

# Математичні моделі та методи

УДК 621.396.9

DOI: 10.30748/soi.2018.155.07

О.М. Будур, В.М. Клименко, В.В. Кудрявцев, С.О. Нікул, М.М. Петрушенко

Військова академія, Одеса

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЦИФРОВОЇ СИСТЕМИ АВТОМАТИЧНОГО СУПРОВОДЖЕННЯ ЦІЛІ ПО ДАЛЬНОСТІ

У статті розглядається математична модель цифрової системи автоматичного супроводження цілі по дальності, яка, на відміну від існуючих, задовольняє вимогам щодо стійкості та якості системи вимірювання дальності та автоматичного супроводження цілі. За результатами дослідження запропоновано математичний підхід до вибору оптимальних параметрів функціонування складових частин цифрової системи автоматичного супроводження цілі по дальності. За допомогою математичної моделі проведено порівняльний аналіз цифрової та аналогової систем, за результатами якого отримані оптимальні параметри забезпечення стійкого супроводження цілі.

**Ключові слова:** цифрова система автоматичного супроводження цілі по дальності, математична модель, часовий дискримінатор, перетворювач напруга-код, перетворювач код-часова затримка.

### Вступ

Цифрова система автоматичного супроводження дальності (АСД) забезпечує вимірювання дальності до цілі та наведення, здійснює автоматичну часову селекцію відбитих від цілі радіоімпульсів – стеження за дальністю, проводить автоматичне вимірювання дальності до цілі [6] та є однією з найважливіших слідкуючих систем будь-якого зенітного ракетного комплексу (ЗРК).

Оцінка параметрів сигналів, що несуть інформацію про координати і характеристики повітряних цілей, є одною з основних операцій первинної обробки радіолокаційних сигналів. Оцінка параметрів починається після того, як прийнято рішення про виявлення цілі. Цифрові системи автоматичного супроводження дальності мають високу стабільність параметрів [2], які не залежить від впливу зовнішнього середовища. Окрім цього, при цифровій реалізації система автоматичного супроводження дальності значно скорочує експлуатаційні витрати, пов'язані з періодичними регулювальними роботами по її обслуговуванню [5].

**Метою статті** є вибір ціни найменшого розряду перетворення “код–часова затримка”, вибір параметрів алгоритму оцінювання та екстраполяції дальності цифрової системи АСД.

### Основна частина

#### 1. Математична модель аналогового часового дискримінатора

Часовий дискримінатор (ЧД) призначений для вимірювання часового розузгодження між часовим положенням енергетичного центру відбитого від

цілі сигналу і часовим положенням стану двох слідкуючих імпульсів.

Часовий дискримінатор виконує функцію порівняння блоку, що виробляє напругу, яка залежить від розузгодження [4]:

$$\Delta\tau = \tau_y - \tau_{ci} \quad (1)$$

Напруга на виході часового дискримінатора (ЧД) визначається як:

$$U_g(kT) + \xi(kT), \quad (2)$$

де  $U_g(kT)$  – математичне сподівання вихідної напруги  $U_g = M\{U_g\}$ ;  $T$  – період слідування зондуєчих імпульсів;  $k$  – номер чергового радіоконтакту;  $\xi(kT)$  – флуктуаційна складова вихідної напруги.

Математичне сподівання вихідної напруги  $U_g$  залежить від величини розузгодження. Ця залежність називається дискримінаторною характеристикою ЧД (рис. 1).

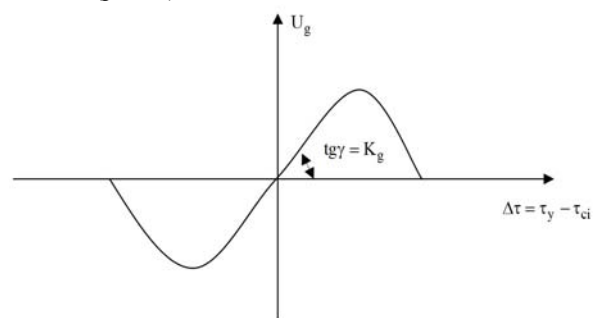


Рис. 1. Дискримінаторна характеристика ЧД

$$K_g = \frac{dU_g}{d\Delta\tau}, \quad (3)$$

$\Delta\tau = 0$  – коефіцієнт підсилення дискримінатора, являє собою крутизну дискримінаторної характеристики ЧД при  $\Delta\tau = 0$ .

При достатньо невеликому розузгодженні можна вважати, що вихідна напруга дискримінатора має вигляд:

$$U_{\text{ЧД}}(nT, \Delta\tau(nT)) = \bar{U}_{\text{ЧД}}(\Delta\tau) + \xi(nT, \Delta\tau(nT)). \quad (4)$$

Виходячи з вище сказаного та рівнянь (1–2), узагальнена лінійаризована математична модель часового дискримінатора буде мати вигляд (рис. 2).

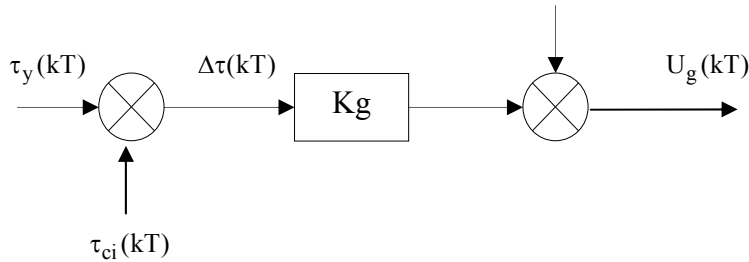


Рис. 2. Математична модель часового дискримінатора

## 2. Математична модель перетворювача напруга-код (ПНК)

Перетворювач напруга-код є одним з різновидів аналого-цифрового перетворювача (АЦП), він призначений для перетворення безперервної напруги у послідовність цифрових кодів. Для вирішення цього завдання перетворювач напруга-код здійснює цифрове кодування аналогової напруги шляхом здійснення операцій її часової дискримінації, квантування за рівнем та змінення масштабу.

У подальшому будемо розглядати перетворювач напруга-код на прикладі аналогового цифрового перетворювача.

Через те, що в радіолокаційній станції (РЛС) використовується імпульсний сигнал, тобто вплив на вході аналогового цифрового перетворювача є решітчастою функцією часу, відкидається необхідність використання часової дискретизації сигналу. З урахування цього отримуємо математичну модель аналогового цифрового перетворювача (рис. 3).

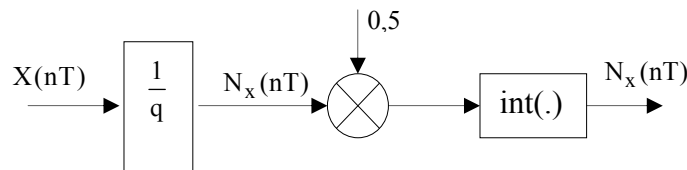


Рис. 3. Математична модель АЦП

Найчастіше замість нелінійної математичної моделі аналогового цифрового перетворювача, використання якої ускладнює проведення дослідження системи автоматичного управління (САУ), достатньо мати його лінійаризовану модель. Сутність лінійаризації полягає в заміні нелінійного перетворення лінійною операцією додавання [6]:

$$N_x(nT) = \hat{N}_x(nT) + \delta N_x(nT), \quad (5)$$

де  $N_x = \frac{x}{q}$  – результат змінення масштабу;

$\delta N_x$  – похибка, що створюється при виділенні найближчого цілого з величини  $N_x$ , яка зветься “шумом” округлення.

При округленні до найближчого цілого  $|\delta N_x| < 0,5$ , для оцінки впливу “шуму” округлення на якість системи вважають, що він є не корельовано випадковою послідовністю, яка розподілена на інтервалі  $[-0,5; 0,5]$  за рівномірним законом (рис. 4).

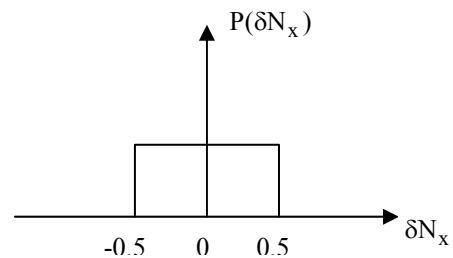


Рис. 4. Закон розподілення щільності ймовірності “шуму” округлення

$$P(\delta N_x) = \begin{cases} 1, & \text{при } |\delta N_x| < 0,5; \\ 0, & \text{при } |\delta N_x| > 0,5. \end{cases} \quad (6)$$

Виходячи з цієї гіпотези отримаємо імовірнісні характеристики “шуму” округлення:

– математичне сподівання

$$M\{\delta N_x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta N_{xp}(\delta N_x) d(\delta N_x) = 0, \quad (7)$$

– дисперсія

$$D\{\delta N_x\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 N_{xp}(\delta N_x) d(\delta N_x) = \frac{1}{12}. \quad (8)$$

Використовуючи всі припущення побудуємо лінійаризовану математичну модель перетворювача

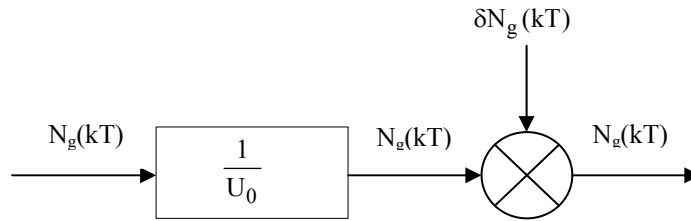


Рис. 5. Схема математичної моделі ПНК цифрової системи АСД

### 3. Схема математичної моделі цифрового фільтру

Цифровий код-перетворювач (ЦКП), який іноді називають цифровим фільтром, вирішує наступні завдання:

Перетворює послідовність чисел  $N_g(kT)$ , що подаються на його вхід з виходу перетворювача напруга-код, у послідовність оцінок поточної дальності  $r(kT)$ .

Формує послідовність чисел  $N_g(kT)$ , яка керує роботою перетворювача код-часова затримка (ПКЗ) і тим самим визначає в кожному періоді часовий зсув слідкуючих імпульсів відносно імпульсів синхронізації.

У зв'язку з тим, що часовий зсув слідкуючих імпульсів повинен бути заданий до приходу імпульсів цілі, коли ще не отримана оцінка поточної дальності  $r(kT)$ , для формування чисел  $N_g(kT)$  використовується не оцінка поточної дальності  $r(kT)$ , а екстрапольоване на момент часу  $kT$  значення дальності  $r_e(kT)$ , розраховане в попередньому такті роботи цифрового код-перетворювача по вже отриманим оцінкам дальності  $r(kT - T)$ ,  $r(kT - 2T)$  і т.д., у відповідності з закладеною в програму роботи цифрового код-перетворювача (ЦКП) гіпотезою про змінення дальності з ходом часу.

Тому, в поточному такті роботи цифрового код-перетворювача, після отримання оцінки дальності  $r(kT)$  розраховується величина  $r_e(kT + T)$  – екстрапольоване на момент часу  $(kT + T)$  значення дальності (момент приходу наступного імпульсу цілі).

Значення величини  $r_e(kT + T)$  дозволяє визначити число  $N_k(kT + T)$ , яке потрібно в наступному такті роботи АСД подати на перетворювач код-часова затримка, щоб отримати часовий зсув слідкуючих імпульсів.

напруга-код (ПНК) цифрової системи автоматичного супроводження дальності. Схема математичної моделі перетворювача напруга-код цифрової системи автоматичного супроводження дальності приведена на рис. 5.

Таким чином, ЦКП у кожному поточному такті роботи розраховує величини  $r(kT)$ ,  $r_e(kT + T)$  та  $N_k(kT + T)$ .

Вихідними величинами ЦКП у поточному такті роботи є:

$r(kT)$  – оцінка поточної дальності;

$$N_k(kT) = S^{-1} * N_k(kT + T) \quad (9)$$

– число, що визначає затримку імпульсів селекції у поточному такті, яке дорівнює попередньому значенню послідовності  $N_k(kT + T)$ .

Побудуємо схему математичної моделі цифрового код-перетворювача і припустимо, що оцінювання та екстраполяція відбувається за допомогою лінійних операцій над вхідними даними.

Тоді можна записати:

$$\hat{r} = K_0(S) \cdot N_g(kT), \quad (10)$$

$$r_e(kT + T) = K_e(S) \cdot \hat{r}(kT), \quad (11)$$

де  $K_0(S)$  та  $K_e(S)$  – лінійні стаціонарні різницеві оператори оцінювання та екстраполяції відповідно.

Відомо, що оцінювання та екстраполяція дальності в ЦКП здійснюється за алгоритмом, що представлений за допомогою лінійних різницевих рівнянь [3]:

$$\hat{r}(kT) = r_e(kT) + \frac{1}{K_{gr}} K_1 N_g(kT), \quad (12)$$

$$\hat{V}(kT) = \hat{V}(kT - T) + \frac{1}{K_{gr}} K_2 N_g(kT), \quad (13)$$

$$\hat{r}_e(kT + T) = \hat{r}(kT) + T \hat{V}(kT), \quad (14)$$

де  $r$  та  $r_e$  – оцінка дальності та її екстрапольоване значення;

$V$  – оцінка радіальної швидкості цілі;

$N_g$  – вихідна величина дискримінатора;

$K_1, K_2$  – параметри алгоритму;

$K_{gr}$  – коефіцієнт підсилення з розмірністю (одиначний розряд), що пов'язує величину похибки

дальності, виражену в метрах, зі значенням вихідного коду ПНК.

Для отримання оператора оцінювання дальності  $K_0(S)$  необхідно:

1. Розв'язати рівняння (13) відносно оцінки радіальної швидкості:

$$\hat{V}(kT) = \frac{K_2}{K_{gr}(1-S^{-1})} \cdot N_g(kT) = K_V(S)N_g(kT). \quad (15)$$

2. Підставити вираз (15) у (16). Представити отримане рівняння у символічному вигляді і розв'язати його відносно  $r_e(kT)$ :

$$r_e(kT) = S^{-1} \left[ \hat{r}(kT) + \frac{K_r t}{K_{gr}(1-S^{-1})} \cdot N_g(kT) \right]. \quad (16)$$

3. Підставити в (12) вираз (16) для  $r_e(kT)$ . Після цього розв'язати отримане співвідношення відносно оцінки дальності

$$\hat{r}(kT) = \frac{K_1 + (K_2 T - K_1)S^{-1}}{K_{gr}(1-S^{-1})^2} \cdot N_g(kT). \quad (17)$$

Таким чином:

$$K_0(S) = \frac{K_1 + (K_2 T - K_1)S^{-1}}{K_{gr}(1-S^{-1})^2}, \quad (18)$$

або по-іншому:

$$K_0(S) = \frac{K_1 S^2 + (K_2 T - K_1)S}{K_{gr}(S-1)^2}. \quad (19)$$

Для отримання оператора екстраполяції дальності  $K_e(S)$  необхідно:

Розв'язати рівняння (17) відносно  $N_g(kT)$ :

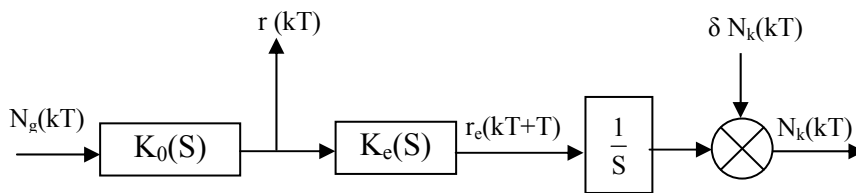


Рис. 6. Схема математичної моделі цифрового фільтра

#### 4. Схема математичної моделі перетворювача “код-часова затримка”

Перетворювач код-часова затримка та генератор селектуючих імпульсів (ГІ) є формувачем керуючих за затримкою імпульсів. У кожному такті роботи ПКЗ здійснює перетворення числа  $N_K(kT)$  у пропорційний йому часовий зеув вихідного імпульсу. Принцип роботи ПКЗ пояснюється на рис. 7.

Початок наступного такту роботи визначається знаходження на вхід тригера Т синхронізуючих імпульсів.

$$N_g(kT) = \frac{1}{K_0(S)} \cdot r(kT) = \frac{K_2(1-S^{-1})}{K_1 t (K_2 T - K_1) \cdot S^{-1}} \cdot \hat{r}(kT). \quad (20)$$

Підставити отриманий результат у (15):

$$\hat{V}(kT) = \frac{K_V(S)}{K_0(S)} \cdot \hat{r}(kT) = \frac{K_2(1-S^{-1})}{K_1 + (K_2 T - K_1)S^{-1}} \cdot \hat{r}(kT). \quad (21)$$

Підставити отримане значення у вираз (14), після чого привести його до вигляду

$$r_e(kT + T) = \frac{(K_1 + K_2)S - K_1}{K_1 S + K_2 T - K_1} \cdot \hat{r}(kT). \quad (22)$$

Таким чином:

$$K_e(S) = \frac{(K_1 + K_2)S - K_1}{K_1 S + K_2 T - K_1}, \quad (23)$$

$$\tau_{ci}(kT + T) = \frac{2r_e(kT + T)}{C}, \quad (24)$$

де  $C$  – швидкість світла.

Щоб отримати селектуючі імпульси, затримані на час  $kT + T$ , з точністю не менше половини періоду слідування лічильних  $T_{ли}$  імпульсів, на ПКЗ необхідно подати ціле  $N_g$ , найближче до величини відношення  $\tau_{ci} / T_{ли}$ .

Округлення цього числа до найближчого цілого у лінійаризованій математичній моделі враховується введенням похибки  $\delta N_K(kT)$  з нульовим математичним сподіванням і дисперсією  $\frac{1}{12}$ , яка являє собою незалежну випадкову послідовність. Співвідношення (9; 11) визначають спрощену лінійаризовану математичну модель цифрового код-перетворювача, яка наведена на (рис. 6).

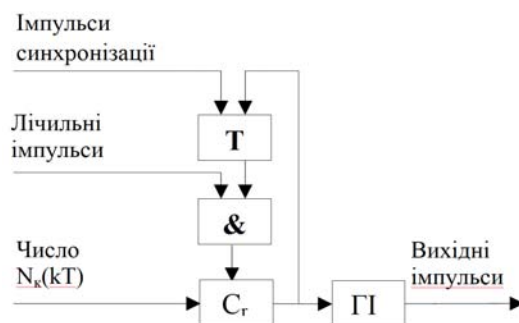


Рис. 7. Структурна схема перетворювача “код-часова затримка”

При цьому відбувається перекидання тригера Т і напруга на його виході збільшується. В результаті цього лічильні імпульси через схему “&” починають надходити на лічильник імпульсів  $C_r$ . У лічильник попередньо записується зі зворотним знаком число  $N_k(kT)$ . Після надходження в лічильник  $N_k$  лічильних імпульсів в ньому фіксується число нуль, а на виході з’являється імпульс переповнення, який використовується для запуску генератора селектуючих імпульсів. Одночасно вихідний імпульс ПКЗ повертає тригер Т у вихідний стан.

Перетворювач код-часова затримка та генератор імпульсів є практично безінерційними пристроями. Тому можна припустити, що затримка селектуючих імпульсів і число  $N_k$  пов’язані пропорційною залежністю:

$$\tau_{ci}(kT) = T_{ли} \cdot N_k(kT). \quad (25)$$

Схему математичної моделі перетворювача “код – часова затримка” приведено на рис. 8.

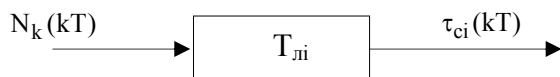


Рис. 8. Схема математичної моделі перетворювача “код-часова затримка”

### 5. Схеми математичної моделі цифрової системи АСД

З’єднуючи схеми математичних моделей часового дискримінатора, перетворювача напруга-код, цифрового код-перетворювача та перетворювача код-часова затримка отримуємо схему математичної

моделі цифрової системи автоматичного супроводження дальності, яка представлена на рис. 9.

Для спрощення подальшого аналізу АСД необхідно перейти від схеми математичної моделі до рівняння, що включає дальність до цілі (12). Перехід здійснюється шляхом урахування залежності між дальністю до цілі  $r(kT)$  та часовою затримкою відбитого від цілі сигналу

$$\tau(kT) = \frac{2}{C} r(kT). \quad (26)$$

Після цього виключимо зі схеми математичної моделі взаємно-зворотні оператори  $T_{ли}$  та  $1/T_{ли}$ , для чого перенесемо оператор з впливом  $\delta N_k(kT)$  через блок з оператором  $2/C \times T_{ли}$ . Тоді на вході цього блока будемо мати заважаючий еквівалентний вплив:

$$\delta r_e(kT) = \frac{C \cdot T_{ли}}{2} \delta N_k(kT), \quad (27)$$

який має дисперсію

$$D\{\delta r_e\} = \frac{(C \cdot T_{ли} / 2)^2}{12}. \quad (28)$$

Після виключення операторів  $T_{ли}$  та  $1/T_{ли}$  залишається замінити оператори  $2/C$  на обох входах першого суматора одним оператором  $2/C$ , вставленим на його виході. Крім цього усі заважаючі впливи, що діють на вході системи, визначаються співвідношенням:

$$S(kT) = \delta r_e(kT) + \frac{CU_0}{2K_g} \delta N_g(kT) + \frac{C}{2K_g} \cdot \varphi(kT). \quad (29)$$

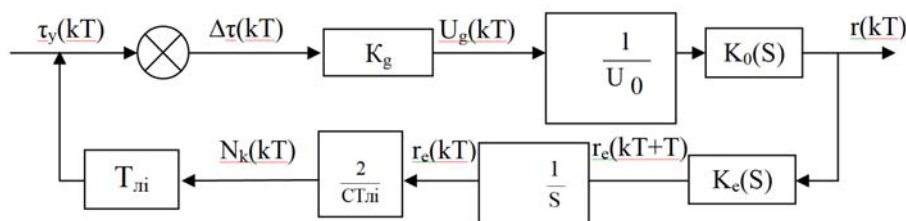


Рис. 9. Схема математичної моделі цифрової системи АСД

Через те, що  $(kT)$  – центрований випадковий процес, то його знак не має значення.

Дисперсія еквівалентного заважаючого впливу дорівнює:

$$D_f = \frac{(C \cdot T_{ли} / 2)^2}{12} + \frac{(C \cdot U_0 / 2K_g)^2}{12} + \left(\frac{C}{2K_g}\right)^2 D\varphi. \quad (30)$$

Остаточно перетворена схема математичної моделі цифрової системи АСД приведена на рис. 10.

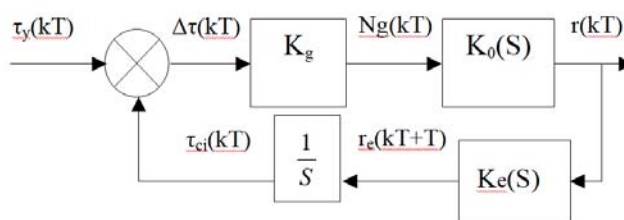


Рис. 10. Спрощена схема математичної моделі цифрової системи АСД

**6. Аналіз стійкості системи АСД**

Для аналізу стійкості цифрової системи АСД необхідно визначити характеристичний поліном замкненої системи. Для цього необхідно визначити оператор передачі розімкненої схеми автоматичного управління (САУ)  $R(S)$ .

Як слідує з рис. 11,

$$R(S) = K_{gr} \cdot K_0(S) \cdot K_e(S)S^{-1}, \quad (31)$$

Після підстановки  $K_0(S)$  отримуємо:

$$R(S) = q \frac{(K_1 + K_2)S - K_1}{(S-1)} = \frac{B(S)}{A(S)}, \quad (32)$$

де  $q = \text{kgf/km}$  – відношення фактичної крутості дискримінаційної характеристики до її значення, що зберігається в перетворювачі код-часова затримка та цифровому код-перетворювачі ( $0 < q < 1$ ).

Для визначення умов стійкості схеми автоматичного управління складемо характеристичне рівняння:

$$(Z) = A(Z) + B(Z) = Z^2 + Z_q(K_1 + K_2T) - qK_1 + 1. \quad (33)$$

Для того, щоб система була стійкою, корені даного рівняння повинні бути по модулю меншими за одиницю. Тому подальше рішення задачі зводиться до відшукування коренів  $Z_1$  і  $Z_2$  та визначення областей значень параметрів  $K_1$  і  $K_2T$ , при яких  $Z_2 < 1$  та  $Z_1 < 1$ .

Більш просто ця задача може бути вирішена з використанням критерію стійкості Гурвиця. Для цього перетворимо характеристичний поліном  $C(Z)$  у поліном:

$$C(v) = (1-v)^n C(Z), \quad Z = \frac{1+v}{1-v}, \quad (34)$$

де  $v$  – комплексна змінна, що має позитивну частину при  $Z < 1$ .

$$\begin{aligned} C(v) &= (1+v)^2 + [q(K_1 + K_2T) - 2] \cdot \\ &\cdot (1-v^2) + (1-qK_1) \cdot (1-v)^2 = \\ &= [2 - q(K_1 + K_2T) + (2 - qK_1)]v^2 + \\ &+ 2[1 - (1 - qK_1)] \cdot v + qK_2T. \end{aligned} \quad (35)$$

Згідно з критерієм стійкості Гурвиця для того, щоб схема автоматичного управління другого порядку була стійка, необхідно і достатньо, щоб усі коефіцієнти характеристичного рівняння були позитивними. Таким чином, умови стійкості цифрової системи автоматичного супроводження дальності, яка досліджується, будуть наступними:

$$\begin{cases} 2K_1 + K_2T < \frac{4}{g}, \\ K_1 > 0, \\ K_2T > 0. \end{cases} \quad (36)$$

Область стійкості можна зобразити графічно:

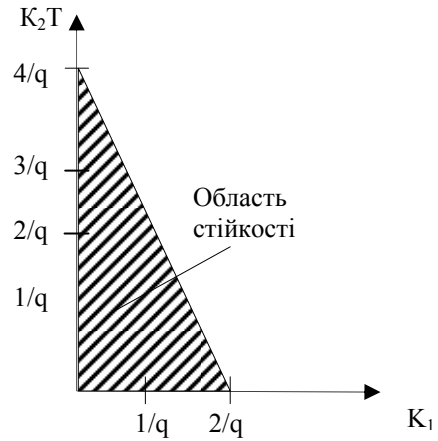


Рис. 11. Область стійкості цифрової системи АСД

Для оцінки показників якості системи автоматичного супроводження дальності у перехідному режимі використаємо прямий метод, бо система автоматичного супроводження дальності має другий порядок астатизму і для неї не складно визначити перехідну характеристику  $H(nT)$ .

$Z$ -зображення перехідної характеристики  $H(nT)$  має вигляд:

$$\begin{aligned} H(Z) &= \frac{Z}{Z-1} \cdot W(Z) = \\ &= \frac{Z}{Z-1} \cdot \frac{(K_2T + K_1)Z - K_1}{(Z-1)^2 + (K_2T + K_1)Z - K_1}. \end{aligned} \quad (37)$$

Розкладаючи на дробі вираз для  $H(Z)$ , отримуємо наступний результат:

$$H(Z) = \frac{Z}{Z-1} + \frac{(K_2T + K_1)Z + 1 - K_1}{(Z-1)^2 + (K_2T + K_1)Z - K_1}. \quad (38)$$

Кінцевий вираз для перехідної характеристики залежить від характеру коренів знаменника другої дробі. Першій дробі відповідає одинична ступінчаста решітка функції  $l(nT - T)$ .

У загальному вигляді перехідну характеристику можна записати в наступному вигляді:

$$H(nT) = l(nT - T) + h_1(nT) + h_2(nT). \quad (39)$$

Якщо корені знаменника другої дробі виразу (38) комплексно спряжені, тоді функції  $h_1(nT)$  і  $h_2(nT)$  виражаються через множення гармонічної та показникової решітчастої функції.

**7. Оптимізація параметрів  $K_1$  і  $K_2$  алгоритму оцінювання та екстраполяції за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки**

Згідно з умов завдання, зважаючи вплив – дискретний білий шум з дисперсією  $D_f$ , а вплив – детермінована функція вигляду

$$r(nT) = r_0 + gt^2 / 2 \Big|_{t=nT}. \quad (40)$$

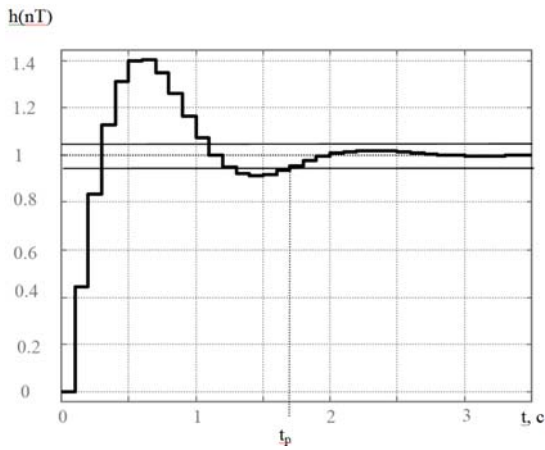


Рис. 12. Перехідна характеристика системи АСД

Середньоквадратична похибка супроводження визначається наступним чином:

$$\rho = \sqrt{M\{dr\}^2 + D_{dr}}. \quad (41)$$

Використовуючи метод коефіцієнтів похибок, визначимо математичне сподівання динамічної похибки супроводження

$$M\{dr\} = \frac{gT^2}{K_2T}. \quad (42)$$

Отже, квадрат середньоквадратичної похибки дорівнює:

$$\rho = M\{dr\}^2 + D_{dr} = \left[ \frac{gT^2}{K_2T} \right]^2 + D_{dr} \frac{2K_1^2 + K_1K_2T + 2K_2T}{K_1(4 - 2K_1 - K_2T)}. \quad (43)$$

Як бачимо, окремі складові середньоквадратичної похибки різним чином залежить від  $K_2T$ : перша складова зворотного квадрату  $K_1T$ , а друга монотонно збільшується зі збільшенням  $K_2T$ . Другий доданок за зміною  $K_1$  має мінімум, який має спосіб розв’язання.

При аналітичному розв’язанні задачі необхідно визначити похідні  $d(S^2)/d(K_2T)$  і  $d(S^2)/d(K_1)$ , та, порівнявши їх до нуля, відшукати з отриманих рівнянь значення  $K_2T$  і  $K_1$ , постають екстремум функції  $K_2T$ , а потім обрати ті значення  $K_2T$  і  $K_1$ , при яких забезпечується мінімум середньоквадратичної похибки.

При аналітичному розв’язанні задачі необхідно визначити похідні  $d(S^2)/d(K_2T)$  і  $d(S^2)/d(K_1)$ , та, порівнявши їх до нуля, відшукати з отриманих рівнянь значення  $K_2T$  і  $K_1$ , отримуємо екстремум функції  $K_2T$ , а потім обрати ті значення  $K_2T$  і  $K_1$ , при яких забезпечується мінімум середньоквадратичної похибки.

$$\frac{d(p)^2}{d(K_1T)} = -\frac{2(gT^2)^2}{(K_2T)} - D_f \frac{gK_1}{(K_1(4 - 2K_1 - K_2T))^2} = 0, \quad (44)$$

$$\frac{d(p)^2}{d(K_1)} = \frac{(2K_1 + K_2T)^2 - 4K_2T}{(K_1(4 - 2K_1 - K_2T))^2} = 0. \quad (45)$$

З останнього рівняння отримуємо вираз для оптимального параметра  $K_1$ , який задовольняє умові стійкості  $K_1 > 0$ , у вигляді функції від параметра  $K_2T$ :

$$K_1 = \frac{2\sqrt{K_2T} - K_2T}{2}. \quad (46)$$

Якщо цей вираз для  $K_1$  підставити у рівняння (44), отримаємо рівняння для визначення оптимального значення параметрів  $K_2T$  у вигляді функції від дисперсії еквівалентного впливу, який заважає  $D_f$  і прискорення  $g$ , яке можна розв’язати у числовій формі.

Графік залежності  $\rho^2$  від  $K_1$  і  $K_2T$  наведений на рис. 14. А якщо вираз  $K_1$  підставити у рівняння (43), тоді графік залежності  $\rho^2$  від  $K_2T$  буде мати вигляд, який приведений на рис. 13. Таким чином, оптимальне значення  $K_2T = 0,141$ , а  $K_1 = 0,304$ .

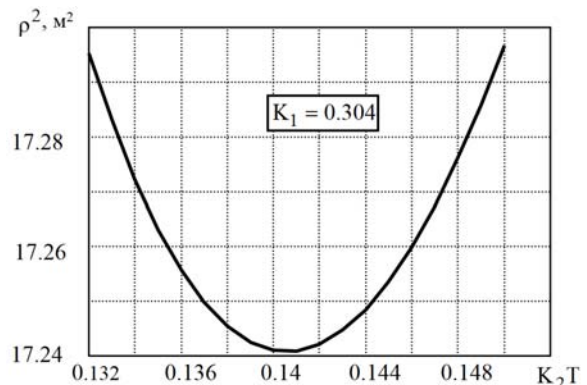


Рис. 13. Залежність середнього квадрату помилки  $\rho^2$  від параметру  $K_2T$  при  $K_1 = 0,304$

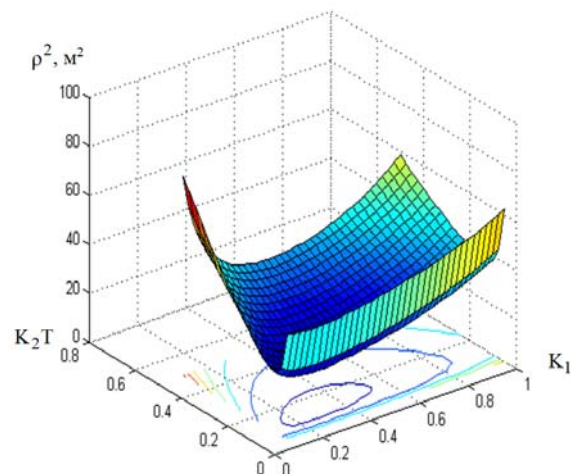


Рис. 14. Залежність середнього квадрата помилки  $\rho^2$  від параметрів алгоритму  $K_1$  і  $K_2T$



## 8. Вибір оцінки найменшого розряду ПНК

Наявність квантування по рівню сигналу призводить до появи додаткового впливу, який негативно діє на роботу системи автоматичного супроводження дальності з дисперсією.

$$D = \left( \frac{CU_0}{2K_D} \right)^2 \cdot \frac{1}{12}. \quad (47)$$

Прирівнюючи вираз (47) до 0,25, знаходимо максимальне значення ціни найменшого розряду перетворювача напруга-код:

$$U_0 = \frac{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot K_D}{C} = \frac{0,69}{3} = 0,83 \text{ В}.$$

Таким чином, обираючи ціну найменшого розряду перетворювача напруга-код менше 0,83 Вольт, можна не враховувати вплив інструментальних похибок на якість роботи системи автоматичного супроводження (АС), які обумовлені рівнем квантування сигналу в перетворювачі напруга-код.

## Висновки

На підставі дослідження моделі системи автоматичного супроводження дальності проведено аналіз стійкості та якості системи. Визначені припус-

тимі області параметрів алгоритму роботи цифрового керуючого пристрою, при яких система автоматичного супроводження дальності відповідає своєму призначенню. Також розраховані систематичні та флуктуаційні похибки, оптимізовані параметри алгоритму  $K_1$  і  $K_2$  за критерієм мінімуму середньоквадратичної похибки, оцінені інструментальні похибки та співставлення за флуктуаційною похибкою. При виборі параметрів системи, за умовами її стійкості, коли  $K_2 T = 0,141$  та  $K_1 = 0,304$ , можливо забезпечити похибку визначення дальності, яка не перевищує 10 м.

На підставі проведеного аналізу якості системи автоматичного супроводження дальності обрана оцінка молодшого розряду у перетворювачі напруга-код. Обираючи ціну найменшого розряду перетворювача напруга-код менше 0,23 В, можна не врахувати вплив інструментальних похибок, які обумовлені квантуванням по рівню в перетворювачі напруга-код, що впливає на якість роботи системи автоматичного супроводження дальності.

Таким чином, за результатами моделювання були забезпечені вимоги до показників стійкості та якості системи автоматичного супроводження дальності, що цілком задовольняють вимогам до таких систем.

## Список літератури

1. Стабілізація рівня хибних тривог за рахунок зміни параметрів зондувального сигналу РЛС / О.В. Тесленко, В.А. Ковальчук, С.В. Бровченко, А.І. Мовчан // Системи озброєння і військова техніка. – 2010. – № 4(24). – С. 167-170.
2. Тесленко О.В. Визначення величини флуктуаційної похибки вимірювання азимуту повітряних об'єктів, обумовленої великомасштабними неоднорідностями тропосфери / О.В. Тесленко // Системи обробки інформації. – 2007. – № 2(60). – С. 92-94.
3. Методика та результати експериментальних досліджень флуктуації фази радіосигналу, відбитого від характерних точок рельєфу / О.А. Коваль, В.І. Луценко, В.С. Куц, О.В. Тесленко, О.О. Голінка // Системи обробки інформації. – 2004. – № 10(38). – С. 72-83.
4. Порівняльна оцінка параметра еквівалентної флуктуаційної характеристики часового дискримінатора двома методами / О.М. Дзигора, І.В. Красношапка, Д.В. Максютя, О.О. Сосунов // Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил. – 2013. – № 1(34). – С. 63-65.
5. Оцінка показника якості підсистем автосупроводження за дальністю та кутовою координатою багатоканальної РЛС з фазованою антенною решіткою за допомогою уточненої моделі / О.Ю. Ільїн, О.В. Коломійцев, А.М. Печкін, О.О. Сосунов // Збірник наукових праць Харківського національного університету Повітряних Сил. – 2009. – № 1(19). – С. 42-45.
6. Васильєв В.А. Уточнена модель для обґрунтування вимог до показника якості радіотехнічної слідкуючої системи зенітного ракетного комплексу / В.А. Васильєв, І.І. Сачук, О.О. Сосунов // Системи озброєння і військова техніка. – 2008. – № 2(14). – С. 23-25.
7. Powerful sources of ultra wideband pulsed coherent signals / A.F. Kardo-Sysoev, V.I. Brylevsky, S.V. Zazulin, I.A. Smirnova, I.G. Tchashnicov, V.I. Scherbak, B.I. Sukhovetsky. – Inter, Edinburgh, Scotland, UK, 2000.
8. Zamyatin V.I. Space-time modulation of signals in a ring antenna array / V.I. Zamyatin, O.V. Baturin, E.A. Tolokneyev // Proc. of IIIrd international Conf. Antenna theory and techniques. – Sevastopol (Ukraine), 1999.
9. Система ПВО НАТО в Європе [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://fito-center.ru/oruzhie-i-boevaya-tehnika/43153-nazemnye-radiolokacionnye-stancii-pvo-pro-na-tvd-stran-nato-ch1-2010.html>, 2018.
10. Li J. MIMO Radar Signal Processing / J. Li, P. Stoica. – Wiley-IEEE Press, 2008.
11. Astanin L.Y. Ultrawideband signals a new step in radar development / L.Y. Astanin, A.A. Kostylev // Rec. CIE Int. Conf. Radar. – Beijing, 1991.
12. MANPADS and Surface to air missile [Electronic resource] / Air power Australia. – Available at: <https://www.airspace.net/sams-iads.html>.



## References

1. Teslenko, O.V., Kovalchuk, V.A., Brovchenko, S.V. and Movchan, A.I. (2010), "Stabilizatsiia rivnia khybnykh tryvoh za rakhunok zminy parametriv zondovalnogo syhnalu RLS" [Stabilize the level of false alarms by changing the parameters of the probing signal of the radar], *Systems of Arms and Military Equipment*, No. 4(24), pp. 167-170.
2. Teslenko, O.V. (2007), "Vyznachennia velychyny fluktuatsiinoi pokhybky vymiriuvannia azymutu povitrianykh ob'ektiv, obumovlenoi velykomasshtabnymy neodnorodnostiamy troposfery" [Determination of the magnitude of the fluctuation error of measuring the azimuth of air objects due to large-scale inhomogeneities of the troposphere], *Information Processing Systems*, No. 2(60), pp. 92-94.
3. Koval, O.A., Lutsenko, V.I., Kuts, V.S., Teslenko, O.V. and Holinka, O.O. (2004), "Metodyka ta rezultaty eksperymentalnykh doslidzhen fluktuatsiyi fazy radiosyhnalu, vidbytoho vid kharakternykh tochok relyefu" [Methodology and results of experimental studies of the phase fluctuation of the radio signal reflected from the characteristic points of the relief], *Information Processing Systems*, No. 10(38), pp. 72-83.
4. Dzhilora, O.M., Krasnoshapka, I.V., Maksyiuta, D.V. and Sosunov, O.O. (2013), "Porivnialna otsinka parametra ekvivalentnoi fluktuatsiinoi kharakterystyky chasovoho dyskryminatora dvoma metodamy" [Comparative estimation of the parameter of the equivalent fluctuation characteristic of the time discriminator by two methods], *Scientific Works of Kharkiv National Air Force University*, No. 1(34), pp. 63-65.
5. Ilin, O.Yu., Kolomiitsev, O.V., Pechkin, A.M. and Sosunov, O.O. (2009), "Otsinka pokaznyka yakosti pidsystem avtosuprovodzhennia za dalnistiu ta kutovoiu koordynatou bahatokanalnoi RLS z fazovanoi antennoi reshitkoiu za dopomohoiu utochnenoii modeli" [Estimation of Quality Indicator of Automated Subsystems by Range and Angular Position of Multichannel Radar with Phased Antenna Grating Using the Advanced Model], *Scientific Works of Kharkiv National Air Force University*, No. 1(19), pp. 42-45.
6. Vasyliev, V.A., Sachuk, I.I. and Sosunov, O.O. (2008), "Utochnena model dlia obruntuvannia vymoh do pokaznyka yakosti radiotekhnichnoi slidkuiuchoi systemy zenitnoho raketnoho kompleksu" [A refined model for substantiating the requirements for the quality indicator of the radio monitoring system of the anti-aircraft missile system], *Systems of Arms and Military Equipment*, No. 2(14), pp. 23-25.
7. Kardo-Sysoev, A.F., Brylevsky, V.I., Zazulin, S.V., Smirnova, I.A., Tchashnicov, I.G., Scherbak, V.I. and Sukhovetsky, B.I. (2000), *Powerful sources of ultra wideband pulsed coherent signals*, Inter, Edinburgh, Scotland, UK.
8. Zamyatin, V.I., Baturin, O.V. and Tolokneyev, E.A. (1999), Space-time modulation of signals in a ring antenna array, *Proc. Of IIIrd international Conf. Antenna theory and techniques*, Sevastopol (Ukraine).
9. (2018), "Sistema PVO NATO v Yevrope" [NATO air defense system in Europe], available at: [www.fito-center.ru/oruzhie-i-boevaya-tehnika/43153-nazemnye-radiolokacionnye-stancii-pvo-pro-na-tvd-stran-nato-ch1-2010.html](http://www.fito-center.ru/oruzhie-i-boevaya-tehnika/43153-nazemnye-radiolokacionnye-stancii-pvo-pro-na-tvd-stran-nato-ch1-2010.html).
10. Li, J. and Stoica, P. *MIMO Radar Signal Processing*, Wiley-IEEE Press, 2008.
11. Astanin, L.Y. and Kostylev, A.A. (1991), Ultrawideband signals a new step in radar development, *Rec. CIE Int. Conf. Radar*, Beijing.
12. MANPADS and Surface to air missile, *Air power Australia*, available at: <https://www.ausairpower.net/sams-iads.html>.

