УДК 621.37/.39 DOI: 10.30748/soi.2019.157.04

І.Г. Гусарова, О.М. Соловйов

Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ БРОЙДЕНА ПРИ КОМП'ЮТЕРНОМУ МОДЕЛЮВАННІ ПЕРЕХІДНИХ РЕЖИМІВ ТЕЧІЇ ГАЗУ

В статті обґрунтована актуальність моделювання нестаціонарних неізотермічних режимів течії газу по ділянці трубопроводу. Проведений аналіз існуючих робіт з моделювання режимів течії газу, в яких використовуються різні методи для розв'язання системи диференційних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу, отриманої із загальних рівнянь газової динаміки. Наведена математична модель нестаціонарного неізотермічного режиму течії газу по ділянці трубопроводу. Застосований метод скінченних різниць з використанням неявної скінчено-різницевої сітки, при цьому були використані методи Ньютона та Бройдена для розв'язання системи нелінійних рівнянь. Проведений чисельний експеримент для задачі підключення великого споживача. Наведено порівняння ефективності використання методів Ньютона та Бройдена в контексті даної задачі. Дані цього дослідження можуть бути використані для потенційного покращення методів моделювання нестаціонарних неізотермічних режимів течії газу в газотранспортній системі з метою поліпшення ефективності прийнятих рішень в аварійних ситуаціях.

Ключові слова: *ділянка трубопроводу, нестаціонарні неізотермічні режими течії газу, математична модель, система диференційних рівнянь у частинних похідних, метод скінченних різниць, система нелінійних рівнянь, метод Ньютона, метод Бройдена.*

Вступ

Україна має газотранспортну систему, яку вона зобов'язана обслуговувати. Результатом цього зобов'язання повинно бути безперебійне постачання газу клієнтам.

Одна з причин перебоїв в постачанні газу є аварійні або нештатні ситуації на ділянці трубопроводу (ДТ), пов'язані з підключенням або відключенням великого споживача, несанкціонованим відбором або витоком газу. Для того, щоби такі аварійні ситуації усувалися швидко та з найменшою шкодою для навколишнього середовища, потрібно зменшити втручання людини в процесі постачання газу. Для заміни людини автоматикою необхідно налаштувати програмне забезпечення так, щоби воно могло швидко обробляти інформацію про стан газотранспортної системи, та відповідно реагувати на можливі ситуації.

Режими течії газу по ДТ в аварійних або нештатних ситуаціях є нестаціонарними та неізотермічними, та зазвичай описуються вони системою нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Для чисельного моделювання таких режимів газу використовують неявний та явний метод скінченних різниць [1–8], метод скінчених об'ємів [3; 6; 9], метод скінчених елементів, метод скінченних різниць з використанням методу Лагранжевих часток [6; 10], метод еквівалентних схем [3], метод моделі стану простору, метод понижуючого порядку, метод характеристик [11–12]. З цих методів неявний метод скінчених різниць є одним з найбільш поширених в моделюванні. На ньому, як базі, було створено таке програмне забезпечення як Stoner Pipeline Simulator (SPS) та Realpipe [13–14].

Основна причина такого поширення полягає в тому, що часовий крок не обмежений просторовим, що дуже важливо, наприклад, при моделюванні тривалих перехідних процесів течії газу по трубопроводу. Однак в неявному методі скінченних різниць необхідно розв'язувати систему нелінійних рівнянь на кожному часовому шарі. Цю систему можна розв'язувати методом Ньютона [2; 15], спрощеним методом Ньютона, методом Бройдена, методом Зейделя та інш. Метод Ньютона обирається завдяки його квадратичній швидкості збіжності, якої немає жоден інший метод розв'язання системи нелінійних рівнянь. Але матриця Якобі, яка необхідна для методу, має складний вигляд: із-за цього час її обчислення може бути довгим. Частина методів розв'язання систем нелінійних рівнянь використовує апроксимацію матриці Якобі, яка може зменшити час обчислень. Швидкість збіжності зменшується, але менший час на обчислення матриці може компенсувати недолік методу Ньютона щодо обчислення матриці Якобі на кожній ітерації. Одним з таких методів є метод Бройдена, який має зверхлінійну швидкість збіжності.

Метою статті є вибір математичної моделі нестаціонарного неізотермічного режиму течії газу (ННРТГ) по ділянці трубопроводу, застосування неявного методу скінчених різниць для розв'язання системи диференційних рівнянь, застосування методу Бройдена та методу Ньютона для розв'язання

© Гусарова І.Г., Соловйов О.М., 2019

системи нелінійних рівнянь, порівняння ефективності застосування цих двох методів для цієї системи.

Виклад основного матеріалу

Формальна постановка задачі

Розглядається ділянка трубопроводу довжини L. На вході та/або виході відбувається різка зміна граничних умов, яка пов'язана з аварійною або нештатною ситуацією. Режим течії газу в цих випадках є нестаціонарним та неізотермічним.

Такий режим течії газу описується питомою масовою витратою $W(x,t)$, тиском $P(x,t)$ та температурою $T(x,t)$, які задані в області $\Lambda = \{(x,t): x \in [0,L], t \in [0,T_{\max}]\}$, де $T_{\max}$ – кінцевий час процесу.

Задано початковий розподіл параметрів газового потоку:

$$\begin{aligned} W(x,0) &= W_0(x), \\ P(x,0) &= P_0(x), \\ T(x,0) &= T_0(x),\ x \in (0,L), \end{aligned} \tag{1}$$

де $W_0(x), T_0(x), P_0(x)$ – задані функції.

На початку та кінці ДТ задані граничні умови (ГУ) 1-го або 2-го типу, тобто задані або тиск, або витрата газу, як функція часу, крім того, задана температура газу, що надходить. В символьному вигляді ці умови мають вигляд:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} P(0,t) = P^0(t), \\ G(0,t) = G^0(t), \end{bmatrix} \\ T(0,t) = T^0(t), \end{cases} \quad \begin{bmatrix} P(\mathrm{L},t) = P^1(t), \\ G(\mathrm{L},t) = G^1(t), \end{bmatrix} \tag{2}$$

де $G(\mathrm{x},\mathrm{t})$ – масова витрата;

$G^0(t),\ T^0(t),\ P^0(t),\ G^1(t),\ P^1(t)$ – задані функції.

Вважатимемо, що до того, як режим течії газу став нестаціонарним, режим течії газу був стаціонарним (що не порушує загальності). Відповідно, початковим розподілом параметрів газового потоку (витрати газу, тиску, температури) буде розподіл параметрів стаціонарного режиму течії газу (СРТГ).

Математична модель ННРТГ по ділянці трубопроводу газотранспортної системи

ДТ у загальному випадку представляє собою циліндричну трубу постійного діаметру з жорсткими стінками.

ННРТГ описується квазілінійною системою диференційних рівнянь в частинних похідних, отриманих із загальних рівнянь Нав'є-Стокса газової динаміки для одновимірного випадку, з урахуванням відсутності масообміну з навколишнім середовищем, стаціонарності режимів теплообміну з навколишнім середовищем, та нехтуванням теплофізичними властивостями середовища [2; 15]. В матричній формі ця система має вигляд:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + B(x,t,\phi)\frac{\partial \phi}{\partial x} = \Phi(x,t,\phi), \tag{3}$$

де $B(x,t,\phi) = \begin{pmatrix} 2\alpha TS\dfrac{W}{p} & 1-\alpha TS\dfrac{W^2}{p^2} & 0 \\ \alpha TS & 0 & 0 \\ \alpha S\dfrac{T^2}{p}(\gamma-1) & 0 & \alpha TS\dfrac{W}{p}\gamma \end{pmatrix}$,

$\Phi(x,t,\phi) = \begin{pmatrix} -\beta TS\dfrac{W|W|}{p} - \dfrac{gp}{\alpha TS}\dfrac{dh}{dx} \\ 0 \\ -\dfrac{4K}{D}(\gamma-1)\dfrac{T}{p}(T-T_{гр}) - g(\gamma-1)\dfrac{TW}{p}\dfrac{dh}{dx} \end{pmatrix}$

– матриці, елементи яких задані неперервні та неперервно-диференційовані в деякій області змінення своїх аргументів функції змінних x, t, W, P, T; $\phi(x,t) = (W(x,t), P(x,t), T(x,t))$ – деякий неперервно-диференційований в області Λ розв'язок системи (3). Ця система доповнюється начальними та ГУ (12).

Розв'язання систем рівнянь математичної моделі методом скінчених різниць

Чисельний розв'язок системи (3), доповненої початковими (1) та граничними (2) умовами, шукаємо за допомогою рівномірної скінчено-різницевої сітки [2; 7; 15–17]. Розіб'ємо відрізок $[0,L]$ на n відрізків довжини Δ.

