat{\alpha},b=\hat{b},g=\hat{g}}. \quad (17)$$

Так как для получения численного значения условия (17) необходимо знание вторых производных функции Λ, то для решения системы уравнений (11–13) выбран метод Ньютона, для использования которого необходимо знание первых производных функции Λ.

Определение начального приближения системы уравнений метода максимума правдоподобия. Метод Ньютона решения систем нелинейных уравнений относится к итерационным методам поиска решений. Успешное применение этих методов в значительной мере зависит от удачно выбранного начального, нулевого, приближения. Для его получения использованы таблицы зависимости параметров α, b, g распределения вида (5) от величин вида (7) и (8). Наиболее полные таблицы приведены в работе [17], также можно использовать таблицы, помещённые в работах [8–9]. То есть, начальными значениями (нулевым приближением) при выполнении дальнейших вычислений приняты величины $\alpha_0=\alpha_{табл.}$, $b_0=b_{табл.}$, $g_0=g_{табл}$. Нижний индекс означает, что эти параметры определены по указанным таблицам.

Решение системы уравнений метода максимума правдоподобия методом Ньютона. Отметим, что в процессе дальнейших вычислений потребуется знание значений гамма-функции, дигамма-функции и тригамма-функции. Формулы для вычисления их значений приведены в работе [16].

Значения гамма-функции определяли по условию:

$$\Gamma(\alpha)=\exp(-z)\cdot z^{z-1/2}(2\pi)^{1/2}\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{1}{12z}+\frac{1}{288z^2}-\frac{139}{51840z^3}-\frac{571}{2488320z^4}\right). \quad (18)$$

Значения дигамма-функции определяли по условию:

$$\Psi(z)=\frac{d}{dz}\left[\ln\Gamma(z)\right]=$$

$$=\ln z-\frac{1}{2z}-\frac{1}{12z^2}+\frac{1}{120z^4}-\frac{1}{252z^6}. \quad (19)$$

Значения тригамма-функции определяли по условию:

$$\Psi'(z)=\frac{d\Psi}{dz}=\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{6z^3}-\frac{1}{30z^5}+\frac{1}{42z^7}-\frac{1}{30z^9}. \quad (20)$$

Для решения системы уравнений (11–13) использован метод Ньютона в виде, описанном в работе [18]:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ b\\ g\end{pmatrix}^{(p+1)}=\begin{pmatrix}\alpha\\ b\\ g\end{pmatrix}^{(p)}-$$

$$-\left[J\left(\alpha^{(p)},\ b^{(p)},\ g^{(p)}\right)\right]^{-1}\begin{pmatrix}U\left(\alpha^{(p)},b^{(p)},g^{(p)}\right)\\ V\left(\alpha^{(p)},b^{(p)},g^{(p)}\right)\\ W\left(\alpha^{(p)},b^{(p)},g^{(p)}\right)\end{pmatrix}. \quad (21)$$

В свою очередь:

$$\left[J\left(\alpha^{(p)},\quad b^{(p)},\quad g^{(p)}\right)\right]^{-1}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial U}{\partial b} & \dfrac{\partial U}{\partial g}\\ \dfrac{\partial V}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial V}{\partial b} & \dfrac{\partial V}{\partial g}\\ \dfrac{\partial W}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial W}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial W}{\partial\alpha}\end{pmatrix}^{-1}. \quad (22)$$

Якобиан (22) вычислен при условии, что $\alpha = \alpha^{(p)}$, $b = b^{(p)}$, $g = g^{(p)}$, $p = 0,1,2...$ При $p = 0$ принято, что $\alpha_0 = \alpha_{табл.}$, $b_0 = b_{табл.}$, $g_0 = g_{табл.}$. Выражения для частных производных, входящих в условие (22), приведены ниже:

$$\frac{\partial U}{\partial\alpha}=\frac{n}{2}-\Psi'(\alpha); \quad (23)$$

$$\frac{\partial U}{\partial b}=\frac{n\ln g-\sum_{i=1}^{n}\ln k_i}{b^2}+g^{-1/b}\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}; \quad (24)$$

$$\frac{\partial U}{\partial g}=\frac{g^{-(b+1)/b}\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}}{b}-\frac{n}{bg}; \quad (25)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha}=g^{-1/b}\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln k_i-\ln g}{b^2}\right)+\frac{n\ln g-\sum_{i=1}^{n}\ln k_i}{b^2}; \quad (26)$$

$$\frac{\partial V}{\partial b}=-g^{-1/b}\sum_{i=1}^{n}\ln k_i^{1/b}\left[\frac{\alpha(\ln g)^2}{b^4}-\ln g\cdot A+B\right]+C+\frac{n}{b^2}. \quad (27)$$

