УДК 623. 021: 005

В.Б. Кононов

Харківський університет Повітряних Сил ім. Івана Кожедуба, Харків

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАВДАНЬ ОПТИМІЗАЦІЇ СКЛАДУ РІЗНОРІДНИХ БОЙОВИХ ЗАСОБІВ НА ОСНОВІ СТАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ З УРАХУВАННЯМ ПРОТИДІЮЧИХ УГРУПОВАНЬ

У статті викладені розроблені математичні моделі оптимізації состава однорідних бойових засобів на основі статичних моделей з урахуванням протидії супротивника.

математична модель, протидія, однорідні бойові засоби, статична модель

ВЯтуп

Постановка завдання. Розрахунок сил і засобів при планування й наступне ведення бойових дій в умовах сучасної конфліктної ситуації являє собою важливе військово-наукове завдання, актуальність якого визначається необхідністю створення в Збройних Силах України автоматизованої системи керування військами й зброєю.

Аналіз літератури. У відомій літературі, присвяченої дослідженню операцій у військовій справі [1 – 4] розглядаються питання застосування дослідження операцій до рішення завдань керування військами. При цьому основна увага приділена імовірнісним оцінкам, за допомогою яких визначаються ймовірності виконанні бойових завдань конфліктуючими сторонами. Однак у цих роботах не передбачаються методи кількісної оцінки состава бойових засобів угруповань протиборчих сторін. У роботі [5] запропоновані математичні співвідношення, що дозволяють визначити состав однорідних бойових засобів на основі статичних моделей з урахуванням протидії супротивника.

Метою статті є розробка математичних моделей завдань оптимізації состава різнорідних бойових засобів на основі статичних моделей з урахуванням протидії супротивника

Основний матеріал

Завдання визначення кількісного состава однорідних бойових засобів викладені в [6]. Згідно прийнятої в [6] методиці, ймовірність непоразки всіма бойовим засобом супротивника має вигляд:

$$Q=\prod_{k=1}^{l}\left(1-\overline{q_k v_k}\right)^{n_k}, \qquad (1)$$

де $\overline{q_k}$ – імовірність не знищення своїх бойових засобів;

$\overline{v_k}$ – умовної ймовірності не знищення свого бойового засобу k-м бойовим засобом супротивника, число бойових засобів якого $k=\overline{1,\ell}$ (ℓ – кількість типів бойових засобів супротивника);

n_k – число атак k-м бойовим засобом супротивника.

При однаковому озброєнні бойових засобів при $v_1=v_2=\cdots=v_N=v$ вражаючі властивості бойових засобів супротивника характеризуються відсутністю нагромадження збитку (показовим законом поразки) $v=\frac{1}{\omega}$, де ω – середнє число неуражених бойових засобів супротивника формула (1) записується як

$$Q=\prod_{j=1}^{N}\left(1-\frac{q_j}{\omega}\right). \qquad (2)$$

У результаті рішення співвідношення (2) одержимо, що

$$Q\approx e^{-\frac{\mu}{\varpi}}, \qquad (3)$$

де $\mu=\sum_{j=1}^{N}q_j=\sum_{j=1}^{N}\left(1-u_j\right)$ – середня кількість неуражених бойових засобів.

В умові наявності N загальної кількості бойових засобів при $v_N=v$ й $u_N=u$ імовірність непоразки m бойових засобів супротивника задається біноміальним законом розподілу [2]:

$$P_{(m)}=C_N^m u^{N-m}\left(1-u\right)^m=C_N^m q^m u^{N-m}.$$

Імовірність збереження своїх бойових засобів при наявності нагромадження збитку дорівнює:

$$\begin{aligned}Q &= \sum_{m=0}^{N}p_{(m)}\left[1-G_{(m)}\right]=1-\sum_{m=0}^{N}p_{(m)}G_{(m)}= \\ &=1-\sum_{m=0}^{N}C_N^m q^m u^{N-m}G_{(m)}.\end{aligned} \qquad (4)$$

Середня частка збитку, яка наноситься своєму бойовому засобу N бойовими засобами супротивника, має вигляд:

$$y=1-\prod_{j=1}^{N}\left(1-\overline{s_j}\right), \qquad (5)$$

де $\overline{s_j}=0\cdot u_j+s_j q_j$ – математичне очікування збитку, який наноситься одному бойовому засобу супротивника, при завданні збитків j-му бойовому засобу супротивника, дорівнює нулю, з імовірністю u_j й відносною часткою збитку s_j, який наноситься своєму бойовому засобу j-м бойовому засобом супротивника, з імовірністю $q_j=1-u_j$.