Похідні в (3) апроксимуються за формулами:

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_i^k = \frac{\phi_i^k - \phi_i^{k-1}}{\tau},\ i = \overline{0,n}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_i^k = \begin{cases} \dfrac{\phi_1^k - \phi_0^k}{\Delta}, i = 0. \\ \dfrac{\phi_{i+1}^k - \phi_{i-1}^k}{2\Delta}, i = \overline{1,n-1}. \\ \dfrac{\phi_n^k - \phi_{n-1}^k}{\Delta}, i = n. \end{cases} \tag{5}$$

Якщо в (3) зробити заміну (4–5), отримаємо нелінійну систему виду:

$$-\frac{1}{\Delta}B_0^k\phi_0^k + \frac{1}{\tau}\phi_0^k + \frac{1}{\Delta}B_0^k\phi_1^k = \Phi_0^k + \frac{1}{\Delta}\phi_0^{k-1},\ i = 0.$$

$$-\frac{1}{2\Delta}B_i^k\phi_{i-1}^k + \frac{1}{\tau}\phi_i^k + \frac{1}{2\Delta}B_i^k\phi_{i+1}^k =$$

$$= \Phi_i^k + \frac{1}{\tau}\phi_i^{k-1}, i = \overline{1,n-1}.$$

$$-\frac{1}{\Delta}B_n^k\phi_{n-1}^k+\frac{1}{\tau}\phi_n^k+\frac{1}{\Delta}B_n^k\phi_n^k=\Phi_n^k+\tau\phi_n^{k-1},\ i=n.$$

Розв'язком цієї системи буде вектор

$$\phi^k=\left(\phi_0^k,\phi_1^k,\phi_2^k,...,\phi_i^k,...,\phi_n^k\right)=$$

$$=\left(W_0^k,P_0^k,T_0^k,W_1^k,P_1^k,T_1^k,...,W_n^k,P_n^k,T_n^k\right).$$

Метод і алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь методом Ньютона

На $(s+1)$-й ітерації k-го часового шару отримаємо систему лінійних рівнянь, яка описана в роботі [7], і яка в загальному вигляді буде мати вид:

$$A^{k,s}\delta\phi^{k,s+1}=\psi^{k,s},\qquad(6)$$

де

$$A^{k,s}=\left[\frac{\partial\psi^k}{\partial\phi^k}\right]_{\phi^{k,s}},$$

де $\delta\phi^{k,s+1}$ – вектор поправок до невідомих на $(s+1)$-й ітерації k-го часового шару;

$\psi^{k,s}$ – вектор нев'язок, визначений на розв'язку, отриманому на попередній s-й ітерації k-го часового шару;

$A^{k,s}$ – матриця Якобі, яка визначена на розв'язку, отриманому на попередній s-й ітерації.

З лінійної системи отримуються компоненти векторів поправок до невідомих.

Вектори нев'язок для k-го часового шару s-ї ітерації мають вигляд:

$$\psi_0^{k,s}=\left(\frac{1}{\tau}\phi_0^{k,s}-\frac{1}{\Delta}B_0^{k,s}\phi_0^{k,s}\right)+\frac{1}{\Delta}B_0^{k,s}\phi_1^{k,s}-\Phi_0^{k,s}-\frac{1}{\tau}\phi_0^{k-1},$$

$$\psi_i^{k,s}=-\frac{1}{2\Delta}B_i^{k,s}\phi_{i-1}^{k,s}+\frac{1}{\tau}\phi_i^{k,s}+\frac{1}{2\Delta}B_i^{k,s}\phi_{i+1}^{k,s}-\Phi_i^{k,s}-\frac{1}{\tau}\phi_i^{k-1},$$

$$i=\overline{1,n-1},$$

$$\psi_n^{k,s}=\left(\frac{1}{\tau}\phi_n^{k,s}+\frac{1}{\Delta}B_n^{k,s}\phi_n^{k,s}\right)-\frac{1}{\Delta}B_n^{k,s}\phi_{n-1}^{k,s}-\Phi_n^{k,s}-\frac{1}{\tau}\phi_n^{k-1}.$$

Наведемо алгоритм розрахунку параметрів ННРТГ по ДТ для *k*-го часового шару.

1) $s=0$, задання $\phi^{k,0}$ (вектор початкових значень параметрів, який ми отримуємо, наприклад, зі СРТГ).

2) Обчислення нев'язок $\psi^{k,s}$.

3) Розрахунок елементів матриці Якобі.

4) Визначення векторів поправок шляхом розв'язання лінійної системи алгебраїчних рівнянь (6).

5) Обчислення нових значень невідомих параметрів газового потоку на $(s+1)$-й ітерації:

$$\phi_i^{k,s+1}=\phi_i^{k,s}-\delta\phi_i^{k,s+1},\ i=\overline{0,n}.$$

6) Перевірка збіжності $\left\|\psi^{k,s+1}\right\|\le\varepsilon$, де ε – задана точність. Якщо задана точність не досягнута, то $s=s+1$ і переходимо до п.2, в іншому випадку до п.7.

7) Кінець розрахунку часового шару.

