УДК 006.91

І.П. Захаров, Г.Г. Сафарян, М.П. Сергієнко

Харківський національний університет радіоелектроніки

КОЕФІЦІЄНТИ ОБХВАТУ ДЛЯ КОМПОЗИЦІЇ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН, РОЗПОДІЛЕНИХ ЗА ЗАКОНОМ АРКСИНУСА

У статті відображені результати розрахунку коефіцієнта обхвату для композиції арксинусоідальних законів розподілу вхідних величин з урахуванням кореляції між ними.

коефіцієнт обхвату, закон розподілу, кореляція, невизначеність вимірювання

Вступ

Постановка проблеми. Відповідно до міжнародних нормативних документів [1, 2] якість результатів вимірювань рекомендується виражати у вигляді розширеної невизначеності. Остання визначається як добуток коефіцієнта обхвату (КО) на сумарну стандартну невизначеність [3]. Для знаходження КО необхідно одержати закон розподілу вимірюваної величини, який є композицією законів розподілу вхідних величин. При цьому вхідні величини можуть бути попарно корельовані. Крім того, параметри законів розподілу вхідних величин можуть бути оцінені:

– за великою (> 30) кількістю спостережень або нестатистичними методами (за типом В);

– за малою (< 30) кількістю спостережень.

У нормативних документах закони розподілу вхідних величин, як правило, приймаються нормальними або рівномірними. Для цих випадків одержані оцінки КО з урахуванням кореляції вхідних величин і кількості спостережень [4, 5].

Особливим класом законів розподілів вхідних величин є клас арксинусоїдальних розподілів [6]. Цьому закону розподілу підпорядковуються похибки від наведень і завад на виході засобів вимірювальної техніки від силових ланцюгів промислової частоти, похибки розузгодження при вимірюванні потужності радіосигналів, похибки при вимірюваннях параметрів кругових величин. У [7] розглянута композиція чотирьох некорельованих вхідних величин, розподілених за законом арксинуса з відомими параметрами, для яких розраховані максимуми КО.

Мета статті – визначення КО для композиції арксинусоїдальних законів розподілу для випадків великої та малої кількості спостережень з урахуванням і без урахування кореляції між вхідними величинами. Реалізація поставленої мети проводилася методом Монте-Карло.

1. Визначення КО при великій кількості спостережень

Для отримання сумісних законів розподілу, відмінних від нормального, використовувався алгоритм, наведений у роботі [8].

Дослідження проводилися при обсязі масиву даних $n = 10^5$ зі 100-кратним усереднюванням для рівня довіри $p = 0{,}95$. При цьому середнє квадратичне відхилення (СКВ) коефіцієнтів кореляції ρ не перевищило 10^{-3}.

У разі відсутності кореляції залежність КО k від співвідношення СКВ σ_2/σ_1 двох вхідних величин ($\sigma_2 \le \sigma_1$) виглядає, як показано на рис. 1 (залежність для $\sigma_3/\sigma_1 = 0$).

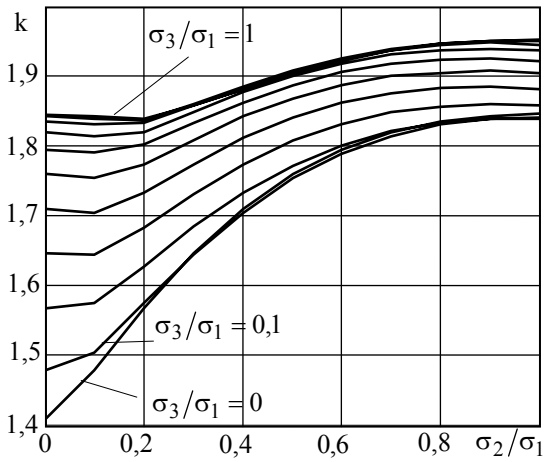

Рис. 1. Залежності коефіцієнта обхвату композиції трьох незалежних величин, розподілених за законом арксинуса, від співвідношення їх СКВ

Аналіз цієї залежності показує, що при зміні σ_2/σ_1 від 0 до 1 значення КО змінюється від 1,41 до 1,82. Слід зазначити, що якщо як КО приймати значення 1,96, як це рекомендують нормативні документи [3], то похибка оцінки розширеної невизначеності може досягти 40 %.

На цьому ж рисунку представлена залежність КО для композиції законів розподілу трьох незалежних випадкових величин, розподілених за законом арксинуса, як функція від співвідношення їх СКВ. Слід зазначити, що із зростанням відношень σ_2/σ_1

© І.П. Захаров, Г.Г. Сафарян, М.П. Сергієнко

і σ_3/σ_1 значення КО збільшується, наближаючись до значення 1,96. За наявності кореляції композиція арксинусоїдальних законів розподілу (рис. 2) істотно відрізняється від законів розподілу, наведених у роботі [7]. Тому ігнорування кореляції приводить не тільки до неточного визначення сумарної стандартної невизначеності, але й до істотних похибок визначення КО.

