

УДК 53.072.533.6.072

В.П. Котлярів

Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України, Київ

## АНАЛІЗ АВТОКОЛИВАЛЬНОГО РУХУ В НЕЛІНІЙНІЙ ДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

У статті проведено аналітичне дослідження складного просторового руху літака, який виникає на великих кутах атаки. Наведений алгоритм дозволяє довести до аналітичного розв'язку розв'язок одночастотного автоколивального руху в нелінійній системі вищого порядку.

**Ключові слова:** автоколивальний рух, кут атаки, літальний апарат.

### Вступ

Тип руху, який розглядається у даній статті, виникає в нелінійній динамічній системі четвертого порядку. У практиці такий рух відповідає просторовому руху літального апарату на великих кутах атаки, який є найменш дослідженим. І в цьому плані аналітичний аналіз автоколивального одночастотного руху є актуальним завданням.

Зазначимо й практичну мету дослідження, яке буде спрямовано на одержання аналітичних залежностей в нелінійній системі, які пов'язують різні групи аеродинамічних коефіцієнтів з динамічними параметрами процесу.

Розглянемо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\beta} + \omega_1^2 \Delta\beta + A_{1\omega_z} \Delta\omega_z &= M_{x,y}^{\dot{\beta}} \Delta\dot{\beta} + M_{x,y}^{\beta^3} \Delta\dot{\beta}^3; \\ A_{2\beta} \Delta\beta + \Delta\ddot{\omega}_z + \omega_2^2 \Delta\omega_z &= M_z^{\omega_z} \Delta\dot{\omega}_z - \overline{M}_{x,y}^{\beta^3} \Delta\dot{\beta}^3, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $M_{x,y}^{\dot{\beta}} = C_1 m_x^{\dot{\beta}} \sin \delta_d + B_1 m_y^{\dot{\beta}} \cos \delta_d$ ;

$$M_{x,y}^{\beta^3} = C_1 m_x^{\beta^3} \sin \delta_d + B_1 m_y^{\beta^3} \cos \delta_d;$$

$$M_z^{\omega_z} = A_1 k_1 m_z^{\omega_z}; \quad \overline{M}_{x,y}^{\beta^3} = -\lambda_{\delta} M_{x,y}^{\beta^3}.$$

Таким чином, на відміну від попередніх досліджень, наприклад в [1], у виразі (1) введено додаткові нелінійні складові  $M_{x,y}^{\dot{\beta}^3}$ ;  $\overline{M}_{x,y}^{\beta^3}$ , які й визначають особливості автоколивального характеру руху.

### Основний матеріал

Проведемо, перед усім, розрахунки перехідного процесу в системі (1) за наступних, наприклад, початкових умов і значеннях параметрів:

$$\Delta\beta_H = -0,2; \quad \Delta\omega_{zH} = 0,4 \text{ c}^{-1}; \quad M_{x,y}^{\dot{\beta}^3} = -10 \text{ c};$$

$$\overline{M}_{x,y}^{\beta^3} = -10; \quad \Delta\dot{\beta}_H = 0; \quad \Delta\dot{\omega}_{zH} = 0.$$

$$\omega_1^2 = 2,86 \text{ c}^{-2}; \quad \omega_2^2 = 2,17 \text{ c}^{-2}; \quad A_{1\omega_z} = 0,54 \text{ c}^{-1};$$

$$A_{2\beta} = -1,4 \text{ c}^{-3}; \quad M_{x,y}^{\dot{\beta}} = -0,3 \text{ c}^{-1}; \quad M_z^{\omega_z} = -0,45 \text{ c}^{-2}.$$

Графіки отриманого перехідного процесу показано на рис. 1. З рис. 1 бачимо, що перехідний про-

цес у системі (1) спочатку ( $t < 7\text{c}$ ) має згасаючий характер з частотою  $\omega = 1,59 \text{ c}^{-1}$ , однак потім амплітуди параметрів  $\Delta\beta$  і  $\Delta\omega_z$  поступово починають збільшуватися до значень  $\Delta\beta = 0,176$  і  $\Delta\omega_z = 0,433 \text{ c}^{-1}$  за  $t = 20\text{c}$ , після чого в системі настають одночастотні ( $\omega = 1,612 \text{ c}^{-1}$ ) автоколивання з частотою кореня, що має декремент коливання більше нуля.

Проведемо тепер розрахунок параметрів автоколивань, використовуючи асимптотичний метод. У цьому випадку відповідно до зовнішнього вигляду перехідного процесу (рис. 1), який має одночастотний характер, шукатимемо породжувальні розв'язання системи (1) у вигляді одночастотних коливань:

$$\begin{aligned} \Delta\beta &= a(t) \cos \psi_1(t) = a(t) \cos(\omega t + \phi_1); \\ \Delta\omega_z &= b(t) \cos \psi_2(t) = b(t) \cos(\omega t + \phi_2), \end{aligned} \quad (2)$$

де амплітуди та фази коливань є повільними функціями часу.

Після цього, систему (1) перепишемо в іншому вигляді, вводячи під величину малого параметра складові  $M_{x,y}^{\dot{\beta}^3}$ ;  $\overline{M}_{x,y}^{\beta^3}$ ;  $M_{x,y}^{\dot{\beta}}$ ;  $M_z^{\omega_z}$ ;  $A_{1\omega_z}$ ;  $A_{2\beta}$ . У результаті одержимо:

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\beta} + \omega_1^2 \Delta\beta &= \mu \left( -A_{1\omega_z} \Delta\omega_z + M_{x,y}^{\dot{\beta}} \Delta\dot{\beta} + M_{x,y}^{\beta^3} \Delta\dot{\beta}^3 \right); \\ \Delta\ddot{\omega}_z + \omega_2^2 \Delta\omega_z &= \mu \left( -A_{2\beta} \Delta\beta + M_z^{\omega_z} \Delta\dot{\omega}_z - \overline{M}_{x,y}^{\beta^3} \Delta\dot{\beta}^3 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Підставляючи в рівняння (3) числові значення параметрів, маємо:

$$\begin{aligned} \Delta\ddot{\beta} + 2,86 \Delta\beta &= \mu \left( -0,54 \Delta\omega_z - 0,3 \Delta\dot{\beta} - 10 \Delta\dot{\beta}^3 \right); \\ \Delta\ddot{\omega}_z + 2,17 \Delta\omega_z &= \mu \left( 1,4 \Delta\beta - 0,45 \Delta\dot{\omega}_z + 10 \Delta\dot{\beta}^3 \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) відноситься до класу так званих систем, які не мають явно вираженого фізично малого параметра, через те що величини, які стоять у дужках перед фазовими координатами  $\Delta\beta$  та  $\Delta\omega_z$  порівняльні (мають один і той же порядок) з частотами коливальних контурів  $\omega_1$  і  $\omega_2$  ( $\omega_1 = 1,69 \text{ c}^{-1}$ ;

$\omega_2=1,47c^{-1}$ ). Однак гіпотеза пошукового розв'язання у вигляді (2) зумовлює необхідність розгляду систе-

ми у формі (4) з наступним розрахунком можливих розв'язань (2).

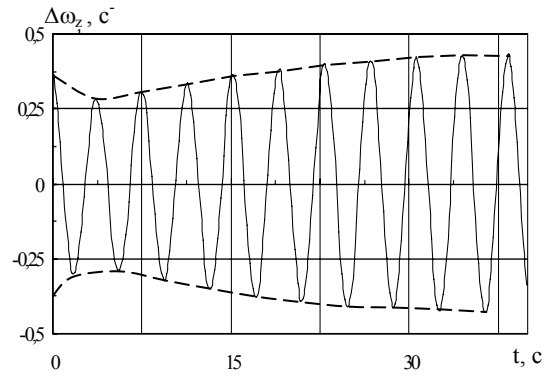
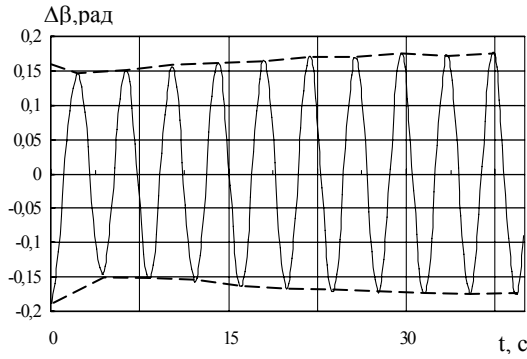


Рис. 1. Графіки перехідного процесу

Таким чином, розв'язання системи (4) шукаємо за допомогою асимптотичного методу, викладеного в [2].

На основі зазначеного методу для визначення  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $\phi_1(t)$ ,  $\phi_2(t)$  одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \mu \left( \frac{\omega}{2\omega_1} M_{x,y}^{\beta} a + \frac{3\omega^3}{8\omega_1} M_{x,y}^{\beta^3} a^3 - \frac{b}{2\omega_1} A_{1\omega_z} \sin \eta \right); \\ \dot{b} &= \mu \left( \frac{\omega}{2\omega_2} M_z^{\omega_z} b + \frac{3\omega^3}{8\omega_2} M_{x,y}^{\beta^3} a^3 \cos \eta + \frac{a}{2\omega_2} A_{2\beta} \sin \eta \right); \quad (5) \\ \dot{\phi}_1 &= \omega_1 - \omega + \frac{\mu b}{2a\omega_1} A_{1\omega_z} \cos \eta; \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 - \omega - \frac{\mu 3\omega^3 a^3}{8\omega_2 b} M_{x,y}^{\beta^3} \sin \eta + \frac{\mu a}{2b\omega_2} A_{1\omega_z} \cos \eta; \\ \eta(t) &= \phi_2(t) - \phi_1(t). \quad (6) \end{aligned}$$

Зробимо дослідження можливих стаціонарних періодичних режимів пов'язаних коливань та їхньої стійкості. Для їх визначення, як завжди, одержуємо:

$$\begin{aligned} a_{\delta} &= \text{const}; \quad b_{\delta} = \text{const}; \quad \eta_{\delta} = \text{const}; \\ (\dot{a} &= 0, \quad \dot{b} = 0, \quad \dot{\eta} = 0). \end{aligned}$$

На основі цих умов одержимо систему рівнянь

$$\begin{aligned} K_1^a a + K_2^a a^3 + K_4^a b \sin \eta &= 0; \\ N_1^b b + N_2^b a^3 \cos \eta + N_3^b a \sin \eta &= 0; \quad (7) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} K_a^a &= -K_1^a - 3K_2^a a^2; \quad K_b^a = -K_4^a \sin \eta; \quad K_{\eta}^a = -K_4^a b \cos \eta; \\ N_b^b &= -N_1^b; \quad N_a^b = -3N_2^b a^2 \cos \eta - N_3^b \sin \eta; \quad N_{\eta}^b = N_2^b a^3 \sin \eta - N_3^b a \cos \eta; \\ L_{\eta}^a &= L_1^a a b^{-1} \sin \eta + L_2^a b a^{-1} \sin \eta - L_3^a a^3 b^{-1} \cos \eta; \\ L_a^a &= (\omega_1 - \omega_2) a^{-1} - 2L_1^a b^{-1} \cos \eta - 4L_3^a a b^{-1} \sin \eta; \\ L_b^a &= (\omega_1 - \omega_2) b^{-1} - 2L_2^a b^{-1} \cos \eta a^{-1}. \end{aligned}$$

Для стійкого стаціонарного режиму, відповідно до критерію Рауса – Гурвіца, необхідно та достатньо

$$\omega_2 - \omega_1 + L_1^{\eta} \frac{a}{b} \cos \eta + L_2^{\eta} \frac{b}{a} \cos \eta + L_3^{\eta} \frac{a^3}{b} \sin \eta = 0,$$

де

$$\begin{aligned} K_1^a &= \frac{\omega}{2\omega_1} M_{x,y}^{\beta}; \quad K_2^a = \frac{3\omega^3}{8\omega_1} M_{x,y}^{\beta}; \quad K_4^a = -\frac{A_{1\omega_z}}{2\omega_1}; \\ N_1^b &= \frac{\omega}{2\omega_2} M_z^{\omega_z}; \quad N_2^b = \frac{3\omega^3}{8\omega_2} M_{x,y}^{\beta^3}; \quad N_3^b = \frac{A_{2\beta}}{2\omega_2}; \quad (8) \\ L_1^{\eta} &= \frac{A_{2\beta}}{2\omega_2}; \quad L_2^{\eta} = \frac{A_{1\omega_z}}{2\omega_1}; \quad L_3^{\eta} = \frac{3\omega^3}{8\omega_2} M_{x,y}^{\beta^3}. \end{aligned}$$

У рівняннях (7) і далі за текстом з метою скорочення записів індекси у стаціонарних значень амплітуди та зсуви фаз опущені.

Стаціонарні періодичні режими, які визначаються з рівнянь (7), будуть практично здійснені лише в тому разі, якщо вони асимптотично стійкі. Для дослідження їхньої стійкості складаємо систему рівнянь у варіаціях, відповідну системі (6), з врахуванням рівнянь (7). Потім для системи рівнянь у варіаціях записуємо характеристичне рівняння та досліджуємо його корені на основі критерію Рауса – Гурвіца.

Зважаючи на пророблені операції, характеристичне рівняння приводиться до вигляду

$$\begin{aligned} p^3 + \mu (K_a^a + N_b^b + L_{\eta}^{\eta}) p^2 + \mu^2 (K_a^a N_b^b + N_b^b L_{\eta}^{\eta} + K_{\eta}^a L_{\eta}^{\eta} - \\ - L_{\eta}^b N_{\eta}^b - K_b^a N_a^b - K_{\eta}^a L_a^a) p + \mu^3 [K_a^a (N_b^b L_{\eta}^{\eta} - L_{\eta}^b N_{\eta}^b) - \\ - K_b^a (N_a^b L_{\eta}^{\eta} - L_a^a N_{\eta}^b) + K_{\eta}^a (N_a^b L_b^b - L_a^a N_b^b)] = 0, \quad (9) \end{aligned}$$

виконання умов

$$M_1 > 0; \quad M_2 > 0; \quad M_3 > 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
\text{де} \quad M_1 &= K_a^a + N_b^b + L_\eta^\eta; \\
M_2 &= K_a^a (N_b^b L_\eta^\eta - L_b^\eta N_\eta^b) - K_b^b (N_a^a L_\eta^\eta - L_a^\eta N_\eta^a) + K_\eta^\eta (N_b^b L_a^\eta - L_a^\eta N_b^b); \\
M_3 &= (K_a^a + N_b^b + L_\eta^\eta) (K_a^a N_b^b + N_b^b L_\eta^\eta + K_a^a L_\eta^\eta - L_b^\eta N_\eta^b - K_b^b N_a^a - \\
&- K_\eta^\eta L_a^\eta) - [K_a^a (N_b^b L_\eta^\eta - L_b^\eta N_\eta^b) - K_b^b (N_a^a L_\eta^\eta - L_a^\eta N_\eta^a) + \\
&+ K_\eta^\eta (N_b^b L_a^\eta - L_a^\eta N_b^b)].
\end{aligned}$$

Після підставлення числових значень коефіцієнтів  $M_{x,y}^{\beta^3}$ ;  $\overline{M}_{x,y}^{\beta^3}$ ;  $M_{x,y}^{\dot{\beta}}$ ;  $M_z^{\overline{\omega z}}$ ;  $A_{1\omega z}$ ;  $A_{2\beta}$  у залежності (8) та визначення з цих залежностей числових значень складових  $K_1^a$ ;  $K_2^a$ ;  $K_4^a$ ;  $N_1^b$ ;  $N_2^b$ ;  $N_3^b$ ;  $L_1^\eta$ ;  $L_2^\eta$ ;  $L_3^\eta$  з врахуванням величин  $\omega_1$  и  $\omega_2$  рівняння (7) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned}
-0,095a - 9,153a^3 - 0,160b \sin \eta &= 0; \\
-0,164b + 10,675a^3 \cos \eta - 0,475a \sin \eta &= 0; \\
-10,491 \frac{a^3}{b} \sin \eta - 0,475 \frac{a}{b} \cos \eta - 0,160 \frac{b}{a} \cos \eta &= 0,217.
\end{aligned} \quad (11)$$

Із системи (11) графічним способом знаходимо стаціонарні значення  $a$ ,  $b$ ,  $\eta$ , які в цьому випадку приймають значення

$$a = 0,174; b = 0,434c^{-1}; \eta = -98,397^\circ. \quad (12)$$

Перевіряючи одержане значення (12) на стійкість за умовами (10), одержимо

$$M_1 = 1,669 c^{-1}; M_2 = 0,0478 c^{-2}; M_3 = 1,154 c^{-3}. \quad (13)$$

Враховуючи, що всі величини виразу (13) позитивні, рух зі стаціонарними значеннями (12) буде стійким. Необхідно також підкреслити, що одержані розрахункові значення (12) співпадають з графіками, які зображеними на рис. 1 за  $t > 20c$  ( $a_{\text{граф}} = 0,176$ ;  $b_{\text{граф}} = 0,433 c^{-1}$ ;  $\eta_{\text{граф}} = -95,492^\circ$ ), тобто рух у динамічній системі вигляду (4) протягом часу асимптотично прямуватиме до руху із стаціонарними параметрами, розрахунок яких може бути проведено за алгоритмом, наведеними вище.

#### АНАЛИЗ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОГО РУХА В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В.П. Котляров

*В статье проведено аналитическое исследование сложного пространственного движения самолета, которое возникает на больших углах атаки. Приведенный алгоритм позволяет довести до аналитического решения решение одночастотного автоколебательного движения в нелинейной системе высшего порядка.*

**Ключевые слова:** автоколебательное движение, угол атаки, летательный аппарат.

#### AN ANALYSIS OF AUTOSWAYING RUH IS IN NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM OF FOURTH ORDER

V.P. Kotlyarov

*Analytical research of difficult spatial motion of airplane, which arises up on the large corners of attack, is conducted in the article. The resulted algorithm allows to take to the analytical decision the decision of одночастотного autoswaying motion in the nonlinear system of higher order.*

**Keywords:** autoswaying motion, corner of attack, aircraft.

#### ВИСНОВКИ

**Таким чином,** наведений алгоритм дозволяє довести до аналітичного розв'язку розв'язок одночастотного автоколебального руху в нелінійній системі вищого порядку.

Особливу цінність у ньому являють собою аналітичні вирази (7), які пов'язують з параметрами польоту нелінійні величини кубічного порядку  $M_{x,y}^{\beta^3}$  (за характером – типові нелінійні гістерезисні залежності  $S$  – образного типу). Підставляючи в ці вирази величини амплітуд  $a$  та  $b$ , а також зсуву фаз  $\eta$ , вдається із записів льотних експериментів провести розрахунок значень  $M_{x,y}^{\beta^3}$ , які неможливо визначити під час продувок моделей літаків в аеродинамічних трубах.

**Подальшим напрямком** досліджень слід вважати аналіз двочастотного руху на великих кутах атаки.

#### Список літератури

1. Котляров В.П., До проблем штопора: аналітичні особливості дослідження руху літального апарату на великих кутах атаки / В.П. Котляров // Наука і оборона. – К., 1998. – № 2. – С. 62-64.
2. Рубаник В.П., Колебательная квазилинейная система с запаздыванием / В.П. Рубаник. – М.: Наука, 1969. – 290 с.

Надійшла до редколегії 12.02.2009

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. А.В. Кудиненко, Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України, Київ.