Метод і алгоритм розв'язання системи нелінійних рівнянь методом Бройдена

Різницею між методом Ньютона та Бройдена є те, що в методі Бройдена матриця Якобі розраховується тільки на нульовому кроці, а на подальших ітераціях використовується її апроксимація:

$$A^{k,0}=\left[\frac{\partial\psi^k}{\partial\phi^k}\right]_{\phi^{k,0}},\qquad(7)$$

$$A^{k,s+1}=A^{k,s}+\frac{\left(\psi^{k,s+1}-\psi^{k,s}+A^{k,s}\cdot\delta\phi^{k,s+1}\right)\cdot\delta\phi^{k,s+1}}{\left\|\delta\phi^{k,s+1}\right\|^2},\qquad(8)$$

$$s=0,1,2,\ldots.$$

Тоді алгоритм знаходження параметрів ННРТГ для k-го часового шару прийме вид:

1) $s=0$, задання $\phi^{k,0}$ (вектор початкових значень параметрів, який ми отримуємо, наприклад, зі СРТГ).

2) Обчислення нев'язок $\psi^{k,s}$.

3) Розрахунок елементів матриці Якобі або її апроксимації за формулами (7) та (8).

4) Визначення векторів поправок шляхом розв'язання лінійної системи алгебраїчних рівнянь (6).

5) Обчислення нових значень невідомих параметрів газового потоку на s-й ітерації:

$$\phi_i^{k,s+1}=\phi_i^{k,s}-\delta\phi_i^{k,s+1},\ i=\overline{0,n}.$$

6) Перевірка збіжності $\left\|\psi^{k,s}\right\|\le\varepsilon$, де ε – задана точність. Якщо задана точність не досягнута, то $s=s+1$ і переходимо до п.2, в іншому випадку до п.7.

7) Кінець розрахунку часового шару.

Чисельний експеримент та аналіз результатів

Порівнюються результати розрахунку параметрів газового потоку (витрати, тиску, температури) при ННРТГ по ДТ за кількістю ітерацій, часом на розрахунок, точністю. Ці результати отримані з використанням методу Ньютона і методу Бройдена на етапі розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь. Розглядається ділянка трубопроводу з довжиною L = 112 км, діаметром $D=1400$ мм, коефіцієнтом ефективності ділянки $E=0.95$, товщиною стінок δ = 10 мм, еквівалентною шорсткістю труб $K=0.03$ мм, при питомої теплоємності $C_p=0.655952$, коефіцієнті теплопередачі від газу до ґрунту k_T = 1.4, відносної щільності газу по по-

вітрю Δ = 0.604707, температурі ґрунту на глибині закладення газопроводу $t_{гр} = 10^{\circ}C$. Крок розбиття по часової змінної τ = 300 секунд, $T_{\max}$ =12 годин. Точність розрахунку $\varepsilon = 10^{-6}$. Береться різна кількість точок розбиття $n = 5,10$ та 20.

Початкові умови:

$P_H = 84.6364456$ *атм* ;

$t_H = 40^{\circ}C$;

$q = 102.266$ *млн.м*^{3} / *доб* .

Розглядається ситуація підключення великого споживача з 200 хв. після початку розрахунку. Граничні умови у цьому випадку матимуть вид:

$$\begin{cases} P(0,t) = 84.6364 \text{ атм}, \\ T(0,t) = 40\ ^{\circ}C, \end{cases}$$

$$G\ (L\ ,t) = \begin{cases} 102.266 \text{ млн.м}^3 / \text{доб}, t < 200 \text{хв}, \\ 112.266 \text{ млн.м}^3 / \text{доб}, t \geq 200 \text{хв}. \end{cases}$$

Експеримент проводився на одному комп'ютері, при цьому програма запускалася декілька разів. В табл. 1–6 приведені кількість ітерацій на кожному часовому шарі, загальна кількість ітерацій і час роботи програми для метода Ньютона та Бройдена.

Таблиця 1

Кількість ітерацій на часових шарах, 5 точок розбиття. Метод Ньютона

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1	3	100, 102,104, 106, 108, 110	1
2-39	2	101, 103, 105, 107, 109, 111	2
40-51	3	112-144	1
52-99	2		
Час роботи програми	9.45 сек.	Загальна кількість ітерацій	262

Таблиця 2

Кількість ітерацій на часових шарах, 10 точок розбиття. Метод Ньютона

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1, 2	3	106	1
3-39	2	107	2
40-51	3	108-144	1
52-105	2		
Час роботи програми	20.32 сек.	Загальна кількість ітерацій	264

Таблиця 3

Кількість ітерацій на часових шарах, 20 точок розбиття. Метод Ньютона

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1, 2	3	105, 107, 109	1
3-39	2	106, 108, 110	2
40-58	3	111-144	1
59-104	2		
Час роботи програми	60.78 сек.	Загальна кількість ітерацій	272

Таблиця 4

Кількість ітерацій на часових шарах, 5 точок розбиття. Метод Бройдена

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1-6	3	42-74	3
7-39	2	75-125	2
40, 41	4	126-144	1
Час роботи програми	10.96 сек.	Загальна кількість ітерацій	312

Таблиця 5

Кількість ітерацій на часових шарах, 10 точок розбиття. Метод Бройдена

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1-5	3	43-76	3
6-39	2	77-116	2
40, 41, 42	4	117-144	1
Час роботи програми	24.52 сек.	Загальна кількість ітерацій	305

Таблиця 6

Кількість ітерацій на часових шарах, 20 точок розбиття. Метод Бройдена

Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій	Часовий шар (номер)	Кількість ітерацій
1-4	3	47-75	3
5-39	2	76-121	2
40, 41	5	122-144	1
42-46	4		
Час роботи програми	66.62 сек.	Загальна кількість ітерацій	314

На рис. 1–3 представлені графіки зміни параметрів газового потоку (витрати, тиску, температури) з часом при $n = 20$.

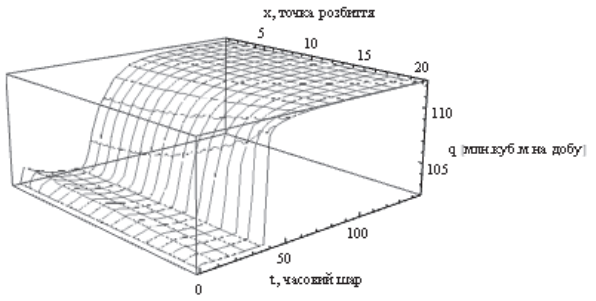

Рис. 1. Зміна витрати газу з часом по ДТ

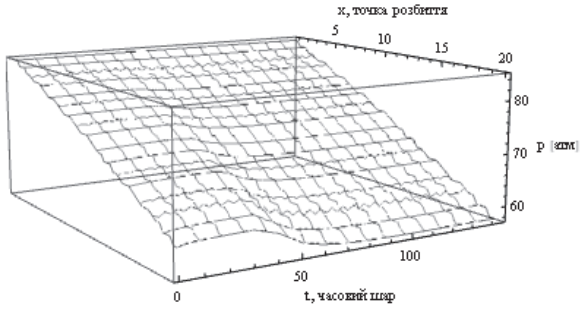

Рис. 2. Зміна тиску з часом по ДТ

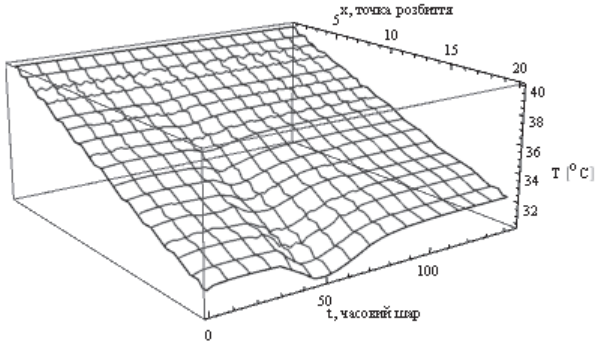

Рис. 3. Зміна температури з часом по ДТ

Відзначимо, що перехідний процес починається з 20-ї хвилини, що відповідає 40-му часовому шару. З табл. 1, 4; 2, 5; 3, 6 видно, що метод Бройдена не зміг покращити час обчислення параметрів газового потоку при ННРТГ.

Причиною цього є матриця Якобі. Вона має багато нульових елементів в собі. В методі Ньютона ці нульові елементи залишаються нульовими, але в методі Бройдена, де використовується апроксимація, ці елементи мають мале значення. Із-за цього процес знаходження розв'язку лінійної системи рівнянь ускладняється, і час роботи програми збільшується. Більша кількість ітерацій також погіршує час. Порівняння точності отриманих чисельних рішень за двома методами показало, що рішення співпадають по нормі з заданою точністю обчислень.

Висновки

Була отримана математична модель, яка описує поведінку невідомих параметрів (масової витрати, тиску, температури) режимів течії газу по ділянці трубопроводу, приведений спосіб розв'язання системи диференційних рівнянь методом скінченних різниць, отримані алгоритми розв'язання системи нелінійних рівнянь методом Ньютона та Бройдена, проведений числовий експеримент з використанням методу Ньютона та Бройдена, і складене порівняння їх ефективності для даної задачі.