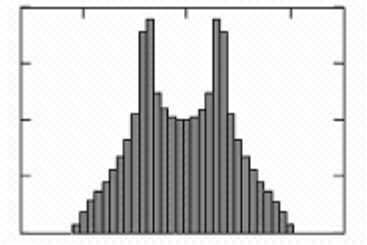

Рис. 2. Гістограма композиції двох корельованих арксинусоїдальних законів розподілу для $\rho = 0{,}5$ і $\sigma_2/\sigma_1 = 0{,}5$

Залежності КО від співвідношення СКВ досліджуваних величин за наявності кореляції між ними показані на рис. 3.

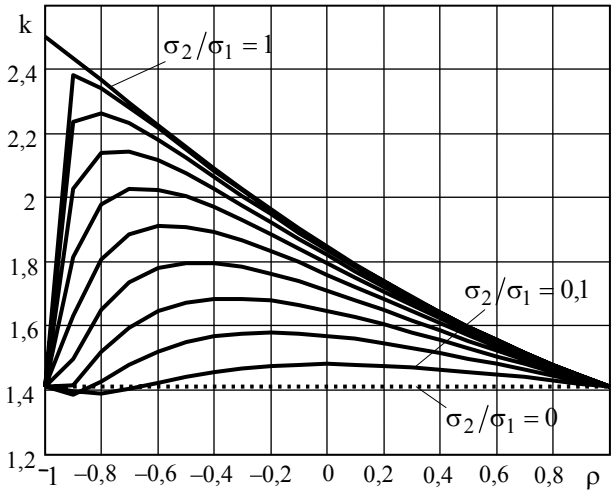

Рис. 3. Залежності КО від коефіцієнта кореляції і співвідношення СКВ

Аналіз залежностей на рис. 3 показує, що максимум КО і спостерігається за умови $\sigma_2/\sigma_1 \approx -\rho$.

Похибка оцінки КО, що виникає внаслідок ігнорування кореляції між вхідними величинами, розрахована за формулою

$$\delta = \frac{k_0 - k}{k} \cdot 100\%,$$

де k_0 – КО за відсутності кореляції, і показана на рис. 4.

Аналіз рис. 4 показує, що значення δ змінюється в межах від –26 до 32 %. При $\rho > 0$ похибка δ практично лінійно зростає із збільшенням ρ і σ_2/σ_1 та позитивна за знаком. При негативних коефіцієнтах кореляції в негативній області похибок максимум (за модулем) похибки спостерігається за умови $\sigma_2/\sigma_1 \approx -\rho$. У позитивній області похибок максимум спостерігається при $\rho = -0{,}7 \ldots -1$.

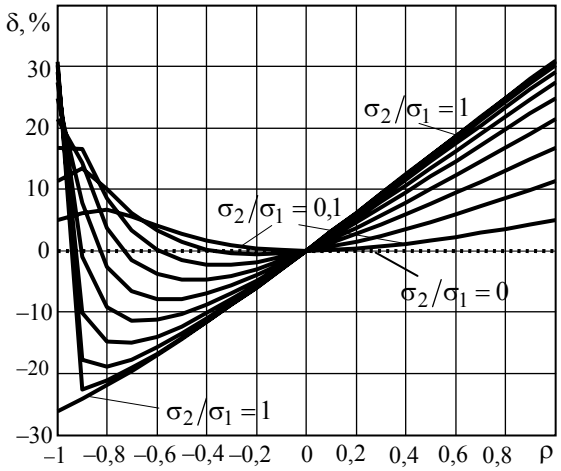

Рис. 4. Похибка, викликана нехтуванням до кореляції, при визначенні КО

Аналіз рис. 4 показує, що значення δ змінюється в межах від –26 % до 32 %. При $\rho > 0$ похибка δ практично лінійно зростає із збільшенням ρ і σ_2/σ_1 та позитивна за знаком. При негативних коефіцієнтах кореляції в негативній області похибок максимум (за модулем) похибки спостерігається за умови $\sigma_2/\sigma_1 \approx -\rho$. У позитивній області похибок максимум спостерігається при $\rho = -0{,}7 \ldots -1$.

2.5 Визначення КО при малій кількості спостережень

Випадок обмеженого обсягу даних в метрологічній практиці дуже поширений. Це пов'язано, перш за все, з вимушеною економією матеріальних і тимчасових витрат на проведення експериментальних досліджень. Тому при проведенні перевірочних робіт часто обмежуються 3...5 спостереженнями вимірюваної величини, рідше кількість спостережень досягає 20...30. В цьому випадку для нормальних законів розподілу вхідних величин КО визначають як коефіцієнт Стьюдента.

На рис. 5 показані результати розрахунку залежності КО для арксинусоїдальних законів розподілу вхідних величин при відсутності кореляції між ними від співвідношення СКВ σ_2/σ_1 для різної кількості спостережень n_1 і n_2 (суцільною лінією позначені залежності для співвідношення СКВ $\sigma_2/\sigma_1 = 0{,}2$; штриховою потовщеною – для $\sigma_2/\sigma_1 = 0{,}6$; штри-

ховою тонкою – для $\sigma_2/\sigma_1 = 1$). Розрахунки залежності проводилися при обсязі масивів даних 10^5 з усереднюванням 30 разів для $n_1 = 2\ldots30$ $n_2 = 2\ldots23$. При цьому СКВ оцінки КО не перевищило 10^{-3}.