В свою очередь:

$$A=\frac{2\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln k_i}{b^4}+\frac{2\alpha}{b^3}; \quad (28)$$

$$B=\frac{\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln k_i^2}{b^4}+\frac{2\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln k_i}{b^3}; \quad (29)$$

$$C=\frac{2\left(\alpha\sum_{i=1}^{n}\ln k_i-n\alpha\ln g\right)}{b^3}. \quad (30)$$

Далее получим следующее выражение:

$$\frac{\partial V}{\partial g}=g^{-(b+1)/b}\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}\left[\frac{\alpha\left(\ln g-\sum_{i=1}^{n}\ln k_i\right)}{b^3}-\frac{\alpha}{b^2}\right]+\frac{n\alpha}{b^2 g}. \quad (31)$$

Третью строку якобиана (22) представим в виде:

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha}=\frac{g^{-(b+1)/b}\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}}{b}-\frac{n}{bg}; \quad (32)$$

$$\frac{\partial W}{\partial b}=g^{-(b+1)/b}\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}\left[\frac{\alpha\left(\ln g-\sum_{i=1}^{n}\ln k_i\right)}{b^3}-\frac{\alpha}{b^2}\right]+\frac{n\alpha}{b^2 g}; \quad (33)$$

$$\frac{\partial W}{\partial g}=\frac{n\alpha}{bg^2}-\frac{\alpha g^{-(2b+1)/b}(b+1)\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}}{b^2}. \quad (34)$$

Результатом вычислительного процесса, выполненного по условиям (21–34), будут корни системы (11–13), то есть, величины $\hat{\alpha}$, $\hat{b}$, $\hat{g}$, знание которых необходимо для определения величины доверительных интервалов распределения Крицкого-Менкеля.

Определение элементов информационной матрицы Фишера. Основными элементами, необходимыми для вычисления доверительных интервалов оценок параметров распределения, в нашем случае будут значения составляющих гессиана, приведенного в условии (22):

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha^2}=n\left(\frac{1}{\alpha}-\Psi'(\alpha)\right); \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha\partial b}=g^{-1/b}\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln k_i-\ln g}{b^2}+\frac{n\ln g-\sum_{i=1}^{n}\ln k_i}{b^2}\right); \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial\alpha\partial g}=\frac{g^{-(b+1)/b}\sum_{i=1}^{n}k_i}{b}-\frac{n}{bg}; \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial b^2}=-g^{-1/b}\cdot\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}\left[\frac{\alpha(\ln g)^2}{b^4}-\ln g\cdot A+B\right]-D+\frac{n}{b^2}. \quad (38)$$

Особенности вычисления величин A и B указаны в условиях (28) и (29). Входящую в выражение (38) величину D определяют по условию:

$$D=\frac{2\alpha\left(n\ln g+\sum_{i=1}^{n}k_i\right)}{b^3}. \quad (39)$$

Выражение вида:

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial b\partial g}=\frac{2n\alpha}{g^2 b^3}-g^{(-2b+1)/b}\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}\left[E-H\ln g+G\right]. \quad (40)$$

Для входящих в условие (40) величин E, H, и G получены следующие выражения:

$$E=\frac{\alpha(b+1)\cdot(\ln g)^2}{b^6};\qquad(41)$$

$$H=\frac{2\alpha(b+1)\sum_{i=1}^{n}\ln k_i}{b^6}+\frac{2\alpha(2b+3)}{b^5};\qquad(42)$$

$$G=\frac{\alpha(b+1)\sum_{i=1}^{n}(\ln k_i)^2}{b^6}+\frac{2\alpha(2b+3)}{b^5}+\frac{2\alpha(b+3)}{b^4};\ (43)$$

$$\frac{\partial^2\Lambda}{\partial g^2}=\frac{n\alpha}{bg^2}-\frac{\alpha g^{-(2b+1)/b}\cdot(b+1)\sum_{i=1}^{n}k_i^{1/b}}{b^2}.\qquad(44)$$

Таким образом, условия (35–44) с использованием условий (22), (14–16) при $a=\hat{\alpha}$, $b=\hat{b}$, $g=\hat{g}$ позволяют определить доверительные интервалы оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля.

Выводы

1. Для определения доверительных интервалов оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля, получаемых методом максимального правдоподобия, предложена последовательность действий, состоящая из следующих этапов: составление системы уравнений метода максимума правдоподобия; выбор способа решения системы уравнений метода максимума правдоподобия; определение начального приближения системы уравнений метода максимума правдоподобия; решение системы уравнений метода максимума правдоподобия; определение элементов информационной матрицы Фишера; определение границ доверительных интервалов для полученных оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля.

