

И.Г. Гусарова, А.Н. Коротенко

*Харьковский национальный университет радиотехники, Харьков*

## РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ПО УЧАСТКУ ТРУБОПРОВОДА МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК

*В статье обоснована актуальность моделирования нестационарного неизотермического режима течения газа по участку трубопровода с помощью современных численных методов. Был проведен анализ существующих методов решения квазилинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, полученной из общих уравнений газовой динамики. В работе использовался метод характеристик. Приводятся результаты расчета параметров газового потока нестационарного неизотермического режима течения газа и обоснован выбор метода для решения дифференциальных уравнений характеристик. Полученные результаты могут быть использованы на этапе проектирования и эксплуатации сетей магистральных трубопроводов с целью выработки научно обоснованных рекомендаций по повышению безопасности и эффективности работы трубопроводной системы.*

**Ключевые слова:** *участок трубопровода, нестационарный неизотермический режим течения газа, граничные условия, моделирование, метод характеристик, метод Массо, модифицированный метод Массо.*

### Введение

В настоящее время в Украине осуществляется переход от регистрации свершившегося факта к осознанию необходимости использования инженерных методов предварительного анализа и исследования технических систем и объектов повышенного риска с целью предупреждения аварий. Ясно, что в изменившихся условиях подход к решению проблем безопасности производств, основанный на концепции “реагировать и исправлять”, вынужден уступить место новому, где главенствующий принцип “предвидеть и предупреждать”. Встала задача моделирования техногенной деятельности – чтобы предотвратить тот ее предельный негативный масштаб, превышение которого оборачивается чрезвычайными ситуациями и техногенными катастрофами [1].

Эту задачу можно решить при использовании оперативного управления транспортом газа, которое, в свою очередь, невозможно без полной автоматизации технологических процессов. А последняя невозможна без предварительного создания математических моделей, которые бы рассматривали все нюансы режимов транспорта газа. Поэтому современные технологии проектирования, строительства, эксплуатации и реконструкции сетей магистральных трубопроводов необходимо дополнять численными методами моделирования жизненного цикла рассматриваемой трубопроводной системы, в том числе методами моделирования режимов течения газа в аварийных или нештатных ситуациях. Такое дополнение указанных технологий гарантированно обеспечивает выработку научно обоснованных рекомендаций по повышению безопасности и эффективности работы трубопроводной системы.

В работе рассматриваются нештатные или аварийные ситуации, причиной которых являются отключение или подключение крупных потребителей, несанкционированный отбор или утечка в трубопроводе. Такие режимы течения газа (РТГ) являются нестационарными неизотермическими.

Таким образом, актуальность данных исследований определяется необходимостью научной разработки и аргументирования новых численных методов, которые бы позволили проводить моделирование нестационарных процессов течения газа и на их основе управление в нештатных и аварийных ситуациях в газотранспортной системе (ГТС) с учетом граничных условий. Прежде всего, был проведен анализ численных методов решения систем гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных. Для численного решения таких систем часто используются такие методы, как метод конечных разностей с использованием различных равномерных и неравномерных конечно-разностных сеток [2–8], метод характеристик (Массо, модифицированный Массо) [9–12], метод конечного объема [6; 13], метод конечных разностей с использованием метода Лагранжевых частиц (является модификацией подхода к решению гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных методом характеристик) [6; 13], интегро-интерполяционный метод [6; 13] и др. Каждый из этих методов имеет как достоинства, так и недостатки, но мы остановимся на методе характеристик.

**Целью статьи** является выбор математической модели нестационарных неизотермических режимов течения газа по участку трубопровода (УТ), исследование метода характеристик, а также использование

метода Массо и его модификации для решения системы дифференциальных уравнений гиперболического типа с известным начальным распределением и граничными условиями, анализ полученных результатов и выбор лучшего метода для данной задачи.

### Формальная постановка задачи

Газотранспортная система, с точки зрения описания РТГ, состоит из основных элементов: линейных участков и компрессорных станций.

В работе исследуется УТ длины  $L$ .

Считаем, что хотя бы на одной из границ происходит резкое изменение граничных условий, поэтому режимы течения газа по УТ, являются нестационарными и неизотермическими [10].

Будем описывать нестационарный неизотермический режим течения газа (ННРТГ) с помощью функций массового расхода  $G(x, t)$ , давления  $P(x, t)$ , температуры  $T(x, t)$ , заданных в области  $G' = \{(x, t) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T_k\}$ , где  $T_k$  – время окончания процесса.

В граничных узлах в начале и конце участка заданы граничные условия(ГУ):

$$\begin{cases} P(0, t) = P^0(t), \\ T(0, t) = T^0(t), \end{cases} \quad G(L, t) = G^0(t), \quad (1)$$

где  $P^0(t), T^0(t), G^0(t)$  – заданные функции.

Кроме того, задано начальное распределение параметров газового потока, то есть

$$\begin{cases} W(x, 0) = W_0(x), \\ T(x, 0) = T_0(x), \end{cases} \quad P(x, 0) = P_0(x), \quad x \in [0, L], \quad (2)$$

где  $W(x, t)$  – удельный массовый расход газа;

$W_0(x), P_0(x), T_0(x)$  – известные функции.

Обычно в качестве начального распределения берется распределение параметров газового потока при стационарном режиме. Поэтому необходимо находить параметры газового потока при стационарном режиме течения газа.

### Математическая модель ННРТГ по участку трубопровода

Для общего случая ННРТГ по УТ, представляющему собой цилиндрическую трубу постоянного диаметра, описывается квазилинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных, полученной из общих уравнений Навье-Стокса газовой динамики для одномерного случая [2; 9]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + B(x, t, \phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} = \Phi(x, t, \phi), \quad (3)$$

$$\text{где } B = \begin{pmatrix} 2\alpha TS \frac{W}{p} & 1 - \alpha TS \frac{W^2}{p^2} & 0 \\ \alpha TS & 0 & 0 \\ \alpha S \frac{T^2}{p} (\gamma - 1) & 0 & \alpha TS \frac{W}{p} \gamma \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} -\beta TS \frac{W|W|}{p} - \frac{gp}{\alpha TS} \frac{dh}{dx} \\ 0 \\ -\frac{4K}{D} (\gamma - 1) \frac{T}{p} (T - T_{rp}) - g(\gamma - 1) \frac{TW}{p} \frac{dh}{dx} \end{pmatrix} -$$

матрицы, элементы которых – заданные непрерывно дифференцируемые в некоторой области изменения своих аргументов функции переменных  $x, t, W, P, T$ ;  $\phi = (W(x, t), P(x, t), T(x, t))$  – некоторое непрерывно дифференцируемое в области  $G'$  решение уравнения (3).

### Метод и алгоритм решения

Для нахождения решения системы (3), дополненной начальными (2) и граничными (1) условиями, будет использоваться метод характеристик, суть которого заключается в уменьшении числа независимых переменных путем введения характеристических поверхностей.

Уравнения направлений характеристик имеют вид:  $dt = \bar{\lambda}_i(x, t, \phi) dx, i = 1, 2, 3$ , где  $\bar{\lambda}_i$  – корни уравнения

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - 2\alpha TS \frac{W \bar{\lambda}}{p} & -\bar{\lambda} \left( 1 - \alpha TS \frac{W^2}{p^2} \right) & 0 \\ -\bar{\lambda} \alpha TS & 1 & 0 \\ -\bar{\lambda} \alpha S \frac{T^2}{p} (\gamma - 1) & 0 & 1 - \bar{\lambda} \alpha TS \frac{W}{p} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, обозначая  $a^2 = \alpha ST$ , получим

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{a + a^2 \frac{W}{p}}, \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{p}{a^2 W \gamma}, \quad \bar{\lambda}_3 = \frac{1}{-a + a^2 \frac{W}{p}}.$$

При данном в области  $G'$  решении системы (3) мы имеем три семейства характеристик, и на каждом из этих семейств имеем свое дифференциальное соотношение:

$$\begin{aligned} & -\frac{a^2 T (-1 + \gamma)}{P} dW + \frac{a T (-P + aW) (-1 + \gamma)}{p^2} dP - \\ & - \frac{a S T^2 W \beta (-1 + \gamma) |W|}{P(P + aW)} dx = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{a^2 T(-1+\gamma)}{P} dW + \left( -\frac{T(P^2 - a^2 W^2)(-1+\gamma)}{P^2 W \gamma} \right) dP + \\
 & + \frac{(P^2 - a^2 W^2)(-1+\gamma)^2}{PW \gamma} dT + \\
 & + \frac{a^2 T W(-1+\gamma) \gamma \Phi_1 + (-P^2 + a^2 W^2)(-1+\gamma)^2 \Phi_2}{a^2 W^2 \gamma^2} dx = 0, \\
 & -\frac{a^2 T(-1+\gamma)}{P} dW + \frac{aT(P+aW)(-1+\gamma)}{P^2} dP + \\
 & + \frac{aST^2 W \beta(-1+\gamma) |W|}{P(P-aW)} dx = 0.
 \end{aligned}$$

Или в сокращенном виде [9]:

$$dt = \lambda_i dx, \quad M_i dW + N_i dP + P_i dT - C_i dx, \quad i = 1, 2, 3.$$

Для численного решения полученных дифференциальных уравнений характеристик применяется метод Массо (ММ) [9–10] и его модификация (МММ) [10], после чего сравниваются полученные результаты и выбирается лучший метод для решения дифференциальных соотношений трех семейств характеристик с учетом граничных условий.

В качестве алгоритма МММ расчета параметров газового потока для узлов сетки, которые зависят от начального распределения и граничных условий, берется алгоритм, приведенный в работе [9] с учетом изменений, приведенных в работе [10], рассматривается только построение параметров газового потока в узлах сетки (рис. 1)

Рассмотрим алгоритм для нахождения параметров 1-й точки на четном временном слое ( $k+1=2, 4, \dots$ ), по параметрам 2-й точки на нечетном временном слое с учетом граничных условий в начале участка.

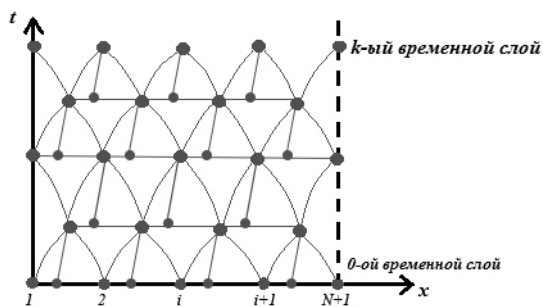


Рис. 1. Сетка для расчета параметров газового потока

1) Считаем, что заданы следующие граничные условия

$$P(0, t) = P^0(t), T(0, t) = T^0(t), G(L, t) = G^L(t).$$

2) Берем параметры точки т.2 ( $x_2, t_2, W_2(x_2, t_2), P_2(x_2, t_2), T_2(x_2, t_2)$ ) на нечетном временном слое, и находим параметры т.3

( $x_3, t_3, W_3(x_3, t_3), P_3(x_3, t_3), T_3(x_3, t_3)$ ) на следующем (четном) временном слое (рис. 2).

Т.3 находится на оси ординат, поэтому  $x_3 = 0$ , следовательно

$$t_3^{(1)} = t_2 - \overline{\lambda}_{32} x_2.$$

Точка  $t_3^{(1)}$  является точкой пересечения прямой, проведенной из т.2 и осью ординат.

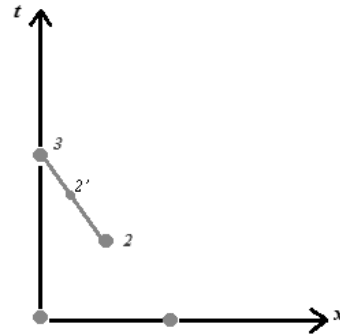


Рис. 2. Расчет параметров газового потока в начале участка

3) Так как в начале участка заданы давление и температура, как функции времени, то при известном параметре  $t_3$  можно найти  $P_3(x_3, t_3), T_3(x_3, t_3)$  из граничных условий.

$$P_3^{(1)} = P^0(t_3^{(1)}), T_3^{(1)} = T^0(t_3^{(1)}).$$

4) Принимая отрезок 23 за характеристику и используя дифференциальное соотношение вдоль характеристики, запишем уравнение для определения первого приближения  $W(x, t)$ , в т.3, т.е.  $W_3^{(1)}$ :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{a^2 T_2(-1+\gamma)}{P_2} (W_3^{(1)} - W_2) + \frac{aT_2(P_2 + aW_2)(-1+\gamma)}{P_2^2} \times \\
 & \times (P_3^{(1)} - P_2) + \frac{aST_2^2 W_2 \beta(-1+\gamma) |W_2|}{P_2(P_2 - aW_2)} (x_3^{(1)} - x_2) = 0.
 \end{aligned}$$

Пусть

$$M_i^{(1)} = -\frac{a^2 T_i(-1+\gamma)}{P_i},$$

$$N_i^{(1)} = \frac{aT_i(P_i + aW_i)(-1+\gamma)}{P_i^2},$$

$$C_i^{(1)} = \frac{aST_i^2 W_i \beta(-1+\gamma) |W_i|}{P_i(P_i - aW_i)},$$

$$PP_i^{(1)} = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 & M_2^{(1)}(W_3^{(1)} - W_2) + N_2^{(1)}(P_3^{(1)} - P_2) + \\
 & + C_2^{(1)}(x_3^{(1)} - x_2) = 0.
 \end{aligned}$$

Положим  $l = 1$ .

5) Найдя параметры точки 3:  $(x_3, t_3^{(l)}, W_3^{(l)}, P_3^{(l)}, T_3^{(l)})$ , произведем ее уточнение следующим способом.

Вычисляем значения  $\overline{\lambda_{33}^{(l)}}$ :

$$\overline{\lambda_{33}^{(l)}} = \frac{1}{-\sqrt{\alpha ST_3^{(l)}} + ST_3^{(l)} \frac{W_3^{(l)}}{P_3^{(l)}} \alpha}.$$

6) Находим величину

$$\overline{\lambda_{32}^{(l+1)}} = \frac{1}{2}(\overline{\lambda_{32}} + \overline{\lambda_{33}^{(l)}}).$$

7) Находим новые координаты точки 2' и значения  $M_i^{(l+1)}, N_i^{(l+1)}, P_i^{(l+1)}, C_i^{(l+1)}$  по формулам:

$$\begin{aligned} x_{i'}^{(l)} &= \frac{1}{2}(x_i + x_3^{(l)}), \quad t_{i'}^{(l)} = \frac{1}{2}(t_i + t_3^{(l)}), \\ P_{i'}^{(l)} &= \frac{1}{2}(P_i + P_3^{(l)}), \quad T_{i'}^{(l)} = \frac{1}{2}(T_i + T_3^{(l)}), \\ W_{i'}^{(l)} &= \frac{1}{2}(W_i + W_3^{(l)}), \quad i = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} M_i^{(l+1)} = M_{i'}^{(l)}, \quad N_i^{(l+1)} = N_{i'}^{(l)}, \\ PP_i^{(l+1)} = 0, \quad C_i^{(l+1)} = C_{i'}^{(l)}, \quad i = 2. \end{cases}$$

8) Найдем координату уточненной точки 3 по формуле:

$$t_3^{(l+1)} = t_2 - \overline{\lambda_{32}^{(l+1)}} x_2.$$

9) Используя эту формулу, и граничные условия находим значения  $P_3^{(l+1)}, T_3^{(l+1)}$ :

$$\begin{aligned} P_3^{(l+1)} &= P^0(t_3^{(l+1)}), \\ T_3^{(l+1)} &= T^0(t_3^{(l+1)}). \end{aligned}$$

10)  $W_3^{(l+1)}$  находим из уравнения

$$\begin{aligned} M_2^{(l+1)}(W_3^{(l+1)} - W_2) + N_2^{(l+1)}(P_3^{(l+1)} - P_2) + \\ + PP_2^{(l+1)}(T_3^{(l+1)} - T_2) - C_2^{(l+1)} x_2 = 0. \end{aligned}$$

11) Если  $|\overline{W_3^{(l+1)}} - W_3^{(l)}| < \varepsilon$  и  $|t_3^{(l+1)} - t_3^{(l)}| < \varepsilon$ ,

то  $W_3^{(l+1)}, P_3^{(l+1)}, T_3^{(l+1)}, x_3, t_3^{(l+1)}$  найдено (это будут параметры 1-й точки на следующем  $k+1$ -м временном слое), и переходим к поиску параметров последней  $N+1$ -й точки на следующем  $k+1$ -м временном слое, в противном случае  $l=1+1$  переходим к пункту 5.

Рассмотрим алгоритм для нахождения параметров  $N+1$ -й точки

$$\begin{aligned} (x_{N+1}, t_{N+1}, W_{N+1}(x_{N+1}, t_{N+1}), \\ P_{N+1}(x_{N+1}, t_{N+1}), T_{N+1}(x_{N+1}, t_{N+1})) \end{aligned}$$

на четном временном слое ( $k+1=2, 4, \dots$ ), по параметрам  $N+1$ -й точки  $(x_{N+1}, t_{N+1}, W_{N+1}(x_{N+1}, t_{N+1}),$

на предыдущем нечетном  $k$ -м временном слое и по параметрам  $N+1$ -й точки

$$\begin{aligned} (x_{N+1}, t_{N+1}, W_{N+1}(x_{N+1}, t_{N+1}), \\ P_{N+1}(x_{N+1}, t_{N+1}), T_{N+1}(x_{N+1}, t_{N+1})) \end{aligned}$$

на предыдущем четном  $(k-1)$ -м временном слое с учетом граничных условий в конце участка:

1) Берем параметры точки т.1  $(x_1, t_1, W_1(x_1, t_1), P_1(x_1, t_1), T_1(x_1, t_1))$  на  $k$ -м временном слое, и параметры т.2  $(x_2, t_2, W_2(x_2, t_2), P_2(x_2, t_2), T_2(x_2, t_2))$  на  $(k-1)$ -м временном слое, находим параметры третьей точки т.3  $(x_3, t_3, W_3(x_3, t_3), P_3(x_3, t_3), T_3(x_3, t_3))$  на следующем  $(k+1)$ -м (четном) временном слое (рис. 4). Т.3 находится на оси ординат, поэтому  $x_3 = L$ , кроме того, так как в конце участка задан расход, как функции времени, то при известном параметре  $t_3$  можно найти  $W_3(x_3, t_3)$  из граничных условий.

2) Обозначим через  $O$  середину отрезка, соединяющего точки 1 и 2. Координаты этой точки вычисляются по формулам:

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2); \quad t_0 = \frac{1}{2}(t_1 + t_2).$$

$$P_0 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2); \quad T_0 = \frac{1}{2}(T_1 + T_2); \quad W_0 = \frac{1}{2}(W_1 + W_2).$$

3) Так как т.3 находится на оси ординат, поэтому  $x_3 = L$ . Находим вторую координату т.3  $t_3^{(l)}$ :

$$t_3^{(l)} = t_1 + \overline{\lambda_{11}}(L - x_1),$$

являющиеся точкой пересечения прямой, проведенной из точки 1 и осью ординат.

4) Найдем новые координаты точки

$$O_1 = (x_0^{(l)}, t_0^{(l)}):$$

$$\begin{cases} t_3^{(l)} - t_0^{(l)} = \overline{\lambda_{20}}(L - x_0^{(l)}), \\ t_1 - t_0^{(l)} = \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}(x_1 - x_0^{(l)}). \end{cases}$$

5) Вводим обозначение вида

$$v^{(l)} = \frac{x_0^{(l)} - x_1}{x_2 - x_0^{(l)}} = \frac{t_1 - t_0^{(l)}}{t_0^{(l)} - t_2}.$$

6) Определяем значения  $W(x, t), P(x, t), T(x, t)$  в точке  $O_1$  по формуле

$$\begin{cases} W_0^{(l)} = \frac{W_1 + v^{(l)}W_2}{1 + v^{(l)}}; \\ P_0^{(l)} = \frac{P_1 + v^{(l)}P_2}{1 + v^{(l)}}; \\ T_0^{(l)} = \frac{T_1 + v^{(l)}T_2}{1 + v^{(l)}}. \end{cases}$$

7) Находим первое приближение  $W(x, t)$  из граничных условий:

$$W_3^{(l)} = G^L(t_3^{(l)})/S,$$

где  $S$  – площадь сечения трубы.

8) Принимая отрезки 13 и 0,3 за характеристики и используя дифференциальные соотношения вдоль характеристик, пишем систему уравнений для определения первых приближений  $P(x, t)$ ,  $T(x, t)$  в т.3:

$$\left\{ \begin{aligned} &-\frac{a^2 T_1^{(l)}(-1+\gamma)(W_3^{(l)} - W_1) + \frac{a T_1(-P_1 + a W_1)(-1+\gamma)}{P_1^2} \times \\ &\times (P_3^{(l)} - P_1) - \frac{a S T_1^2 W_1 \beta (-1+\gamma) |W_1|}{P_1(P_1 + a W_1)} (L - x_1) = 0, \\ &-\frac{a^2 T_0^{(l)}(-1+\gamma)(W_3^{(l)} - W_0^{(l)}) + \\ &+ \left( -\frac{T_0^{(l)}(P_0^{(l)2} - a^2 W_0^{(l)2})(-1+\gamma)}{P_0^{(l)2} W_0^{(l)} \gamma} \right) (P_3^{(l)} - P_0^{(l)}) + \\ &+ \frac{(P_0^{(l)2} - a^2 W_0^{(l)2})(-1+\gamma)^2}{P_0^{(l)} W_0^{(l)} \gamma} (T_3^{(l)} - T_0^{(l)}) + \\ &+ \frac{a^2 T_0^{(l)} W_0^{(l)} (-1+\gamma) \gamma \Phi_1 + (-P_0^{(l)2} + a^2 W_0^{(l)2})(-1+\gamma)^2 \Phi_2}{a^2 W_0^{(l)2} \gamma^2} \times \\ &\times (L - x_0^{(l)}) = 0. \end{aligned} \right.$$

Положим  $l = 1$ .

9) Найдя параметры точки 3:  $(L, t_3^{(l)}, W_3^{(l)}, P_3^{(l)}, T_3^{(l)})$ , произведем ее уточнение следующим способом. Вычисляем значения  $\overline{\lambda}_{13}^{(l)}, \overline{\lambda}_{23}^{(l)}$ :

$$\overline{\lambda}_{13}^{(l)} = \frac{1}{\sqrt{\alpha S T_3^{(l)} + S T_3^{(l)} \frac{W_3^{(l)}}{P_3^{(l)}} \alpha}}, \quad \overline{\lambda}_{23}^{(l)} = \frac{P_3^{(l)}}{\alpha S T_3^{(l)} W_3^{(l)} \gamma}.$$

10) Находим величины

$$\overline{\lambda}_{11}^{(l+1)} = \frac{1}{2}(\overline{\lambda}_{11} + \overline{\lambda}_{13}^{(l)}), \quad \overline{\lambda}_{20}^{(l+1)} = \frac{1}{2}(\overline{\lambda}_{20}^{(l)} + \overline{\lambda}_{23}^{(l)}).$$

11) Находим новые координаты точки 1',  $O_1'$  и значения  $M_i^{(l+1)}, N_i^{(l+1)}, P_i^{(l+1)}, C_i^{(l+1)}$  по формулам:

$$\begin{aligned} x_{i'}^{(l)} &= \frac{1}{2}(x_i + x_3^{(l)}), \quad t_{i'}^{(l)} = \frac{1}{2}(t_i + t_3^{(l)}), \\ P_{i'}^{(l)} &= \frac{1}{2}(P_i + P_3^{(l)}), \quad T_{i'}^{(l)} = \frac{1}{2}(T_i + T_3^{(l)}), \\ W_{i'}^{(l)} &= \frac{1}{2}(W_i + W_3^{(l)}), \quad i = 1, O_1. \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &PP_1^{(l+1)} = 0, PP_{O_1}^{(l+1)} = PP_{O_1}^{(l)}, \\ &M_i^{(l+1)} = M_{i'}^{(l)}, N_i^{(l+1)} = N_{i'}^{(l)}, C_i^{(l+1)} = C_{i'}^{(l)}, i = 1, O_1. \end{aligned} \right.$$

12) Найдем координаты уточненных точек 0 и 3 по формулам:

$$\begin{aligned} t_3^{(l+1)} &= t_1 + \overline{\lambda}_{11}^{(l+1)}(L - x_1), \\ \begin{cases} t_3^{(l+1)} - t_0^{(l+1)} = \overline{\lambda}_{20}^{(l+1)}(x_3^{(l+1)} - x_0^{(l+1)}), \\ t_1 - t_0^{(l+1)} = \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1}(x_1 - x_0^{(l+1)}). \end{cases} \end{aligned}$$

13) Вычислим значения  $v^{(l+1)}, W_0^{(l+1)}, P_0^{(l+1)}, T_0^{(l+1)}$  по формулам:

$$v^{(l+1)} = \frac{x_0^{(l+1)} - x_1}{x_2 - x_0^{(l+1)}}, \quad \begin{cases} W_0^{(l+1)} = \frac{W_1 + v^{(l+1)} W_2}{1 + v^{(l+1)}}; \\ P_0^{(l+1)} = \frac{P_1 + v^{(l+1)} P_2}{1 + v^{(l+1)}}; \\ T_0^{(l+1)} = \frac{T_1 + v^{(l+1)} T_2}{1 + v^{(l+1)}}. \end{cases}$$

14) Находим приближение  $W(x, t)$  из граничных условий:

$$W_3^{(l+1)} = G^L(t_3^{(l+1)})/S.$$

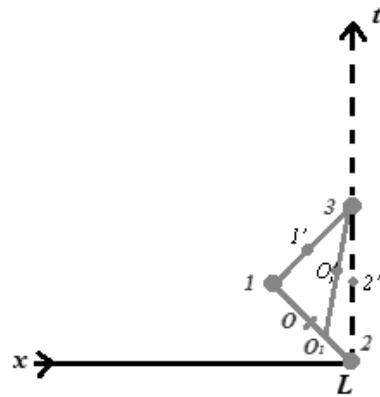


Рис. 3. Нахождение параметров газового потока в конце участка

15) Используя предыдущие формулы, находим значения  $P_3^{(l+1)}, T_3^{(l+1)}$ , решая систему уравнений

$$\begin{cases} M_1^{(l+1)}(W_3^{(l+1)} - W_1) + N_1^{(l+1)}(P_3^{(l+1)} - P_1) + \\ + PP_1^{(l+1)}(T_3^{(l+1)} - T_1) + C_1^{(l+1)}(L - x_1) = 0, \\ M_{O_1}^{(l+1)}(W_3^{(l+1)} - W_0^{(l+1)}) + N_{O_1}^{(l+1)} \times \\ \times (P_3^{(l+1)} - P_0^{(l+1)}) + PP_{O_1}^{(l+1)}(T_3^{(l+1)} - T_0^{(l+1)}) + \\ + C_{O_1}^{(l+1)}(L - x_0^{(l+1)}) = 0. \end{cases}$$

16) Если

$|P_3^{(l+1)} - P_3^{(l)}| < \varepsilon$  и  $|T_3^{(l+1)} - T_3^{(l)}| < \varepsilon$  и  $|t_3^{(l+1)} - t_3^{(l)}| < \varepsilon$ ,  
то параметры точки 3  $(L, t_3^{(l+1)}, W_3^{(l+1)}, P_3^{(l+1)}, T_3^{(l+1)})$  найдены, (это будет  $N+1$  точка на  $k+1$ -м времен-

ном слое, и переходим к п.11 основного алгоритма [9], в противном случае  $l=1+1$  переходим к п.9.

Для решения поставленной задачи расчета ННРТГ для УТ был создан программный продукт, написанный в математическом пакете Mathematica 11.2., позволяющий рассчитывать параметры газового потока по УТ на каждом временном слое, которые зависят от начального распределения и граничных условий, с помощью ММ и МММ.

### Анализ результатов

Проведем сравнение результатов численного моделирования, полученных с использованием ММ и МММ.

Рассмотрим линейный участок длиной  $L = 28$  км и диаметром  $D = 1400$  мм. Число точек разбиения для УТ равно  $N$ . Начальное распределение – стационарное с коммерческим расходом  $q = 102,226$  млн.м<sup>3</sup>/сут, температурой  $T_H = 40^\circ\text{C}$  и давлением  $P_H = 84.6364456$  атм. Точность расчета  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Проведем расчет стационарного режима течения газа по нестационарной модели (3) при  $N = 5; 14; 28$  и  $T_k = 6220; 2223; 1111$  сек соответственно. Анализ полученных результатов показывает одинаковый характер изменения неизвестных параметров газового потока – коммерческого расхода, давления и температуры, полученных по ММ и МММ, оба метода точно описывают рассматриваемый режим.

Приведем сравнение по параметрам газового потока: по коммерческому расходу, давлению и температуре на последнем 800-м временном слое и времени счета на ЭВМ по ММ и МММ для различного числа точек разбиения УТ (табл. 1).

Таблица 1

Сравнение результатов

N	Максимум модуля разности по параметрам			Время счета(мин)	
	q	P	T	ММ М	МММ
5	0.000060 5498	0.000093 5755	0.000058 5065	0.804 643	0.914 825
14	0.000007 01331	0.000011 8319	0.000007 85073	1.239 8	1.531 85
28	0.000001 97687	0.000002 93812	0.000002 03535	2.070 59	2.508 94

Можно сделать вывод, что параметры газового потока, полученные по ММ и МММ, отличаются в 5-м знаке после запятой при  $N = 5; 14$ , и в 6-м знаке

после запятой при  $N = 28$ , т.е. оба метода дают достаточно точные результаты. Вычислительный эксперимент показал, что характер поведения переменных, независимо от количества точек разбиения, не изменяется.

Но по времени счета алгоритма МММ быстрее, чем ММ. И для МММ, и для ММ для заданной точности для расчета параметров газового потока достаточно взять разбиение участка на 5 отрезков.

Проиллюстрируем результаты численного моделирования ННРТГ по УТ на примере ситуации, связанной с подключением и отключением крупного потребителя при  $N = 5$ ,  $T_k = 6220$  сек. От начала расчета и до подключения потребителя в конце УТ коммерческий расход  $q = 102,226$  млн.м<sup>3</sup>/сут, после 2332 сек (с 300-го временного слоя) от начала отсчета произошло подключение потребителя в конце участка и коммерческий расход стал  $q = 112,226$  млн.м<sup>3</sup>/сут, после 3888 сек (после 500-го временного слоя) произошло отключения потребителя и коммерческий расход снова стал  $q = 102,226$  млн.м<sup>3</sup>/сут. В начале участка граничные условия не изменяются  $T_H = 40^\circ\text{C}$  и  $P_H = 84.6364456$  атм.

Сравнительные результаты для параметров газового потока на различных временных слоях: 298,498 (до начала изменения ГУ), 302,310,320, 502,510,520 (после изменения ГУ), 800 (последний слой), по ММ и МММ приведены в табл. 2.

Таблица 2

Сравнение результатов

Временной слой	Максимум модуля разности по параметрам		
	q	P	T
298	0.0000596019	0.0000932312	0.0000608942
302	0.012513	0.00147993	0.0011478
310	0.0125275	0.00104416	0.000829904
320	0.00801738	0.000868954	0.000695193
498	0.000115553	0.000174839	0.000142784
502	0.000114283	0.00108704	0.000904939
510	0.006427	0.000380328	0.000391363
520	0.0032358	0.000259867	0.000259857
800	0.0000628539	0.0000956549	0.0001018

Как видно из табл. 2 и остальных результатов, наибольшие различия наблюдаются по расходу на нескольких временных слоях после изменения граничных условий. На рис. 4–5 приведены графики

изменения коммерческого расхода и давления с течением времени по УТ. Время расчета для МММ составляет -0.850725 мин, а для ММ – 1.06192 мин.

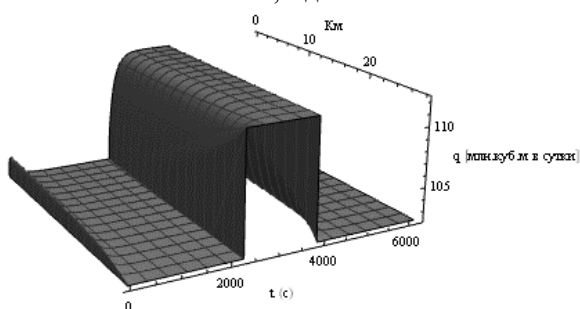


Рис. 4. Изменение коммерческого расхода с течением времени по УТ

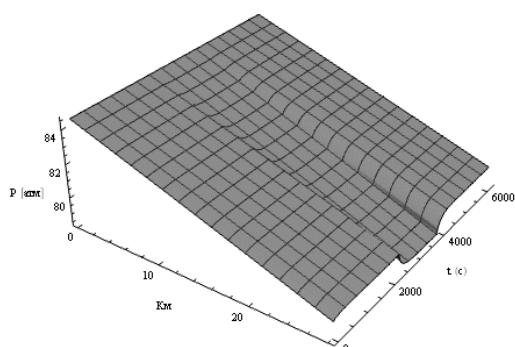


Рис. 5. Изменение давления с течением времени по УТ

В результате дальнейших исследований был сделан вывод, что независимо от длины участка и диаметра трубопровода, при одинаковом количестве точек разбиения как модифицированный метод Массо, так и метод Массо дают практически одинаковые результаты, но модифицированный метод Массо позволяет за меньшее расчетное время проводить расчет параметров газового потока при переходных процессах.

## Выводы

В работе была выбрана математическая модель ННРТГ по УТ, для решения уравнений математической модели использовался метод характеристик и построен соответствующий алгоритм расчета ННРТГ по УТ, проведен анализ полученных результатов и сравнение методов.

В результате исследований можно сделать вывод, что для расчета ННРТГ по УТ при известном начальном распределении параметров газового потока и граничных условиях лучше использовать модифицированный метод Массо, который дает результат за меньшее расчетное время, чем метод Массо.

## Список литературы

1. Надежность технических систем и техногенный риск: учеб. пособие / В.А. Пучков, В.Л. Лапин, В.И. Томаков и др. – М.: Деловой экспресс, 2002. – 367 с.
2. Трубопроводные системы энергетики: Методические и прикладные проблемы моделирования. Разд. 3.3. / Н.Н. Новицкий, М.Г. Сухарев, А.Д. Тевяшев и др. – Новосибирск: Наука, 2015. – С. 193-204.
3. Селезнев В.Е. Методы построения моделей течений в магистральных трубопроводах и каналах: монография / В.Е. Селезнев, С.Н. Прялов. –М.-Берлин: Директ-Медиа, 2014. – 557 с.
4. Ермолаева Н.Н. Нестационарные модели теплообмена и транспортировки газа по морским газопроводам / Н.Н. Ермолаева // Труды Карельского научного центра РАН. Серия Математическое моделирование и информационные технологии. – 2016. – №8. – С. 3-10.
5. Ермолаева Н.Н. Компьютерное моделирование оледенения морского газопровода и поведения характеристик потока в неустановившихся режимах / Н.Н. Ермолаева // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2016. – Вып. 4. – С. 75-86.
6. Селезнев В.Е. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов / В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов; под. ред. В.Е. Селезнева. Изд. 2-е, перер. и доп. – М.: МАКС Пресс, 2009. – 436 с.
7. Карпович Д.С. Аналитический и численный методы решения уравнения теплопроводности / Д.С. Карпович, О.Н. Суша, Н.П. Коровкина, В.П. Кобринец // Труды БГТУ. – 2015. – № 6(179). – С. 122-127.
8. Рождественский Б.Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко; изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1978. – 688 с.
9. Гусарова И.Г. Численное моделирование нестационарных режимов течения газа методом характеристик / И.Г. Гусарова, Ю.В. Ягупова // Системы обработки информации. – 2015. – Вып. 4(129). – С. 16-19.
10. Гусарова И.Г. Результаты численного моделирования режимов течения газа по участку трубопровода методом характеристик / И.Г. Гусарова, А.Н. Коротенко // Системы обработки информации. – 2017. – Вып. 2(148). – С. 24-28.
11. Helgaker J.F. Modeling Transient Flow in Long Distance Offshore Natural Gas Pipelines / J.F. Helgaker. – Thesis for PhD. – Trondheim, 2013.
12. Милехин Ю.М. Расчет методом характеристик нестационарных внутрибаллистических параметров выхода РДТТ на рабочий режим/ Ю.М. Милехин, А.Н. Ключников, В.С. Попов, Н.Д. Пелипас // Физика горения и взрыва. – 2014. – № 6(50). – С. 61-74.
13. Селезнев В.Е. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов: монография / В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов; изд. 3-е, перераб. и доп. – М.-Берлин: Директ-Медиа, 2014. – 436 с.

## References

1. Puchkov, V.A., Lapin, V.L. and Tomakov, V.I. (2002), "Nadezhnost' tehnikeskikh sistem i tehnogennyi risk: ucheb. posobie" [Reliability of technical systems and technogenic risk: a tutorial], Business Express, Moscow, 367 p.
2. Novitsky, N.N., Sukharev, M.G. and Tevyashev, A.D. (2015), "Truboprovodnye sistemy jenergetiki: Metodicheskie i prikladnye problemy modelirovaniya" [Pipeline Energy Systems: Methodological and Applied Problems in Modeling], Science, Novosibirsk, pp. 193-204.
3. Seleznev, V.E. and Pryalov, S.N. (2014), "Metody postroeniya modelej techenij v magistral'nyh truboprovodah i kanalah: monografiya" [Methods for constructing models of flows in main pipelines and canals: monograph], Direct-Media, Moscow-Berlin, 557 p.
4. Ermolaeva, N.N. (2016), "Nestacionarnye modeli teploobmena i transportirovki gaza po morskim gazoprovodam" [Non-stationary models of heat exchange and gas transportation by sea gas pipelines], Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Mathematical Modeling and Information Technologies Series, No. 8, pp. 3-10.
5. Ermolaeva, N.N. (2016), "Kompyuternoe modelirovanie oledeneniya morskogo gazoprovoda i povedeniya harakteristik potoka v neustanovivshisya rezhimakh" [Computer simulation of the glaciation of the offshore gas pipeline and behavior of flowing characteristics in unsteady regimes], Bulletin of St. Petersburg University, No. 4(10), pp. 75-86.
6. Seleznev, V.E., Aleshin, V.V. and Pryalov, S.N. (2009), "Osnovy chislennogo modelirovaniya magistral'nyh truboprovodov" [Fundamentals of numerical simulation of main pipelines], MAX Press, Moscow, 436 p.
7. Karpovich, D.S., Susha, O.N. and Korovkina, N.P. (2015), "Analiticheskij i chislennyj metody resheniya uravneniya teploprovodnosti" [Analytical and numerical methods for solving the heat equation], Proceedings of the Belarusian State Technological University, No. 6(179), pp. 122-127.
8. Rozhdestvenskij, B.L. and Yanenko, N.N. (1978), "Sistemy kvazilinejnyh uravnenij i ih prilozheniya k gazovoj dinamike" [Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics], Science, Moscow, 688 p.
9. Husarova, I.H. and Yagupova, Y.V. (2015), "Chislennoe modelirovanie nestacionarnykh rezhimov techenija gaza metodom harakteristik" [The numerical simulation of non-stationary modes of gas flowing by the characteristics method], Information Processing Systems, No. 4(129), pp. 16-19.
10. Husarova, I.H. and Korotenko, A.N. (2017), "Rezultaty chislennogo modelirovaniya rezhimov techenija gaza po uchastku truboprovoda metodom harakteristik" [The results of numerical modeling of modes of the gas flowing on the pipeline section by the characteristics method], Information Processing Systems, No. 2(148), pp. 24-28.
11. Helgaker, J.F. (2013), Modeling Transient Flow in Long Distance Offshore Natural Gas Pipelines: Thesis for PhD, Trondheim.
12. Milekhin, Yu.M., Klyuchnikov, A.N. and Popov, V.S. (2014), "Raschet metodom harakteristik nestacionarnykh vnutriballisticheskikh parametrov vyhoda RDTT na rabochij rezhim" [Calculation by the method of characteristics of non-stationary intraballistic parameters of the output rocket engine on solid fuel for operation], Physics of Combustion and Explosion, No. 6(50), pp. 61-74.
13. Seleznev, V.E., Aleshin, V.V. and Pryalov, S.N. (2014), "Osnovy chislennogo modelirovaniya magistral'nyh truboprovodov: monografiya" [Fundamentals of numerical simulation of trunk pipelines: monograph], Direct-Media, Moscow-Berlin, 436 p.