При наявності ℓ типів бойових засобів супротивника, у якого кількість бойових засобів кожного типу дорівнює $n_1=n_2=\cdots=n_l$ формула (5) прийме вигляд:

$$y=1-\prod_{k=1}^{l}\left(1-s_k q_k\right), \qquad (6)$$

де s_k – середня частка збитку, що може заподіяти своєму бойовому засобу один бойовий засіб k-го типу $\left(k=1,\cdots,\ell\right)$;

$q_{(k)}$ – імовірність не поразки бойового засобу k-го типу $\left(k=1,\cdots,\ell\right)$.

Попередні зауваження дозволять вирішити завдання для випадку, коли угруповання A складається з m типів різнорідних бойових засобів, і нехай їй протистоїть бойові засоби однорідного угруповання B (супротивника).

Завдання визначення оптимального плану розподілу різнорідних бойових засобів угруповання A по однорідних бойових засобах угруповання B будемо вирішувати за критерієм мінімуму математичного очікування сумарних вартості різнорідних бойових засобів за умови поразки угрупованням A

заданого рівня математичного очікування кількості однорідних бойових засобів угруповання B.

Імовірність поразки одного бойового засобу угруповання B бойовими засобами i-го типу угруповання A, з огляду на протидію, буде дорівнює

$$P_i(x_i) = 1 - \left[1 - p_i(1 - q_i)\right]^{\frac{x_i}{y_0}}, \qquad (7)$$

де $p_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ – ймовірність поразки одним бойовим засобом i-го типу угруповання A одного бойового засобу угруповання B; $q_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ – імовірність поразки одним бойовим засобом угруповання B одного бойового засобу i-го типу угруповання A; y_0 – кількість однорідних бойових засобів угруповання B; $x_i\left(i = \overline{1, m}\right)$ – шукана кількість бойових засобів i-го типу угруповання A, що атакують y_0 бойових засобів угруповання B за рівномірним законом.

Імовірність поразки одного бойового засобу угруповання B бойовими засобами всіх типів угруповання A, з огляду на протидію, буде дорівнює

$$P(x) = 1 - \prod_{i=1}^{m}\left[1 - p_i(x_i)\right] = 1 - \prod_{i=1}^{m}\left(1 - p_i + p_i q_i\right)^{\frac{x_i}{y_0}}, \qquad (8)$$

а математичне очікування кількості уражених однорідних бойових засобів угруповання B визначиться за формулою:

$$M_{\text{од}}^{B}(x) = y_0\left[1 - \prod_{i=1}^{m}\left(1 - p_i + p_i q_i\right)^{\frac{x_i}{y_0}}\right].$$

У такий спосіб математична модель розглянутого завдання прийме наступний вид:

$$C(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \to \min;$$

$$1 - \prod_{i=1}^{m}\left(1 - p_i + p_i q_i\right)^{\frac{x_i}{y_0}} \ge 0{,}01r; \qquad (9)$$

$$x_i = \left[x_i\right] \ge 0, \quad i = \overline{1, m},$$

де c_i, $i = \overline{1, m}$ – вартість одного бойового засобу i-го типу;

$r\%$ – задана величина втрат угруповання супротивника;

$C(x)$ – сумарна вартість всіх типів бойових засобів угруповання A при плані їхнього розподілу $x = \left[x_1,\ x_2, \cdots, x_n\right]^{T}$.

Визначимо математичне очікування сумарних втрат угруповання A при оптимальному плані їхнього розподілу $x^* = \left[x_1^*,\ x_2^*, \cdots, x_m^*\right]$. Імовірність поразки одного бойового засобу i-го типу угруповання A бойовими засобами угруповання B дорівнює:

$$Q_i\left(x_i^*\right) = 1 - \left(1 - q_i + p_i q_i\right)^{\frac{y_i}{x_i^*}}, \quad i = \overline{1, m}, \qquad (10)$$

де $y = \left[y_1,\ y_2, \cdots, y_n\right]^{T}$ – план розподілу однорідних бойових засобів угруповання B по бойових засобах угруповання A всіх типів.

Тоді математичне очікування кількості уражених бойових засобів i-го типу угруповання A визначиться за формулою:

$$M_i^A\left(x_i^*\right) = x_i^* Q_i\left(x_i^*\right) = x_i^*\left[1 - \left(1 - q_i + p_i q_i\right)^{\frac{y_i^0}{x_i^*}}\right],$$

а математичне очікування сумарних втрат бойових засобів угруповання A визначиться за формулою:

$$M_H^A\left(x^*\right) = \sum_{i=1}^{m} M_i^A\left(x_i^*\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i\left[1 - \left(1 - q_i + p_i q_i\right)^{\frac{y_i^0}{x_i^*}}\right]. \qquad (11)$$

Розглянемо загальний випадок бою угруповання A, яка складається з m типів різнорідних бойових засобів, і угруповання B, яка складається з n типів різнорідних бойових засобів.

Представляється природним наступна постановка завдання: визначити оптимальний план розподілу різнорідних бойових засобів угруповання A за різнорідних бойових засобах угруповання B за критерієм мінімуму математичного очікування сумарних вартості різнорідних бойових засобів за умови поразки заданого рівня математичного очікування сумарної кількості різнорідних бойові засоби угруповання B з урахуванням їх важливості.

Побудуємо математичну модель завдання. Імовірність поразки одного j-го типу бойових засобам угруповання B бойовими засобами i-го типу угруповання A, з огляду на протидію, буде дорівнює

$$P_{ij}\left(x_{ij}\right) = 1 - \left[1 - p_{ij}\left(1 - q_{ji}\right)\right]^{\frac{x_{ij}}{y_j}}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \qquad 12)$$

де $p_{ij}\left(i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}\right)$ – імовірність поразки одним бойовим засобом i-го типу угруповання A одного бойового засобу j-го типу угруповання B;

$q_{ji}\left(i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}\right)$ – імовірність поразки одним бойовим засобом j-го типу угруповання B одного бойового засобу i-го типу угруповання A;

$y_j\left(j = \overline{1, n}\right)$ – кількість бойових засобів j-го типу угруповання B;

$x_{ij}\left(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}\right)$ – шукана кількість бойових засобів i-го типу угруповання A, що атакують y_j бойових засобів j-го типу угруповання B за рівномірним законом.

Імовірність поразки одного бойового засобу j-го типу угруповання B бойовими засобами всіх типів угруповання A, з огляду на протидію, буде дорівнювати

$$P_j(X)=1-\prod_{i=1}^{m}\left[1-P_{ij}\left(x_{ij}\right)\right]= \\ =1-\prod_{i=1}^{m}\left(1-p_{ij}+p_{ij}q_{ji}\right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}},\ y_j=\overline{1,n}. \tag{13}$$

Математичне очікування кількості уражених бойових засобів j-го типу угруповання B визначиться за формулою:

$$M_j^B(X)=y_jP_j(X)= \\ =y_j\left[1-\prod_{i=1}^{m}\left(1-p_{ij}+p_{ij}q_{ji}\right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}}\right],\ y_j=\overline{1,n}, \tag{14}$$

а математичне очікування сумарної кількості уражених різнорідних бойових засобів угруповання B, з урахуванням їх важливості, визначиться за формулою:

$$M_H^B(X)=\sum_{j=1}^{n}w_jM_j^B(X)= \\ =\sum_{j=1}^{n}w_jy_j\left[1-\prod_{i=1}^{m}\left(1-p_{ij}+p_{ij}q_{ji}\right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}}\right], \tag{15}$$

де $X=\left\|x_{ij}\right\|_{n,m}$ – шуканий план атакуючих дій угруповання A.