2. Для решения систем уравнений метода максимума правдоподобия выбран метод Ньютона. Получение начального приближения выполнено по методике, использующей графоаналитический метод.

3. Приведены выражения, необходимые для вычисления значений якобианов, входящих в процедуру решения полученной системы.

4. Приведен способ получения информационной матрицы Фишера, необходимой для вычисления доверительных интервалов оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля.

5. Получены выражения, необходимые для вычисления значений гессианов, входящих в процедуру вычисления дисперсий полученных оценок параметров распределения Крицкого-Менкеля.

6. Приведены выражения для определения доверительных интервалов распределения Крицкого-Менкеля.

Список литературы

1. Hazen A. Storage to be Provide Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply / A. Hazen // Proceedings of the American Society of Civil Engineers. – 1913. – Vol. 39, Issue 9. – P. 1943-2044.
2. ДБН В.2.4-8: – 2014. Визначення розрахункових гідрологічних характеристик. – Науково-дослідний інститут будівельних конструкцій (НДІБК) Мінрегіонбуду України.
3. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям / Р.Н. Вадзинский. – Санкт-Петербург: Наука, 2001. – 295 с.
4. Джонсон Н.Л. Одномерные непрерывные распределения. В 2 ч. Ч.1. / Н.Л. Джонсон, С. Коц, Н. Балакришнан. – Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010-2012. – 703 с.
5. Блохинов Е.Г. Распределение вероятностей величин речного стока / Е.Г. Блохинов. – Москва.: Наука, 1974. – 169 с.
6. Переверзев Е.С. Случайные сигналы в задачах оценки состояния технических систем. / Е.С. Переверзев, Ю.Ф. Даниев, Г.П. Филей. – Киев: Наукова думка, 1992. – 252 с.
7. Крицкий С.Н. Расчеты речного стока / С.Н. Крицкий, М.Ф. Менкель. – Москва–Ленинград: Госстройиздат, 1934. – 260 с.
8. Сикан А.В. Методы статистической обработки гидрометеорологической информации / А.В. Сикан. – Санкт-Петербург: Изд. РГГМУ, 2007. – 279 с.
9. Рождественский А.В. Статистические методы в гидрологии / А.В. Рождественский, А.И. Чеботарёв. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1974. – 424 с.
10. Методика автоматизированной обработки статистической информации об изменчивых факторах, учитываемых в расчётах надёжности конструкций магистральных трубопроводов. Р 600-86. – Москва: Всесоюзный научно-исследовательский институт по строительству магистральных трубопроводов (ВНИИСТ), 1987. – 19 с.
11. Рекомендации по методике определения экстремальных геологических характеристик. – Производственный и научно-исследовательский институт по инженерным изысканиям в строительстве (ПНИИС) Госстроя СССР. – Москва.: Стройиздат, 1981. – 41 с.
12. Рождественский А.В. Оценка точности кривых распределения гидрологических характеристик. / А.В. Рождественский. – Ленинград: Гидрометеоиздат, 1977. – 269 с.
13. Ильинич В.В. Оценка асимметрии в рамках трёхпараметрического гамма-распределения / В.В. Ильинич // Природообустройство. – 2010. – № 5. – С. 71-74.

14. Кендаллл М. Статистические выводы и связи / М. Кендалл, А. Стьюарт. – Москва: Наука, 1973. – 809 с.

15. Life Data Analysis Reference Book [Электронный ресурс]. – Режим доступа к ресурсу: http://reliawiki.org/index.php/Life_Data_Analysis_Reference_Book. – 425 с. Загл. с экрана 10. 12. 2017 г.

16. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

17. Блохинов Е.Г. Расширенные таблицы трёхпараметрического гамма-распределения / Е.Г. Блохинов, Н.В. Никольская // Сб. Труды Гидропроекта. – 1964. – № 12. – С. 151-163.

18. Киреев В.И. Численные методы в примерах и задачах / В.И. Киреев, А.В. Пантелеев. – Москва: Высшая школа, 2008. – 480 с.

References

1. Hazen, A. (1913), Storage to be Provide Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply, *Proceedings of the American Society of Civil Engineers*, Vol. 39, No. 9(39), pp. 1943-2044.

2. DBN V.2.4.-8:2014 (2014), "*Vyznachennja rozrakhunkovykh ghidrologhichnykh kharakterystyk*" [*State Builging Standards: Determination of calculated hydrological characteristics*], Naukovo-doslidnyi instytut budivel'nyh konstrukcij (NDIBK), 36 p.