Для даної задачі моделювання ННРТГ по ДТ використання методу Бройдена з точки зору зменшення затрат машинного часу на обчислення перехідного процесу себе не виправдало. Час роботи програми не покращився, кількість ітерацій при цьому збільшилась в порівнянні з методом Ньютона. Найбільш придатний для використання для задачі моделювання ННРТГ по ДТ є метод Ньютона, метод Бройдена можна використовувати у тих випадках, де матриця Якобі не буде такою розрідженою. Обидва методи можуть в подальшому бути використані при застосуванні інших скінчене-різницевих схем або при моделюванні лінійних ділянок газотранспортної системи.

Список літератури

1. Helgaker J.F. Transient flow in natural gas pipelines using implicit finite difference schemes / J.F. Helgaker, B. Müller, T. Ytrehus // Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering. – 2014. – № 136(3). – P. 031701-0317011. https://doi.org/10.1115/1.4026848.

2. Трубопроводные системы энергетики: Методические и прикладные проблемы моделирования. Разд. 3.3. / Н.Н. Новицкий, М.Г. Сухарев, А.Д. Тевяшев и др. – Новосибирск: Наука, 2015. – С. 193-204.

3. Селезнев В.Е. Методы построения моделей течений в магистральных трубопроводах и каналах: монография / В.Е. Селезнев, С.Н. Прялов. – М.-Берлин: Директ-Медиа, 2014. – 557 с.

4. Ермолаева Н.Н. Нестационарные модели теплообмена и транспортировки газа по морским газопроводам / Н.Н. Ермолаева // Труды Карельского научного центра РАН. Серия Математическое моделирование и информационные технологии. – 2016. – № 8. – С. 3-10.

5. Ермолаева Н.Н. Компьютерное моделирование оледенения морского газопровода и поведения характеристик потока в неустановившихся режимах / Н.Н. Ермолаева // Вестник Санкт -Петербургского Университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2016. – Вып. 4. – С. 75-86.

6. Селезнев В.Е. Основы численного моделирования магистральных трубопроводов / В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов; под. ред. В.Е. Селезнева. Изд. 2-е, перер. и доп. – М.: МАКС Пресс, 2009. – 436 с.

7. Гусарова И.Г. Численное моделирование переходных режимов течения газа с использованием различных конечно-разностных сеток / И.Г. Гусарова, Д.В. Мелиневский // Системи обробки інформації. – 2017. – № 2. – С. 29-33. https://doi.org/10.30748/soi.2017.148.05.

8. Adaptive implicit finite difference method for natural gas pipeline transient flow / P. Wang, B. Yu, D. Han, J. Li, D. Sun, Y. Xiang, L. Wang // Oil Gas Sci. Technol. – 2018. – No. 73. – 21 p. https://doi.org/10.2516/ogst/2018013.

9. Zhang L. Simulation of the transient flow in a natural gas compression system using a high-order upwind scheme considering the real-gas behaviors / L. Zhang // Journal of Natural Gas Science and Engineering. – 2016. – № 28. – P. 479-490. – https://doi.org/10.1016/j.jngse.2015.12.012.

10. Wang J.R. Application of equivalent circuit in mathematic modeling and simulation of gas pipeline / J.R. Wang, T. Wang, J.Z. Wang // Applied Mechanics and Materials. – 2014. – № 496. – P. 943-946. – https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.496-500.943.

11. Гусарова И.Г. Результаты численного моделирования переходных режимов течения газа по участку трубопровода методом характеристик / И.Г. Гусарова, А.Н. Коротенко // Системи обробки інформації. – 2018. – № 2(153). – С. 18-26. https://doi.org/10.30748/soi.2018.153.02.

12. Helgaker, J.F. Modeling Transient Flow in Long Distance Offshore Natural Gas Pipelines: Thesis for PhD. / J.F. Helgaker . – Trondheim, 2013.

13. Application and understanding of Stoner Pipeline Simulator (SPS) / Y. Zheng, J. Xiao, X. Sun, H. Hua, G. Fang // Natural Gas Industry. – 2013. – № 33. – P. 104-109. https://doi.org/10.3787/j.issn.1000-0976.2013.11.018.

14. Research on simulation model and solving technology of largescale gas pipe network / J.G. Zheng, G.Q. Chen, F. Song, Y. Ai-Mu, J.L. Zhao // Journal of System Simulation. – 2012. – № 24. – P. 1339-1344 (in Chinese).

15. Тевяшев А.Д. Эффективный метод и алгоритм расчета нестационарных неизотермических режимов транспорта газа в газотранспортной сети произвольной структуры / А.Д. Тевяшев, И.Г. Гусарова, А.В. Чуркина // Восточно-Европейский журнал. – 2006. – 2/3(20). – С. 45-52.

16. Селезнев В.Е. Основы численного моделирования магистральных газопроводов / В.Е. Селезнев, В.В. Алешин, С.Н. Прялов; под ред. В.Е. Селезнева. – М.: КомКнига, 2005. – 496 с.

17. Chen Z. Finite Elements Methods and Their Applications / Zhangxin Chen. – Leipzig: Springer-Yerlag Berlin Heidelberg, 2005. – 410 p.

References

1. Helgaker, J.F., Müller, B. and Ytrehus, T. (2014), Transient flow in natural gaspipelines using implicit finite difference schemes, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, No. 136(3), pp. 031701–0317011. https://doi.org/10.1115/1.4026848.

2. Novyckyj, N.N., Sukharev, M.Gh. and Tevjashev, A.D. (2015), "*Truboprovodnyje sistemy energhetiki: Metodicheskije i prikladnyje problemy modelirovanija*" [*Energy pipeline systems: Methodical and applied problems of modeling*], Science, Novosibirsk, pp. 193-204.

3. Seleznev, V.E. and Pryalov, S.N. (2014), "*Metody postroeniya modelej techenij v magistral'nyh truboprovodah i kanalah: monografiya*" [*Methods for constructing models of flows in main pipelines and canals: monograph*], Direct-Media, Moscow-Berlin, 557 p.

4. Ermolaeva, N.N. (2016), "Nestacionarnye modeli teploobmena i transportirovki gaza po morskim gazoprovodam" [Nonstationary models of heat exchange and gas transportation by sea gas pipelines], *Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Mathematical Modeling and Information Technologies Series,* No. 8, pp. 3-10.

5. Ermolaeva, N.N. (2016), "Kompyuternoe modelirovanie oledeneniya morskogo gazoprovoda i povedeniya harakteristik potoka v neustanovivshihsya rezhimah" [Computer simulation of the glaciation of the offshore gas pipeline and behavior of flowing characteristics in unsteady regimes], *Bulletin of St. Petersburg University,* No. 4(10), pp. 75-86.

6. Seleznev, V.E., Aleshin, V.V. and Pryalov, S.N. (2009), "*Osnovy chislennogo modelirovanija magistralnyh truboprovodov*" [*Fundamentals of numerical simulation of main pipelines*], MAX Press, Moscow, 436 p.

7. Husarova, I.H. and Melinevskyi, D.V. (2017), "Chislennoye modelirovaniye perekhodnykh rezhimov techeniya gaza s ispol'zovaniyem razlichnykh konechno-raznostnykh setok" [Numerical simulation of transient flow regimes gas using different finite-difference grids], *Information Processing Systems*, No. 2, pp. 29-33. https://doi.org/10.30748/soi.2017.148.05.

8. Wang, P., Yu, B., Han, D., Li, J., Sun, D., Xiang, Y. and Wang, L. (2018), Adaptive implicit finite difference method for natural gas pipeline transient flow, *Oil Gas Sci. Technol*, No. 73, 21 p. https://doi.org/10.2516/ogst/2018013.

9. Zhang, L. (2016), Simulation of the transient flow in a natural gas compression system using a high-order upwind scheme considering the real-gas behaviors, *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, No. 28, pp. 479-490. https://doi.org/10.2516/ogst/2018013 10.1016/j.jngse.2015.12.012.

10. Wang, J.R., Wang, T. and Wang, J.Z. (2014), Application of π Equivalent Circuit in Mathematic Modeling and Simulation of Gas Pipeline, *Applied Mechanics and Materials*, No. 496, pp. 943-946. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.496-500.943.

11. Husarova, I.H. and Korotenko, A.N. (2018), "Rezultaty chislennogo modelirovanija perekhodnykh rezhimov techenija gaza po uchastku truboprovoda metodom harakteristik" [The Results of numerical modeling of transient modes of the gas flowing on the pipeline section by the characteristics method], *Information Processing Systems,* No. 2(153), pp. 18-26. https://doi.org/10.30748/soi.2018.153.02.

12. Helgaker, J.F. (2013), *Modeling Transient Flow in Long Distance Offshore Natural Gas Pipelines*: *Thesis for PhD,* Trondheim.

13. Zheng, Y., Xiao, J., Sun, X., Hua, H. and Fang, G. (2013), Application and understanding of Stoner Pipeline Simulator (SPS), *Natural Gas Industry*, No. 33, pp. 104-109. https://doi.org/10.3787/j.issn.1000-0976.2013.11.018.

14. Zheng, J.G., Chen, G.Q., Song, F., Ai-Mu, Y. and Zhao, J.L. (2012), Research on simulation model and solving technology of largescale gas pipe network, *Journal of System Simulation*, Vol. 24, pp. 1339-1344 (in Chinese).