Математична модель даного завдання прийме наступний вигляд:

$$C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_ix_{ij}\to\min;$$

$$\sum_{j=1}^{n}w_jy_j\left[1-\prod_{i=1}^{m}\left(1-p_{ij}+p_{ij}q_{ji}\right)^{\frac{x_{ij}}{y_j}}\right]\ge 0{,}01r\sum_{j=1}^{n}w_jy_j; \tag{16}$$

$$x_{ij}=\left[x_{ij}\right]\ge 0,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n};$$

$$\sum_{j=1}^{n}w_j=1,\quad w_j\ge 0,\quad j=\overline{1,n}.$$

Визначимо математичне очікування сумарних втрат угруповання A при оптимальному плані їхнього розподілу $X=\left\|x_{ij}\right\|_{n,m}$.

Імовірність поразки одного бойового засобу i-го типу угруповання A бойовими засобами j-го типу угруповання B дорівнює

$$Q_{ij}\left(x_i^*\right)=1-\left(1-q_{ji}+p_{ij}q_{ji}\right)^{\frac{y_{ji}}{x_i^*}}, \\ j=\overline{1,n},\quad i=\overline{1,m}, \tag{17}$$

де $x_i^*=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}^*,\quad i=\overline{1,m}$;

$Y=\left\|y_{ji}\right\|_{n,m}$ – план розподілу різнорідних бойових засобів угруповання B по бойових засобах угруповання A всіх типів.

Імовірність поразки одного бойового засобу i-го типу угруповання A бойовими засобами всіх типів угруповання B дорівнює

$$Q_i\left(x_i^*\right)= \\ 1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-Q_{ij}\left(x_i^*\right)\right)= \\ 1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-q_{ji}+p_{ij}q_{ji}\right)^{y_{ji}/x_i^*},\quad i=\overline{1,m}. \tag{18}$$

Математичне очікування кількості уражених бойових засобів i-го типу угруповання A визначиться за формулою:

$$M_i^A\left(X^*\right)=x_i^*Q_i\left(X^*\right)= \\ =x_i^*\left[1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-q_{ji}+p_{ij}q_{ji}\right)^{y_{ji}/x_i^*}\right], \tag{19}$$

де $i=\overline{1,m}$.

Математичне очікування сумарних втрат уражених бойових засобів угруповання A визначиться за формулою:

$$M_H^A\left(X^*\right)=\sum_{i=1}^{m}M_i^A\left(X^*\right)= \\ =\sum_{i=1}^{m}x_i^*\left[1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-q_{ji}+p_{ij}q_{ji}\right)^{\frac{y_{ji}}{x_i^*}}\right]. \tag{20}$$

Висновки

1. У статті запропонований формалізований опис завдання визначення різнорідних бойових засобів, що протиборствують угруповань.

2. Запропоновано математичні співвідношення для визначення кількісного состава різнорідних бойових засобів на основі статичних моделей з урахуванням протидії супротивника.

3. Запропоновані математичні моделі можна використати при рішенні завдань, пов'язаних зі створенням автоматизованої системи керування військами й зброєю ВР України.

Список літератури

1. Основи дослідження операцій у військовій техніці / Під ред. Ю.В. Чуева – М.: Сов. радіо, 1965. – 383 с.

2. Осинский Л.М. Елементи дослідження операцій і оцінка ефективності сил і засобів противовоздушой оборони. – К.: КВИРТУ, 1968. – 444 с.

3. Чуев Ю.В. Дослідження операцій у військовій справі. – М.: Воениздат, 1970. – 256 с.

4. Довідник по дослідженню операцій / Під общ. ред. Ф.А. Матвейчука. – М.: Воениздат, 1979. –368 с.

5. Кононов В.Б. Математические модели задач оптимизации состава однородных боевых средств противодействующих группировок // Системи обробки інформації. – 2007. – Вип 1 (59). – С. 60-63.

Надійшла до редколегії 16.02.2007

Рецензент: д-р техн. наук проф. Є.А. Артеменко, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.