3. Vadzinskij, R.N. (2001), "*Spravochnik po verojatnostnym raspredelenijam"* [*Handbook of Probabilistic Distributions*], Nauka, Sankt-Peterburg, 295 p.

4. Dzhonson, N.L., Koc, S. and Balakrishnan, N. (2012), "*Odnomernye nepreryvnye raspredelenija. V 2 ch. Ch.*1." [*One-dimensional continuous distributions. In 2 parts. Part* 1], BINOM. Laboratorija znanij, Moscow, 703 p.

5. Blohinov, E.G. (1974), "*Raspredelenie verojatnostej velichin rechnogo stoka*" [*The distribution of the probabilities of the river flow*], Nauka, Moscow, 169 p.

6. Pereverzev, E.S., Daniev, Ju.F. and Filej, G.P. (1992), "*Sluchajnye signaly v zadachah ocenki sostojanija tehnicheskih system*" [*Random signals in problems of assessing the state* of *technical systems*], Naukova dumka, Kiev, 252 p.

7. Kritsky, S.N. and Menkel', M.F. (1934), "*Raschety rechnogo stoka*" [*River flow calculations*], Gosstrojizdat, Moscow-Leningrad, 260 p.

8. Sikan, A.V. (2007), "*Metody statisticheskoj obrabotki gidrometeorologicheskoj informacii*" [*Methods of statistical processing of hydrometeorological information*], Izd. RGGMU, 279 p.

9. Rozhdestvenskij, A.V. and Chebotarjov, A.I. (1974), "*Statisticheskie metody v gidrologii*" [*Statistical methods in hydrology*], Gidrometeoizdat, 424 p.

10. P 600-86 (1987), "*Metodika avtomatizirovannoj obrabotki statisticheskoj informacii ob izmenchivyh faktorah, uchityvaemyh v raschjotah nadjozhnosti konstrukcij magistral'nyh truboprovodov*" [*The method of automated processing of statistical information on variable factors, taken into account in reliability calculations of trunk pipeline designs*], Vsesojuznyj nauchno-issledovatel'skij institut po stroitel'stvu magistral'nyh truboprovodov (VNIIST), Moscow, 19 p.

11. Proizvodstvennyj i nauchno-issledovatel'skij institut po inzhenernym izyskanijam v stroitel'stve (PNIIS) Gosstroja SSSR (1981), "*Rekomendacii po metodike opredelenija jekstremal'nyh geologicheskih harakteristik*" [*Recommendations on the methodology for determining extreme geological characteristics*], Strojizdat, Moscow, 41 p.

12. Rozhdestvenskij, A.V. (1977), "*Ocenka tochnosti krivyh raspredelenija gidrologicheskih harakteristik*" [*Assessment of the accuracy of the distribution curves of hydrological characteristics*], Gidrometeoizdat, Moscow, 269 p.

13. Il'inich, V.V. (2010), "Ocenka asimmetrii v ramkah trjohparametricheskogo gamma – raspredelenija" [Evaluation of asymmetry within the three-parameter gamma distribution], *Environmental Engineering*, No. 5, pp. 71-74.

14. Kendall, M. and Stuart, A. (1973), "*Statisticheskie vyvody i svjazi*" [*The advanced theory of statistics*. V.2. Inference and relationship], Nauka, Moscow, 817 p.

15. *Life Data Analysis Reference Book*, 425 p., http://reliawiki.org/index.php/Life_Data_Analysis_Reference_Book _(accessed 10. December 2017).

16. Abramovic, M. and Stigan, I. (1979), "*Spravochnik po special'nym funkcijam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablicami*" [*Handbook of mathematical function with formulas, graphs and mathematical tables*], Nauka, Moscow, 832 p.

17. Blohinov, E.G. and Nikol'skaj, N.V. (1964), "Rasshirennye tablicy trjohparametricheskogo gamma-raspredelenij" [Extended tables of three-parameter gamma distribution], *Sb. Trudy Gidroproekta,* No. 12, pp.151-163.

18. Kireev, V.I. and Panteleev, A.V. (2008), "*Chislennye metody v primerah i zadachah*" [*Numerical methods in examples and problems*], Vysshaja Shkola, Moscow, 480 p.

Поступила в редколлегию 18.05.2018
Одобрена к печати 19.06.2018

Відомості про авторів:

Дубницький Валерій Юрійович
кандидат технічних наук старший науковий співробітник
старший науковий співробітник Харківського навчально-наукового інституту Державного вищого навчального закладу «Університет банківської справи»,
Харків, Україна
https://orcid.org/0000-0003-1924-4104

Information about authors:

Valeriy Dubnitskiy
Candidate of Sciences Senior Research
Senior Research Associate of
Kharkiv Educational Scientific Institute
SHEI "University of Banking" Kharkov,
Kharkiv, Ukraine
https://orcid.org/0000-0003-1924-4104

Петренко Ольга Євгенівна
кандидат технічних наук доцент
доцент Харківського навчально-наукового інституту
Державного вищого навчального закладу «Університет банківської справи»,
Харків, Україна
https://orcid.org/0000-0002-7862-5399

Olga Petrenko
Candidate of Sciences Associate Professor
Senior Lecturer of Kharkiv Educational Scientific Institute SHEI "University of Banking" Kharkov,
Kharkiv, Ukraine
https://orcid.org/0000-0002-7862-5399

Ходирєв Олександр Іванович
старший викладач
Харківського навчально-наукового інституту
Державного вищого навчального закладу «Університет банківської справи»,
Харків, Україна
https://orcid.org/0000-0001-9871-9440

Alexander Khodyrev
Senior Instructor of Kharkiv Educational Scientific Institute
SHEI "University of Banking" Kharkov,
Kharkiv, Ukraine
https://orcid.org/0000-0001-9871-9440

ВИЗНАЧЕННЯ ДОВІРЧИХ ІНТЕРВАЛІВ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ КРИЦЬКОГО-МЕНКЕЛЯ

В.Ю. Дубницький, О.Є. Петренко, О.І. Ходирєв

Для визначення довірчих інтервалів оцінок параметрів розподілу Крицького-Менкеля, які отримано методом максимуму правдоподібності, запропоновано послідовність дій, яка містить наступні етапи: складання системи рівнянь методу максимуму правдоподібності; вибір способу розв'язання системи рівнянь методу максимуму правдоподібності; визначення початкового наближення системи рівнянь методу максимуму правдоподібності; розв'язання системи рівнянь методу максимуму правдоподібності; визначення елементів інформаційної матриці Фішера; визначення меж довірчих інтервалів для отриманих оцінок параметрів розподілу Крицького-Менкеля. Для розв'язання системи рівнянь методу максимуму правдоподібності обрано метод Ньютона. Отримання початкового наближення виконано згідно з методикою, що використовує графоаналітичний метод. Наведено процедуру розв'язання отриманої системи. Наведено спосіб отримання інформаційної матриці Фішера, необхідної для обчислення довірчих інтервалів оцінок параметрів розподілу Крицького-Менкеля. Отримано вирази, необхідні для визначення значень гессіанів, необхідних для обчислення дисперсій отриманих оцінок параметрів розподілу Крицького-Менкеля. Наведено вирази для визначення довірчих інтервалів розподілу Крицького-Менкеля.

Ключові слова: *розподіл Крицького-Менкеля, метод максимуму правдоподібності, оцінки розподілу Крицького-Менкеля, довірчі інтервали оцінок розподілу Крицького-Менкеля.*

DETERMINATION OF CONFIDENCE INTERVALS OF KRITSKY-MENCKEL DISTRIBUTION PARAMETERS

V. Dubnitskiy, O. Petrenko, A. Khodyrev

For determining of the confidence intervals of the Kritsky-Menckel distribution parameters estimates which obtained by the maximum likelihood method, a sequence of actions is proposed. The sequence consists of the following stages: construction of the equations system for the maximum likelihood method; choice of the method for solving the system of equations of the maximum likelihood method; determination of the initial approximation for the system of equations of the maximum likelihood method; the solution of the system of equations of the maximum likelihood method; the definition of elements of the Fisher information matrix; the determination of the confidence intervals boundaries for the obtained estimates of the Kritsky-Menckel distribution parameters. To solve the systems of equations of the maximum likelihood method, Newton's method was chosen. The initial approximation was obtained by the technique of using the graphoanalytical method. The necessary expressions for calculating the values of Jacobeans that entered the procedure of solving the resulting system are given. The method for obtaining the Fisher information matrix is given. This method is necessary for calculating the confidence intervals for estimates of the Kritsky-Menckel distribution parameters. The expressions necessary for calculating the values of the Hessians involved in the procedure for calculating the variances of the obtained estimates of the Kritsky-Menckel distribution parameters are obtained. The expressions for the determination of confidence intervals for the distribution of Kritsky-Menckel are given.

Keywords: *Kritsky-Menckel distribution, maximum likelihood method, estimates of the Kritsky-Menckel distribution, confidence intervals for the estimates of the Kricki-Menckel distribution.*