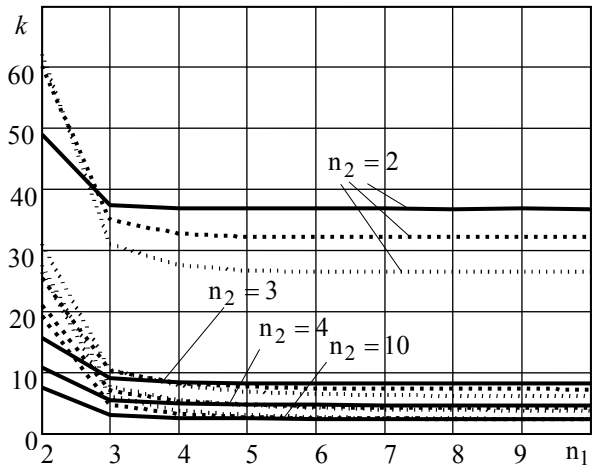

Рис. 5. Залежність КО для різної кількості спостережень n_1 і n_2 та відношень СКВ σ_2/σ_1

За відсутності кореляції при рівній кількості спостережень $n_1 = n_2 = n$ КО залежить від співвідношення СКВ досліджуваних вхідних величин так, як показано на рис. 6.

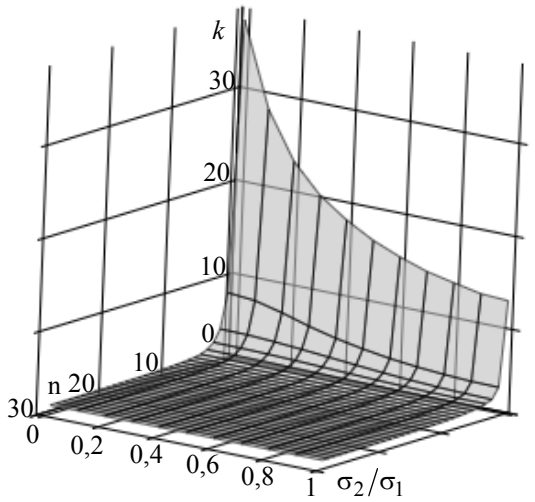

Рис. 6. Залежність КО від кількості спостережень n і співвідношення СКВ σ_2/σ_1 за відсутності кореляції

Дослідження показали, що ігнорування кореляції при визначенні КО приводить до значних похибок, які при малих n можуть досягати –90 %. При $n > 6$ похибка визначення КО зменшується із зростанням кількості спостережень і збільшується із зростанням співвідношення σ_2/σ_1, а також із зростанням коефіцієнта кореляції (за модулем). За знаком похибка КО, викликана нехтуванням кореляції, негативна.

Висновкия

У роботі розглянуте питання визначення КО для композиції арксинусоїдальних законів розподілу випадкових величин, з урахуванням кореляції між ними для випадків великої і малої кількості спостережень.

Показано, що для випадку великої кількості спостережень значення КО змінюються в межах від 1,41 до 1,96 за відсутності кореляції між вхідними величинами. За наявності кореляції значення КО змінюються в межах від 1,41 до 2,5. Ігнорування кореляції приводить до похибок оцінки КО від –26 % до 32 %.

При малій кількості спостережень одержані значення КО для двох випадкових величин з кількістю спостережень n_1 і n_2 для різних співвідношень СКВ. Для випадку $n_1 = n_2 = n$ і різних СКВ досліджено вплив кореляції на точність визначення КО. Показано, що похибка визначення КО, викликана ігноруванням кореляції, може досягати – 90 %.

Списокяli2era2урия

1. *Mutual recognition of national measurement standards and of calibration and measurement certificates issued by national metrology institutes. – Paris: International Committee for Weights and Measures, 1999.*
2. *ДСТУ ISO/IEC 17025 – 2001. Загальні вимоги до компетентності випробувальних та калібрувальних лабораторій. – К..: Держстандарт України, 2001.*
3. *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. – Geneva: ISO, 1993. – 101 p.*
4. *Захаров И.П. Расчет коэффициента охвата для нормально и равномерно распределенных составляющих неопределенности // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС. – 2005. – Вып. 6. – С. 52-57.*
5. *Захаров И.П. Вычисление коэффициента охвата композиции коррелированных и некоррелированных составляющих неопределенности измерения // Зб. наук. пр. ХУ ПС. – Х.: ХУ ПС. – 2005. – Вип. 6 (6). – С. 61-63.*
6. *Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991. – 304 с.*
7. *Захаров И.П., Сафарян Г.Г. Определение доверительных границ композиции арксинусных законов распределения // Радиотехника (Харьков). – 2004. – Вып. 136. – С. 27-30.*
8. *Захаров И.П. Моделирование коррелированных данных при обработке результатов измерений // Моделювання та інформаційні технології. – К.: ІПМЕ ім. Пухова. – 2005. – Вип. 33. – С. 35-40.*

Надійшла до редколегії 15.08.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. І.В. Руженцев, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків.