УДК 629.78

М.Ю. Ракушев, А.А. Завада, С.В. Ковбасюк, В.Й. Болотніков

Житомирський військовий інститут ім. С.П. Корольова НАУ, Житомир

ПРОГНОЗУВАННЯ РУХУ КОСМІЧНОГО АПАРАТА У ГРИНВІЦЬКИЙ ПРЯМОКУТНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ МЕТОДОМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ТЕЙЛОРІВСЬКИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Запропонована числово-аналітична обчислювальна схема інтегрування диференціального рівняння руху космічного апарату у гринвіцький прямокутній системі координат, яка розроблена на основі диференціально-тейлорівських перетворень. В моделі руху космічного апарату враховані збурення від центрального поля до 8×8 гармонік розкладу геопотенціалу Землі в ряд за сферичними функціями та сила аеродинамічного опору атмосфери при статичній моделі густини атмосфери. Проведено порівняння за точністю прогнозування руху космічного апарату з штатними вітчизняними програмними комплексами балістико-навігаційного забезпечення польотів космічних апаратів.

Ключові слова: *космічний апарат, балістико-навігаційне забезпечення, диференціально-тейлорівські перетворення.*

Вступ

Центральне місце у технологічній послідовності вирішення задач балістико-навігаційного забезпечення (БНЗ) польотів космічних апаратів (КА) займає задача прогнозування руху КА, що є складовою частиною процесів планування цільового застосування КА, розрахунку сеансів зв’язку, навігації наземних (повітряних, морських) об’єктів, оцінювання загальної космічної обстановки тощо. Безпосередньо рішення задачі прогнозування руху КА проводиться у вигляді закінченої процедури на ЕОМ, в якій на основі обраного методу інтегрування звичайних диференціальних рівнянь реалізована обчислювальна схема розв’язку диференціального рівняння руху КА [1].

Наявність процедури прогнозування руху КА має також важливе значення при проведенні деяких наукових досліджень, наприклад, при розробці та оцінюванні ефективності нових методів обробки вимірювальної інформації від засобів контролю космічного простору. Процедура прогнозування руху КА, є невід’ємною складовою частиною програмних комплексів БНЗ які використовується, у вітчизняних установах, наприклад, Національному центру управління та випробувань космічних засобів. Однак зазначені програмні комплекси БНЗ, є комерційною власністю і тому їх використання при проведенні наукових досліджень, можливо лише в якості "чорної скриньки", що не завжди задовольняє дослідників. Прикладом зазначеного програмного комплексу є програмний комплекс БНЗ "Навігатор" [2]. Додатково, слід зазначити, що актуальним залишається питання розробки нових підходів до розробки обчислювальних схем для прогнозування руху КА, які б за окремими показниками переважали б традиційні обчислювальні схеми.

Аналіз останніх досліджень. На даний час у вітчизняній практиці БНЗ найбільше розповсюдження для прогнозування руху КА отримав числовий кінцево-різницевий метод Адамса 7-го порядку, що використовується за екстраполяційно-інтерполяційною схемою, розгін якого проводиться методом Рунге-Кутта 4-го порядку [1, 2].

Якщо розглянути останні дослідження щодо впровадження інших методів інтегрування звичайних диференціальних рівнянь у практику БНЗ, то можна зазначити, що одним з перспективних є метод диференціально-тейлорівських (ДТ) перетворень [3, 4]. Основною особливістю ДТ-перетворень як математичного методу є реалізація рекурентного, методично простого (числово-аналітичного) визначення членів ряду Тейлора будь-якого порядку (або, що теж саме - визначення будь-якої вищої похідної від заданої функції) при відсутності методичних похибок [5]. Треба відзначити, що розрахунок похідних від функції за допомогою, наприклад, кінцево-різницевого методу неминуче вносить методичну похибку [6]. У цілому можна зазначити, що метод ДТ-перетворень при прогнозуванні руху КА дозволяє розробляти обчислювальні схеми які відносяться до однокрокових числово-аналітичних обчислювальних схем, що використовують значення вищих похідних [6].

У роботі [3] доведена можливість використання методу ДТ-перетворень для короткострокового (до одного витка) прогнозування руху КА у гринвіцький прямокутній системі координат (ГСК) з врахуванням у моделі руху КА збурень від 2-ї та 4-ї зональних гармонік розкладу геопотенціалу у ряд за сферичними функціями (поле 4×0). Однак для проведення довгострокового прогнозування руху КА така модель непридатна, через неповноту врахування збурюючих факторів. Таким чином актуальним є проведення досліджень, щодо розробки обчислювальної схеми для прогнозуванні руху КА, яка розроблена на основі ДТ-перетворень та більш повно враховує збурюючи фактори, що діють на КА у польоті.

Формулювання цілей статті. Метою статті є розробка числово-аналітичної обчислювальної схеми для проведення довгострокового прогнозування руху КА на основі методу диференціально-тейлорівських перетворень. У схемі необхідно врахувати збурення від несферичності Землі та аномалій сили тяжіння для розкладу геопотенціалу у ряд за сферичними функціями (поле до 8×8 гармонік), а також сили аеродинамічного опору атмосфери для її статичної моделі (ГОСТ-4401-64).

Виклад основного матеріалу

ДТ-перетворення – це операційний метод академіка НАН України Г.Є. Пухова, який заснований на переведенні оригіналів в область зображень за допомогою операції диференціювання. ДТ-перетвореннями називають функціональні перетворення вигляду [5]:

$$Z(k)=\frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k z(t)}{dt^k}\right]_{t_*}; \qquad (1)$$

$$z(t)\approx\sum_{k=0}^{k_{max}}\left(\frac{t-t_*}{H}\right)^k Z(k), \qquad (2)$$

де t – аргумент, за яким проводиться перетворення; t_* – значення аргументу, при якому проводиться перетворення; H – відрізок аргументу, на якому розглядається функція $z(t)$; k – цілочисловий аргумент $k=0, 1,\ldots$; $Z(k)$ – дискретна функція за аргументом k; k_{max} – максимальний номер врахованої при відновленні Т-дискрети.

Вираз (1) визначає пряме перетворення, що дозволяє за оригіналом $z(t)$ знайти ДТ-зображення $Z(k)$. Обернене перетворення, що відновлює оригінал $z(t)$ у вигляді часткової суми відрізку ряду Тейлора, визначається виразом (2). Множину значень $Z(k)$ прийнято називати ДТ-спектром, а значення функції $Z(k)$ при конкретних значеннях аргументу k – дискретами ДТ-спектру або Т-дискретами.

Проведення розрахунку (моделювання) з використанням ДТ-перетворень проводиться в три етапи (класичні для будь-якого операційного методу): пряме перетворення – це перехід з області оригіналів в область зображень; проведення в області диференціальних спектрів необхідних викладок; обернене перетворення – відновлення отриманого спектру в області оригіналів. При розв’язку ряду задач, в тому числі такої, що розглядається, перші два етапи поєднуються в один.

Запишемо модель руху КА для довгострокового прогнозування руху КА. Зазначена модель у ГСК має вигляд [1]:

$$\begin{cases}\dot v_x=g_r\dfrac{x}{r}-g_\lambda\sin\lambda+\Omega_0^2x+2\Omega_0 v_y-S_b\rho v^2 v_x;\\ \dot v_y=g_r\dfrac{y}{r}+g_\lambda\cos\lambda+\Omega_0^2y-2\Omega_0 v_x-S_b\rho v^2 v_y;\\ \dot v_z=g_r\dfrac{z}{r}+g_\Omega-S_b\rho v^2 v_z;\\ \dot x=v_x,\quad \dot y=v_y,\quad \dot z=v_z;\end{cases} \qquad (3)$$

$$g_r=b_r-b_\varphi \mathrm{tg}\varphi;\quad g_\Omega=\frac{b_\varphi}{\cos\varphi};\quad g_\lambda=b_\lambda; \qquad (4)$$

$$b_r=\frac{\partial U_n}{\partial r}=-\frac{\mu_0}{r^2}\left(1+\sum_{n=2}^{N}(n+1)C_{n0}\left(\frac{R_0}{r}\right)^n\times\right.$$
$$\times P_n(\sin\varphi)+\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}(n+1)\left(\frac{R_0}{r}\right)^n P_n^m(\sin\varphi)\times \qquad (5)$$
$$\left.\times\left[C_{nm}\cos(m\lambda)+d_{nm}\sin(m\lambda)\right]\right);$$

$$b_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial U_n}{\partial\varphi}=\frac{\mu_0}{r^2}\left(\sum_{n=2}^{N}C_{n0}\left(\frac{R_0}{r}\right)^n P_n'(\sin\varphi)\times\right.$$
$$\times\cos\varphi+\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}\left(\frac{R_0}{r}\right)^n P_n^{m/}(\sin\varphi)\cos\varphi\times \qquad (6)$$
$$\left.\times\left[C_{nm}\cos(m\lambda)+d_{nm}\sin(m\lambda)\right]\right);$$

$$b_\lambda=\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial U_n}{\partial\lambda}=$$
$$=\frac{\mu_0}{r^2}\sum_{n=2}^{N}\sum_{m=1}^{n}m\left(\frac{R_0}{r}\right)^n\frac{P_n^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}\times \qquad (7)$$
$$\times\left[-C_{nm}\sin(m\lambda)+d_{nm}\cos(m\lambda)\right];$$

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r};\quad \sin\varphi=\frac{z}{r};\quad \mathrm{tg}\,\varphi=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad (8)$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\quad v=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}; \qquad (9)$$

$$P_n(\sin\varphi)=\frac{1}{n}\left[-(n-1)P_{n-2}(\sin\varphi)+\right.$$
$$\left.+(2n-1)\sin\varphi P_{n-1}(\sin\varphi)\right]; \qquad (10)$$

$$P_0(\sin\varphi)=1;\quad P_1(\sin\varphi)=\sin\varphi; \qquad (11)$$

$$\frac{P_m^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}=(2m-1)\cos\varphi\frac{P_{m-1}^{m-1}(\sin\kappa)}{\cos\varphi};$$
$$\frac{P_1^1(\sin\varphi)}{\cos\varphi}=1; \qquad (12)$$

$$\frac{P_n^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}=\frac{1}{n-m}\left[-(n+m-1)\frac{P_{n-2}^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}+\right.$$
$$\left.+(2n-1)\sin\varphi\frac{P_{n-1}^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}\right]; \qquad (13)$$

$$P_n'\left(\sin\varphi\right)=\sin\varphi P_{n-1}'\left(\sin\varphi\right)+nP_{n-1}\left(\sin\varphi\right);\quad P_1'\left(\sin\varphi\right)=1; \tag{14}$$

$$P_n^{m/}\left(\sin\varphi\right)\cos\varphi=\left(n+1\right)\sin\varphi\frac{P_n^m\left(\sin\varphi\right)}{\cos\varphi}-\left(n+m-1\right)\frac{P_{n+1}^m\left(\sin\varphi\right)}{\cos\varphi}; \tag{15}$$

$$\cos\lambda=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \cos\left(m\lambda\right)=\cos\left[\left(m-1\right)\lambda\right]\cos\lambda-\sin\left[\left(m-1\right)\lambda\right]\sin\lambda; \tag{16}$$

$$\sin\lambda=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \sin\left(m\lambda\right)=\sin\left[\left(m-1\right)\lambda\right]\cos\lambda+\cos\left[\left(m-1\right)\lambda\right]\sin\lambda; \tag{17}$$

$$\rho=A_i\exp\left[k_{1i}\left(h-h_i\right)^2-k_{2i}\left(h-h_i\right)\right];\quad h=r-\frac{\bar{a}_3\sqrt{1-\bar{e}_3^2}}{\sqrt{1-\bar{e}_3^2\cos^2\varphi}}, \tag{18}$$

де x, y, z v_x, v_y, v_z – координати та проекції вектора швидкості КА у ГСК відповідно; U_n – потенціал (силова функція) Земного притягання; g_r, g_λ, g_Ω, b_r, b_φ, b_λ – допоміжні позначення (відповідні прискорення КА у ГСК); Ω_0 = = 0,7292115805·10^{-4} рад/с – кутова швидкість обертання Землі навколо власної вісі; μ_0 = 3,986·10^5 км^3/с^2 – гравітаційний параметр Землі; R_0 = = 6378,388 км – середній екваторіальний радіус Землі; v – модуль вектора швидкості КА у ГСК; r, φ, λ – геоцентричний радіус, широта та довгота КА у ГСК; $P_n\left(\sin\varphi\right)$, $P_n'\left(\sin\varphi\right)$, $P_n^m\left(\sin\varphi\right)$, $P_n^{m/}\left(\sin\varphi\right)$ – поліноми Лежандра, їх похідні та приєднані сферичні функції і їх похідні відповідно; N – номер старшого члена ряду розкладу геопотенціалу у ряд за сферичними функціями (для поля до $N\times N$ гармонік); C_{n0}, C_{nm}, d_{nm} – безрозмірні сталі, що характеризують форму та гравітаційне поле Землі; S_b – балістичний коефіцієнт; h – висота над поверхнею Землі КА у ГСК; $\bar{a}_3$ = 6378,136 км – велика піввісь загального земного еліпсоїду; $\bar{e}_3$ = = 0,081819221 – перший ексцентриситет загального земного еліпсоїду; ρ – густина повітря; h_i, A_i, k_{1i}, k_{2i} – сталі, що характеризують густину повітря для i -го слою.

У вищенаведеній моделі руху КА (3) – (18) використана:

модель гравітаційного поля Землі, яка враховує полярне стиснення Землі та поле $N\times N$ гармонік розкладу в ряд за сферичними функціями (4) – (7) [1];

статична модель атмосфери у відповідності з ГОСТ-4401-64 – залежність (18) [1].

Для безпосереднього визначення моделі руху КА (3) – (18) необхідно задати номери гармонік, що враховуються у гравітаційному полі Землі – $N\times N$. У вітчизняній практиці БНЗ найбільше поширення має модель поля до 8×8 гармонік [2].

Прогнозування руху КА проводиться шляхом інтегрування диференціального рівняння руху КА (3)-(18). Для побудови обчислювальної схеми для прогнозування руху КА методом ДТ-перетворень (аналогічно числовим кінцево-різницевим методам інтегрування) необхідно ввести на часовому інтервалі прогнозу $T\in\left[t_{початку}=t_0,t_{кінця}\right]$ сітку ω_i з кроком $H_i=t_{i+1}-t_i$ і вузлами $t_i\in\omega_i$ [6], та задати початкові умови (ПУ) руху КА

$$x\left(t_0\right)=x_0;\ y\left(t_0\right)=y_0;\ z\left(t_0\right)=z_0;$$

$$v_x\left(t_0\right)=v_{x0};\ v_y\left(t_0\right)=v_{y0};\ v_z\left(t_0\right)=v_{z0}. \tag{19}$$

Розглянемо етапи розв'язку задачі побудова обчислювальної схеми прогнозування руху КА методом ДТ-перетворень.

1. Пряме перетворення – перехід з області оригіналів, спираючись на властивості ДТ-перетворень, в область зображень (розрахунок відповідного ДТ-спектру), тобто застосування на сітці ω_i до (3) – (18) перетворення (1)

$$\begin{cases}
X\left(0\right)=x\left(t_i\right);\ Y\left(0\right)=y\left(t_i\right);\ Z\left(0\right)=z\left(t_i\right);\\
V_x\left(0\right)=v_x\left(t_i\right);\ V_y\left(0\right)=v_y\left(t_i\right);\ V_z\left(0\right)=v_z\left(t_i\right);\\
H_i=t_{i+1}t_i;\qquad V_x\left(k+1\right)=\dfrac{H_i}{k+1}\times\\
\times\left[G_r\left(k\right)*\left|\dfrac{X\left(k\right)}{R\left(k\right)}\right|-G_\lambda\left(k\right)*S_\lambda\left(k\right)+\Omega_0^2X\left(k\right)+\right.\\
\left.+2\Omega_0V_y\left(k\right)-S_b\rho\left(k\right)*V^2\left(k\right)*V_x\left(k\right)\right];\\
V_y\left(k+1\right)=\dfrac{H_i}{k+1}\times\\
\times\left[G_r\left(k\right)*\left|\dfrac{X\left(k\right)}{R\left(k\right)}\right|+G_\lambda\left(k\right)*C_\lambda\left(k\right)+\Omega_0^2Y\left(k\right)-\right.\\
\left.-2\Omega_0V_x\left(k\right)-S_b\rho\left(k\right)*V^2\left(k\right)*V_y\left(k\right)\right];\\
V_z\left(k+1\right)=\dfrac{H_i}{k+1}\left[G_r\left(k\right)*\left|\dfrac{X\left(k\right)}{R\left(k\right)}\right|+G_\Omega\left(k\right)-\right.\\
\left.-S_b\rho\left(k\right)*V^2\left(k\right)*V_z\left(k\right)\right];\\
X\left(k+1\right)=\dfrac{H_i}{k+1}V_x\left(k\right);\quad Y\left(k+1\right)=\dfrac{H_i}{k+1}V_y\left(k\right);\\
Z\left(k+1\right)=\dfrac{H_i}{k+1}V_z\left(k\right);
\end{cases} \tag{20}$$

$$G_r(k) = B_r(k) - B_\varphi(k) * T_\varphi(k);$$
$$G_\Omega(k) = \left|\frac{B_\varphi(k)}{C_\varphi(k)}\right|; \quad (21)$$

$$B_r(k) = \left|\frac{\mu_0 ъ(k)}{R^2(k)}\right| * \Big(ъ(k) + \sum_{n=2}^{N} (n+1) C_{n0} R_r^{\underline{n}}(k) \times$$
$$\times P_n(k) + \sum_{n=2}^{N} \sum_{m=1}^{n} (n+1) R_r^{\underline{n}}(k) * P_n^m(k) \times \quad (22)$$
$$\times C(k) * \left[C_{nm} C_{m\lambda}(k) + d_{nm} S_{m\lambda}(k) \right]\Big);$$

$$B_\varphi(k) = \left|\frac{\mu_0 ъ(k)}{R^2(k)}\right| * \Big(\sum_{n=2}^{N} C_{n0} R_r^{\underline{n}}(k) * P_n'(k) +$$
$$+ \sum_{n=2}^{N} \sum_{m=1}^{n} R_r^{\underline{n}}(k) P_n^{m/}(k) \left[C_{nm} C_{m\lambda}(k) + d_{nm} S_{m\lambda}(k) \right]\Big); \quad (23)$$

$$B_\lambda(k) = \left|\frac{\mu_0 ъ(k)}{R^2(k)}\right| * \sum_{n=2}^{N} \sum_{m=1}^{n} m R_r^{\underline{n}}(k) * P_n^m(k) \times \quad (24)$$
$$\times \left[-C_{nm} S_{m\lambda}(k) + d_{nm} C_{m\lambda}(k) \right];$$

$$C_\varphi(k) = \left|\frac{R_{xy}(k)}{R(k)}\right|; \; S_\varphi(k) = \left|\frac{Z(k)}{R(k)}\right|; \quad (25)$$
$$T_\varphi(k) = \left|\frac{Z(k)}{R_{xy}(k)}\right|;$$

$$R_{xy}^{\underline{2}}(k) = X(k) * X(k) + Y(k) * Y(k); \quad (26)$$
$$R_{xy}(k) = R_{xy}^{\underline{2}\,\underline{1/2}}(k);$$

$$R^{\underline{2}}(k) = R_{xy2}(k) + Z(k) * Z(k); \quad (27)$$
$$R(k) = R^{\underline{2}\,\underline{1/2}}(k);$$

$$V^{\underline{2}}(k) = V_x(k) * V_x(k) + V_y(k) * V_y(k) + \quad (28)$$
$$+ V_z(k) * V_z(k); \quad V(k) = V^{\underline{2}\,\underline{1/2}}(k);$$

$$R_r(k) = \left|\frac{R_0 ъ(k)}{R(k)}\right|; \; R_r^{\underline{n}}(k) = R_r^{\underline{n-1}}(k) * R_r(k); \quad (29)$$

$$P_n(k) = \frac{1}{n}\left[-(n-1) P_{n-2}(k) + (2n-1) S_\varphi(k) P_{n-1}(k) \right]; \quad (30)$$

$$P_0(k) = ъ(k); \quad P_1(k) = S_\varphi(k); \quad (31)$$

$$P_m^m(k) = (2m-1) P_{m-1}^{m-1}(k) C_\varphi(k); \; P_1^1(k) = ъ(k); \quad (32)$$

$$P_n^m(k) = \frac{1}{n-m}\left[-(n+m-1) P_{n-2}^m(k) + \right. \quad (33)$$
$$\left. + (2n-1) S_\varphi(k) * P_{n-2}^m(k) \right];$$

$$P_n'(k) = S_\varphi(k) P_{n-1}'(k) + n P_{n-1}(k); \; P_1'(k) = ъ(k); \quad (34)$$

$$P_n^{m/}(k) = (n+1) S_\varphi(k) P_n^m(k) - (n+m-1) P_{n+1}^m(k); \quad (35)$$

$$C_\lambda(k) = \left|\frac{X(k)}{R_{xy}(k)}\right|;$$

$$C_{m\lambda}(k) = C_{(m-1)\lambda}(k) C_\lambda(k) - S_{(m-1)\lambda}(k) S_\lambda(k); \quad (36)$$

$$S_\lambda(k) = \left|\frac{Y(k)}{R_{xy}(k)}\right|; \quad (37)$$
$$S_{m\lambda}(k) = S_{(m-1)\lambda}(k) C_\lambda(k) + C_{(m-1)\lambda}(k) S_\lambda(k);$$

$$D^{\underline{2}}(k) = ъ(k) - \overline{e}_3^2 C_\varphi(k) * C_\varphi(k); \quad (38)$$
$$D(k) = D^{\underline{2}\,\underline{1/2}}(k);$$

$$h(k) = R(k) - \left|\frac{\overline{a}_3 \sqrt{1-\overline{e}_3^2}\, ъ(k)}{D(k)}\right|; \quad (39)$$

$$F(k) = k_{1i}\left[h(k) - h_i \cdot ъ(k) \right] * \left[h(k) - h_i \cdot ъ(k) \right] - \quad (40)$$
$$- k_{2i}\left[h(k) - h_i \cdot ъ(k) \right];$$

$$\rho(k) = A_i \underline{\exp}\left[F(k) \right], \quad (41)$$

де відповідність функцій (оригіналів) та їх ДТ-зображень наведена у табл. 1; $ъ(k) = \begin{cases} 1, \text{при} & k = 0 \\ 0, \text{при} & k > 0 \end{cases}$ – тейлорівська одиниця, "теда"; $*$ – для області ДТ-зображень позначає операцію добутку в області оригіналів, наприклад для оригіналів $w(t) = s(t) \cdot u(t)$;

$S(k) * U(k) = \sum_{l=0}^{k} S(k-1) U(l)$; $|-|$ – для області ДТ-зображень позначає операцію ділення в області оригіналів, наприклад для оригіналів $w(t) = s(t)/u(t)$,

$$W(k) = \left|\frac{S(k)}{U(k)}\right| = \frac{S(k) - \sum_{l=1}^{k} W(k-1) U(l)}{U(0)};$$

$\underline{1/2}$ – для області ДТ-зображень позначає операцію взяття квадратного кореня в області оригіналів, наприклад для оригіналів $w(t) = \sqrt{s(t)}$,

$$W(k) = \begin{cases} \sqrt{S(0)}, \text{при} & k = 0; \\ \dfrac{1}{2} \dfrac{S(k) - \sum_{l=1}^{k-1} W(k-1) S(l)}{W(0)}, \text{при} & k > 0; \end{cases}$$

$\underline{\exp}[\;]$ – для області ДТ-зображень позначає операцію взяття експоненціальної функції в області оригіналів, наприклад, для оригіналів $w(t) = A \exp\left[s(t) \right]$

$$W(k) = \begin{cases} A \exp\left[S(0) \right], \text{при} & k = 0; \\ A \sum_{l=0}^{k1} \dfrac{l+1}{k+1} W(k-l-1) S(l+1), \text{при} & k > 0. \end{cases}$$

Пряме перетворення (20) – (41) являє собою систему рекурентних рівнянь відносно Т-дискет для моделі (3) – (18). Із зазначеної системи можна послідовно визначити значення дискет ДТ-спектру, для $k = 0 \ldots k_{max}$, задаючи величину цілочислового аргументу k починаючи з $k = 0$ до ($k_{max} - 1$) [3 – 5].

2. Обернене перетворення – відновлення отриманого ДТ-спектру в область оригіналів, тобто отримання на сітці ω_i на основі (2) апроксимації траєкторії КА у ГСК у вигляді k_{max} її часткової суми відрізку ряду Тейлора

$$\begin{cases} x\left(t_{i+1}\right) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} X(k); \quad y\left(t_{i+1}\right) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} Y(k); \\ z\left(t_{i+1}\right) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} Z(k); \quad v_x\left(t_{i+1}\right) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} V_x(k); \\ v_y\left(t_{i+1}\right) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} V_y(k); \quad v_z\left(t_{i+1}\right) = \sum\limits_{k=0}^{k_{max}} V_z(k), \end{cases} \qquad (42)$$

де k_{max} – номер старшої ДТ-дискрети, що враховується при відновленні.

Таблиця 1

Відповідність оригіналів з (3) – (18) та позначень для їх ДТ-зображень для (20) – (41)

<table>
<tr><th>№</th><th>Функція</th><th colspan="9">Позначення</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>Оригінал</td><td>$x(t)$</td><td>$y(t)$</td><td>$z(t)$</td><td>$v_x(t)$</td><td>$v_y(t)$</td><td>$v_z(t)$</td><td>$\cos[\varphi(t)]$</td><td>$\sin[\varphi(t)]$</td><td>$tg[\varphi(t)]$</td></tr>
<tr><td>Зображення</td><td>$X(k)$</td><td>$Y(k)$</td><td>$Z(k)$</td><td>$V_x(k)$</td><td>$V_y(k)$</td><td>$V_z(k)$</td><td>$C_\varphi(k)$</td><td>$S_\varphi(k)$</td><td>$T_\varphi(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Оригінал</td><td>$g_r(t)$</td><td>$g_\lambda(t)$</td><td>$g_\Omega(t)$</td><td>$b_r(t)$</td><td>$b_\varphi(t)$</td><td>$b_\lambda(t)$</td><td>$\cos[m\lambda(t)]$</td><td colspan="2">$\sin[m\lambda(t)]$</td></tr>
<tr><td>Зображення</td><td>$G_r(k)$</td><td>$G_\lambda(k)$</td><td>$G_\Omega(k)$</td><td>$B_r(k)$</td><td>$B_\varphi(k)$</td><td>$B_\lambda(k)$</td><td>$C_{m\lambda}(k)$</td><td colspan="2">$S_{m\lambda}(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>Оригінал</td><td>$\left(\frac{R_0}{r}\right)^n$</td><td colspan="2">$P_n(\sin\varphi)$</td><td colspan="2">$\frac{P_n^m(\sin\varphi)}{\cos\varphi}$</td><td colspan="2">$P_n'(\sin\varphi)$</td><td colspan="2">$P_n^{m/}(\sin\varphi)\cos\varphi$</td></tr>
<tr><td>Зображення</td><td>$R_r^n(k)$</td><td colspan="2">$P_n(k)$</td><td colspan="2">$P_n^m(k)$</td><td colspan="2">$P_n'(k)$</td><td colspan="2">$P_n^{m/}(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>Оригінал</td><td colspan="2">$x^2(t)+y^2(t)$</td><td colspan="3">$\sqrt{x^2(t)+y^2(t)}$</td><td>$r^2(t)$</td><td>$r(t)$</td><td>$v^2(t)$</td><td>$v(t)$</td></tr>
<tr><td>Зображення</td><td colspan="2">$R_{xy}^2(k)$</td><td colspan="3">$R_{xy}(k)$</td><td>$R^2(k)$</td><td>$R(k)$</td><td>$V^2(k)$</td><td>$V(k)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>Оригінал</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">$\sqrt{1-\bar{e}_3^2\cos^2[\varphi(t)]}$</td><td>$h(t)$</td><td colspan="3">$k_{1i}[h(t)-h_i]^2 - k_{2i}[h(t)-h_i]$</td><td>$\rho(t)$</td></tr>
<tr><td>Зображення</td><td colspan="2">$D^2(k)$</td><td colspan="2">$D(k)$</td><td>$h(k)$</td><td colspan="3">$F(k)$</td><td>$\rho(k)$</td></tr>
</table>

У цілому пряме та обернене ДТ-перетворення (20) – (42) визначають обчислювальну схему інтегрування диференціального рівняння руху КА у ГСК (3) – (18). Дана схема дозволяє послідовно (починаючи з $i = 0$ при ПУ (19)) провести прогнозування руху КА у ГСК – визначити у вузлах ω_i значення функції, що приймається за наближення значення прогнозованого положення КА.

З метою перевірки працездатності запропонованої числово-аналітичної обчислювальної схеми прогнозування руху КА на основі методу ДТ-перетворень та оцінювання її ефективності для проведення довгострокового прогнозування руху КА (до 14 діб) в середовищі Delphi була розроблена процедура для прогнозування руху КА, що реалізує запропонований підхід. За допомогою розробленої процедури проведено прогнозування руху КА з параметрами орбіти, близькими до вітчизняного КА дистанційного зондування Землі “Січ-1” ($h_{ka} \approx$ 600 км, $e \leq$ 0,01, S_b = 0,06) для моделі (3) – (18) методом ДТ-перетворень за обчислювальною схемою (20) – (42). В моделі руху КА задано поле до 8×8 гармонік розкладу геопотенціалу Землі у ряд за сферичними функціями відповідно до [1], а при врахуванні сили аеродинамічного опору атмосфери використана її статична модель відповідно до ГОСТ-4401-64.

У табл. 2 наведено результати порівняння прогнозування руху КА на основі запропонованої обчислювальної схеми (20) – (42) та за допомогою програми ЕА 100 – “Прогнозування параметрів руху КА“ (ЕА 100 є програмною компонентою штатного програмного комплексу БНЗ “Навігатор“, що використовується в установах Національного центру управління та випробування космічних засобів Національного космічного агентства України) [2]. При прогнозуванні параметрів руху КА крок інтегрування методом Адамса встановлено 100 с.

Характеристики обчислювальної схеми (20)-(43) при отриманні даних для табл. 2 наведено у табл. 3, де k_{max} – максимальний номер Т-дискрети, що враховується при відновленні.

Таблиця 2

Максимальні значення модуля нев'язкі прогнозування руху КА з використанням програмного комплексу БНЗ "Навігатор" та запропонованої обчислювальної схеми (20) – (43)

Модуль нев'язкі	Часовий інтервал прогнозу, діб			
	1	3	7	14
за вектором положення КА, км	0,001605	0,007070	0,010236	0,014339
за вектором швидкості КА, км/с	0,000002	0,000007	0,000100	0,000015

Таблиця 3

Крок обчислювальної схеми (20)-(43) при проведенні прогнозування руху КА (для спрощення обрана рівномірна сітка)

Враховані гармоніки у геопотенціалі (поле до гармонік $N \times N$)	Характеристики обчислювальної схеми (20) – (42)			
	$k_{max} = 4$	$k_{max} = 8$	$k_{max} = 12$	$k_{max} = 20$
2×2; 4×4; 8×8	40 с	400 с	700 с	800 с

Висновки

З наведених у табл. 2 результатів можна зробити висновок про адекватність розробленої моделі збуреного руху КА. Тобто, обчислювальна схема (20) – (42), яка розроблена на основі ДТ-перетворень, дозволяє проводити прогнозування руху КА з точністю, не гіршою за точність штатної моделі збуреного руху КА. Запропонована обчислювальна схема є однокроковою. Відомо, що саме однокрокові схеми є найбільш ефективними при проведенні прогнозування руху КА зі змінним кроком та порядком [6]. Наведені у табл. 3 результати ілюструють можливість варіювання характеристиками запропонованої схеми (20) – (43) – величиною кроку та порядку при прогнозуванні руху КА.

Слід зазначити, що у порівнянні з традиційними числовими методами інтегрування розроблена обчислювальна схема, виходячи з властивостей ДТ-перетворень, дозволяє отримувати не сіткову, а кусково-визначену на підвідрізках між вузлами сітки функцію, що дає змогу проводити прогнозування без прив'язки до заданої сітки (якщо існує така потреба) і не застосовуючи процедури інтерполяції.

Список літератури

1. *Мамон В.А. Баллистическое обеспечение космических польотов / В.А. Мамон, В.И. Половников, С.К. Слезкинский. – Л.: ВИКК им. А.Ф. Можайского, 1990. – 340 с.*
2. *Космический аппарат "Сич-1", Положение по баллистико-навигационному обеспечению полёта космического аппарата // "Сич-1" 39.5072.114 ПЛ. - 9 с.*
3. *Ковбасюк С.В. Прогнозирование неуправляемого движения космического аппарата методом дифференциальных преобразований / С.В. Ковбасюк, М.Ю. Ракушев // Двойные технологии. – 2003. – № 4. – С. 16-20.*
4. *Ковбасюк С.В. Застосування зміщених диференціальних перетворень для розв'язку балістичних задач / С.В. Ковбасюк, М.Ю. Ракушев // Вісник ЖДТУ. Технічні науки. – Житомир, 2006. – № 39 (4). – С. 127-132.*
5. *Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов / Г.Е. Пухов. – К.: Наукова думка, 1986. – 159 с.*
6. *Холл Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Дж. Холл, Дж. Уатт. – М.: Мир, 1979. – 321 с.*

Надійшла до редколегії 20.02.2009

Рецензент: д-р техн. наук, ст. наук. співр. Г.В. Худов, Харківський університет Повітряних Сил ім. І. Кожедуба, Харків.

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПУТИ КОСМИЕСКОГО АППАРАТА В ГРИНВИЧСКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТЕЙЛОРОВСКИХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

М.Ю. Ракушев, А.А. Завада, С.В. Ковбасюк, В.Й. Болотников

Предложена численно-аналитическая вычислительная схема интеграции дифференциального уравнения движения космического аппарата в гринвичской прямоугольной системе координат, которая разработана на основе дифференциально-тейлоровских превращений. В модели движения космического аппарата учтены возмущения от центрального поля до 88 гармоник расписания геопотенциала Земли в ряд по сферическим функциям и сила аэродинамического сопротивления атмосферы при статической модели густоты атмосферы. Проведено сравнение по точности прогнозирования движения космического аппарата со штатными отечественными программными комплексами баллистико-навигационного обеспечения полетов космических аппаратов.

Ключевые слова: *космический аппарат, баллистико-навигационное обеспечение, дифференциально-тейлоровское пробразование.*

PROGNOSTICATION OF WAY SPACE VEHICLE IN GREENWICH RECTANGULAR SYSTEM OF CO-ORDINATES BY METHOD OF DIFFERENTSIAL-TEYLOR OF TRANSFORMATIONS

M.Yu. Rakushev, A.A. Zavada, S.V. Kovbasyuk, V.Yo. Bolotnikov

The numeral-analytical calculable chart of integration of differential equalization of motion of space vehicle is offered in the Greenwich rectangular system of co-ordinates, which is developed on the basis of differentsial-teylor transformations. In the model of motion of space vehicle indignations are taken into account om the central field to 88 accordions of curriculum of geopotential Earth in a row on spherical functions and force of aerodynamic resistance of atmosphere at the static model of density of atmosphere. Comparison is conducted on exactness of prognostication of motion of space vehicle with the regular domestic programmatic complexes of the ballistics-navigation providing of flights of vehicles of spaces.

Keywords: *space vehicle, ballistics-navigation providing, differentsial-teylor transformation.*