15. Tevyashev, A.D., Husarova, I.H. and Churkina, A.V. (2016), "Effektivnyy metod i algoritm rascheta nestatsionarnykh neizotermicheskikh rezhimov transporta gaza v gazotransportnoy seti proizvol'noy struktury" [Effective method and algorithm

for calculating non-stationary non-isothermal modes of gas transportation in a gas-transport network of arbitrary structure], *East European Journal*, No. 2/3(20), pp. 45-52.

16. Seleznev, V.E., Aleshyn, V.V. and Prjalov, S.N. (2005), "*Osnovy chyseljnogho modeljuvannja maghistraljnykh ghazoprovodov*" [*Fundamentals of numerical simulation of gas pipelines*], KomKnygha, Moscow, 496 p.

17. Chen, Z. (2005), *Finite Elements Methods and Their Applications*, Springer-Yerlag Berlin Heidelberg, Leipzig, 410 p.

Надійшла до редколегії 18.03.2019
Схвалена до друку 23.04.2019

Відомості про авторів:

Гусарова Ірина Григоріївна
кандидат технічних наук доцент
професор кафедри Харківського національного
університету радіоелектроніки,
Харків, Україна
https://orcid.org/0000-0002-1421-0864

Соловйов Олексій Максимович
студент магістр Харківського національного
університету радіоелектроніки,
Харків, Україна
https://orcid.org/0000-0001-6363-6258

Information about the authors:

Iryna Husarova
Candidate of Technical Sciences Associate Professor
Professor of Department of Kharkiv National University
of Radio Electronics,
Kharkiv, Ukraine
https://orcid.org/0000-0002-1421-0864

Oleksii Solovj'ev
Postgraduate Student of Kharkiv National University
of Radio Electronics,
Kharkiv, Ukraine
https://orcid.org/0000-0001-6363-6258

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА БРОЙДЕНА ПРИ КОМПЬЮТЕРНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРЕХОДНЫХ РЕЖИМОВ

И.Г. Гусарова, А.М. Соловьев

В статье обоснована актуальность моделирования нестационарных неизотермических режимов течения газа по участку трубопровода. Проведен анализ существующих работ по моделированию режимов течения газа, в которых используются различные методы для решения системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, полученной из общих уравнений газовой динамики. Приведена математическая модель нестационарного неизотермического режима течения газа по участку трубопровода. Применен метод конечных разностей с использованием неявной конечно-разностной сетки, при этом были использованы методы Ньютона и Бройдена для решения системы нелинейных уравнений. Проведен численный эксперимент для задачи подключения большого потребителя. Приведено сравнение эффективности использования методов Ньютона и Бройдена в контексте данной задачи. Показано, что наиболее эффективным для решения поставленной задачи является метод Ньютона. Данные этого исследования могут быть использованы для потенциального улучшения методов моделирования нестационарных неизотермических режимов течения газа в газотранспортной системе с целью повышения эффективности принимаемых решений в аварийных ситуациях.

Ключевые слова: *участок трубопровода, нестационарные неизотермические режимы течения газа, математическая модель, система дифференциальных уравнений в частных производных, метод конечных разностей, система нелинейных уравнений, метод Ньютона, метод Бройдена.*

USING THE BROYDEN METHOD IN COMPUTER MODELING OF TRANSIENTS

I. Husarova, O. Solovj'ev

The article substantiates the relevance of modeling non-stationary non-isothermal gas flow regimes in a pipeline section. The analysis of existing works on modeling gas flow regimes, where authors of these articles use various methods for solving a system of differential equations in partial derivatives of hyperbolic type, obtained from the general equations of gas dynamics, is carried out. A mathematical model of a non-stationary non-isothermal gas flow regime along a pipeline section has been developed. The finite difference method with implicit finite difference grid was applied. It becomes necessary to solve a nonlinear system of finite difference equations after applying this method. Newton and Broyden methods were used to solve this system of nonlinear equations. Newton's method has a quadratic convergence rate, but it requires calculating the Jacobi matrix for each iteration. The Broyden method has a superlinear rate of convergence, but it was promising to reduce the total time to obtain a numerical solution to the problem of modeling the transition regime by using the approximation of the Jacobi matrix. A numerical experiment has been carried out for the task of connecting a large consumer to a gas flow system. A comparison is made for the effectiveness in implementation of Newton and Broyden methods in the context of the given task. It is shown that the Newton method is the most effective for solving the problem. Although both methods can later be used in the application of other finite-difference grid or in the simulation of linear sections of the gas transmission system. The information from this study can be used to potentially improve methods for modeling non-stationary non-isothermal gas mode in a gas transportation pipe network in order to increase the efficiency of decisions made in emergency situations.

Keywords: *pipeline section, non-stationary non-isothermal gas flow regime, mathematical model, system of differential equations, finite difference method in partial derivatives, system of nonlinear equations, Newton method, Broyden method.*