Надійшла до редколегії 12.09.2018

Схвалена до друку 6.11.2018

**Відомості про авторів:****Будур Олег Миколайович**

Викладач Військової академії (Одеса),  
Одеса, Україна  
<https://orcid.org/0000-0003-4193-2616>

**Клименко Вадим Миколайович**

кандидат військових наук доцент  
начальник кафедри  
Військової академії (Одеса),  
Одеса, Україна  
<https://orcid.org/0000-0001-9144-2362>

**Кудрявцев Віктор Вікторович**

кандидат військових наук старший науковий співробітник  
професор кафедри  
Військової академії (Одеса),  
Одеса, Україна  
<https://orcid.org/0000-0002-6542-8898>

**Information about the authors:****Oleg Budur**

Instructor of Odesa Military Academy,  
Odesa, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0003-4193-2616>

**Vadym Klymenko**

Candidate of Military Sciences Associate Professor  
Chief of Department  
of Odesa Military Academy,  
Odesa, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0001-9144-2362>

**Viktor Kudryvzev**

Candidate of Military Sciences Senior Research  
Professor of the Department  
of Odesa Military Academy,  
Odesa, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0002-6542-8898>

**Нікул Станіслав Олексійович**

кандидат технічних наук начальник кафедри  
Військової академії (Одеса),  
Одеса, Україна  
<https://orcid.org/0000-0003-4768-0448>

**Stanislav Nikul**

Candidate of Technical Sciences  
Head of the Department of Odessa Military Academy,  
Odessa, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0003-4768-0448>

**Петрушенко Миколай Миколайович**

доктор технічних наук  
професор кафедри  
Військової академії (Одеса),  
Одеса, Україна  
<https://orcid.org/0000-0002-2490-9572>

**Nikolay Petrusenko**

Doctor of Technical Sciences  
Professor of the Department  
of Odessa Military Academy,  
Odessa, Ukraine  
<https://orcid.org/0000-0002-2490-9572>

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ  
АВТОМАТИЧЕСКОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ЦЕЛИ ПО ДАЛЬНОСТИ**

О.Н. Будур, В.Н. Клименко, В.В.Кудрявцев, С.А. Никул, Н.Н. Петрушенко

*В статье рассматривается математическая модель цифровой системы автоматического сопровождения цели по дальности, которая в отличие от существующих, удовлетворяет требованиям стойкости и качества системы измерения дальности и автоматического сопровождения цели. По результатам опыта предлагается математический подход к выбору оптимальных параметров функционирования составных частей цифровой системы автоматического сопровождения цели по дальности. С помощью математической модели осуществлен сравнительный анализ цифровой и аналоговой систем, по результатам которого получены оптимальные параметры для обеспечения стойкого сопровождения цели.*

**Ключевые слова:** цифровая система автоматического сопровождения цели по дальности, математическая модель, часовой дискриминатор, преобразователь напряжение-код, преобразователь код-часовая задержка.

**MATHEMATICAL MODEL OF DIGITAL SYSTEM  
AUTOMATIC SUPPORT PURPOSE BY DISTANCE**

O. Budur, V. Klymenko, V. Kudryvzev, S. Nikul, M. Petrusenko

*The system of the automatic tracking of distance is intended for realization of automatic sentinel selection of radio is an impulse shadowing removed from an aim after distance, and also for the automatic measuring of distance to the aim. The system of the automatic tracking of distance is one of the major tracker systems be what zenithal rocket complex, that provides measuring of distance to the aim and aiming of zenithal rocket complex. The aim of the article is a choice of cost of the least digit of transformation a "code is a sentinel delay" and choice of parameters of algorithm of evaluation and extrapolation of distance of the digital system of the automatic tracking of distance. The digital systems of the automatic tracking of distance have high stability of parameters that does not depend on influence of environment. Except it during digital realization the system of the automatic tracking of distance considerably grows short running expenses, systems related to periodic regulation works. On the basis of research of mathematical model of the system of the automatic tracking of distance the analysis of firmness and quality of the system is conducted. Certain possible areas of parameters of algorithm are works of digital managing device, at that the system answers setting. Systematic and fluctuation errors are also expected, optimized parameters of algorithm on the criterion of minimum middling quadratic error, instrumental errors are appraised. Presented results of modulation and dependence over of middle square of error is brought on the parameters of algorithm, transitional description over of the system is brought. At the choice of parameters of the system, on the terms of her firmness,  $K_2T = 0,141$   $K_1 = 0,304$  it maybe to provide the error of determination of distance that does not exceed. Thus on results modulation were providing of requirement to the indexes of firmness and quality of the system of the automatic tracking of distance that fully satisfies to the requirements to such systems.*

**Keywords:** digital control with auto maintenance target range, the mathematical model, the time discriminator, the Converter voltage-code Converter code-hour delay.