Поступила в редколлегию 10.04.2018

Одобрена к печати 15.05.2018

## Відомості про авторів:

**Гусарова Ірина Григоріївна**

кандидат технічних наук доцент  
професор кафедри Харківського національного  
університету радіоелектроніки,  
Харків, Україна  
<https://orcid.org/0000-0002-1421-0864>

**Коротенко Анастасія Миколаївна**

Студент-магістрант Харківського національного  
університету радіоелектроніки,  
Харків, Україна  
<https://orcid.org/0000-0002-9345-8349>

## Information about the authors:

**Iryna Husarova**

Candidate of Technical Sciences Associate Professor  
Professor of Department of Kharkiv National University  
of Radio Electronics,  
Kharkiv, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0002-1421-0864>

**Anastasiia Korotenko**

Graduate Student of Kharkiv National University  
of Radio Electronics,  
Kharkiv, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0002-9345-8349>



**РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ ТЕЧІЇ ГАЗУ  
ПО ДІЛЯНЦІ ТРУБОПРОВОДУ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК**

І.Г. Гусарова, А.М. Коротенко

*У статті обґрунтована актуальність моделювання нестационарного неізоермічного режиму течії газу по ділянці трубопроводу за допомогою сучасних чисельних методів. Рівень розвитку обчислювальної техніки дозволяє вирішити це завдання і реалізувати достатньо складні методи розрахунку параметрів газового потоку з необхідною точністю та необхідною швидкістю. Був проведений аналіз існуючих методів розв'язання квазілінійної системи диференціальних рівнянь в часткових похідних гіперболічного типу, отриманої із загальних рівнянь газової динаміки. Деякими перевагами у цьому випадку володіють методи скінченних різниць та характеристик. В роботі використовувався метод характеристик, основна ідея якого полягає в зменшенні числа незалежних змінних шляхом введення характеристичних поверхонь. Наводяться результати розрахунку параметрів газового потоку нестационарного неізоермічного режиму течії газу та обґрунтовано вибір методу для розв'язання диференціальних рівнянь характеристик. Отримані результати можуть бути використані на етапі проектування, будівництва, експлуатації та реконструкції мереж магістральних трубопроводів з метою вироблення науково обґрунтованих рекомендацій щодо підвищення безпеки та ефективності роботи трубопровідної системи*

**Ключові слова:** ділянка трубопроводу, нестационарний неізоермічний режим течії газу, граничні умови, моделювання, метод характеристик, метод Массо, модифікований метод Массо.

**THE RESULTS OF NUMERICAL MODELING OF TRANSITIONAL MODES OF THE GAS FLOWING  
ON THE PIPELINE SECTION BY THE CHARACTERISTICS METHOD**

I. Husarova, A. Korotenko

*Relevance of the research of modeling the nonstationary non-isothermal regime of gas flowing along the pipeline section using mathematical modeling substantiated in the article. The current state of computer technology development allows solving aforementioned problem and implement rather complex methods for calculating the parameters of the gas flowing with the required accuracy and the required speed. Analysis of the existing methods for solving a quasilinear system of partial differential equations of hyperbolic type based on general equations of gas dynamics. Finite difference method and method of characteristics, have a number of advantages in this case. There was used method of characteristics in the article. The reducing number of independent variables by introducing characteristic surfaces is the main idea of method characteristics. Results of calculation the parameters of the gas flowing of a nonstationary non-isothermal gas flowing regime are presented and the choice of a method for solving differential equations of characteristics is justified. Obtained results can be used at the stage of designing, construction, operation and reconstruction of main pipeline networks in order to develop scientifically grounded recommendations for improving the safety and efficiency of the pipeline system. In order to use the results, obtained using the proposed method of mathematical modeling, will optimize the design of advanced aircraft to reduce their radar visibility.*

**Keywords:** pipeline section's, non-stationary non-isothermal gas flowing mode, boundary conditions, modeling, method of characteristics, Masso's method, Masso's modification method.