УДК 681.324

О.Ю. Гуль[1], В.М. Приходько[2], В.В. Огурцов[3]

[1]Українська державна академія залізничного транспорту, Харків
[2]Науково-дослідний інститут мікрографії, Харків
[3]Харківський Національний економічний університет, Харків

МЕТОД ДЛЯ РІШЕННЯ ЗАДАЧІ РОЗРАХУНКУ МІНІМАЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ РАДІОЛОКАЦІЙНИХ СТАНЦІЙ НА ОСНОВІ РАНГОВОГО ПІДХОДУ

У роботі описаний метод для рішення задачі розрахунку мінімальної кількості радіолокаційних станцій (РЛС) і місць їх розміщення для створення суцільного радіолокаційного поля (РЛП) в умовах протидії противника. Запропонований новий підхід рішення задачі про найменше покриття, що дозволяє підвищити оперативність прийняття рішення на розміщення радіолокаціних станцій в заданому районі.

Ключові слова: *суцільне радіолокаційне поле , ранговий підхід, задача про найменше покриття, теорія графів, кліка, дерево шляхів, мультиграф.*

Вступ

Постановка проблеми та аналіз літератури. При підготовці і веденні бойових дій може виникнути задача по переміщенню РЛС з метою виводу їх із зони ураження протилокаційних ракет або для відновлення порушеної підсистеми збору і обробки радіолокаційної інформації (РЛІ).

Задача полягає у визначенні мінімальної кількості РЛС і місць їх розміщення для забезпечення необхідних параметрів РЛП.

Для вирішення цієї задачі заздалегідь необхідно визначити N > n позицій для n РЛС. Територію району (рис. 1) представимо у вигляді матриці $A = \|a_{ij}\|$ з M рядками, відповідними номерам зон радіолокаційного поля, які повинні бути покриті з допомогою РЛС, і N стовпцями, відповідними номерам позицій РЛС, в якій елементи a_{ij} приймають значення, рівне 1, якщо РЛС, встановлена на j-й позиції, покриває i-й квадрат і 0 – в іншому випадку.

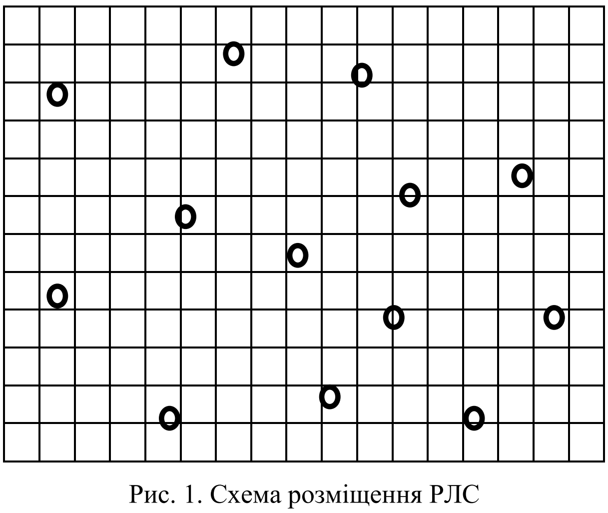

Рис. 1. Схема розміщення РЛС

Введемо параметр x_j, що визначає вибір j-ої позиції як основної:

$$x_j = \begin{cases} 1, \text{ якщо j-та позиція вибирається в} \\ \text{ якості основної,} \\ 0 \text{ - в іншому випадку.} \end{cases}$$

В цьому випадку задача пошуку оптимального розміщення РЛС зводиться до пошуку мінімального покриття всіх рядків в матриці A деякою множиною стовпців, тобто необхідно знайти вектор x*, що мінімізує цільову функцію

$$L = \sum_{j=1}^{M} c_j x_j \to \min , \qquad (1)$$

що задовольняє обмеженням

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{M} a_{ij} x_j \ge 1, \quad i = \overline{1, N}, \\ &x_j \in \{0,1\}, \quad c_j \ge 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

де

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i-\text{та зона може бути} \\ \text{ покрита з } j-\text{тої позиції,} \\ 0 \text{ - в іншому випадку.} \end{cases}$$

Коефіцієнти цільової функції c_j характеризує ступінь пристосованості позиції для розміщення на ній РЛС. Зокрема, як такий ваговий коефіцієнт може вибиратися ймовірність поразки РЛС при відбитті удару засобів повітряного нападу противника. При рівноцінності позицій всі вагові коефіцієнти c_j цільової функції будуть дорівнювати 1.

Дана задача відноситься до класу задач цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) і в теорії графів отримала назву як задача про найменше покриття (ЗНП).

Наявність значних труднощів і специфічних особливостей у вирішенні задач ЦЛП породила велику кількість методів і алгоритмів їх рішення [1 – 4]. Відомі методи рішення задачі засновані на методі галузей і границь і методі на основі рангового підходу.

Метою статті є розробка методу для рішення задачі розрахунку мінімальної кількості радіолокаційних станцій на основі рангового підходу, який дозволяє значно скоротити час її рішення з мінімальною втратою точності.

Основна частина

Необхідність перерозподілу зон покриття РЛС у процесі ведення бойових дій може виникати часто через вихід РЛС із ладу, отже, процес рішення задачі (1) – (2) повинний здійснюватися з урахуванням динаміки бойових дій, що накладає тимчасові обмеження на час рішення задачі (1) – (2), тобто ця задача повинна вирішуватися за час, який не перевищує деякий припустимий час $T_д$. Оперативність рішення задачі (1) – (2) може бути кількісно оцінена ймовірністю її рішення за якийсь час T, що не перевищує $T_д$ [5]:

$$P = 1 - e^{-\frac{T_д}{T}} . \qquad (3)$$

По обраному показнику оперативності (3) найбільш кращі методи на основі ідей рангового підходу, однак і вони можуть не забезпечити рішення задачі (1) – (2) за припустимий час і, таким чином, не скоротити час, який залишився на передислокацію самих РЛС. Розглянемо підхід що дозволяє підвищити оперативність рішення задачі (1) – (2).

Для цього представимо матрицю A у вигляді графа G з множиною вершин n, рівним числу стовпців в матриці A, і множиною мультиребер {i,j}, що отримуються шляхом перерахування всіх можливих поєднань C_i^2, де i – номери стовпців матриці A, відповідні одиничним елементам в j-тому рядку, при цьому кожному мультиребру (i,j) привласнимо номер рядка j.

Таким чином, кожному j-тому рядку матриці A в графові G відповідає кліка з ребер з номерами j, утворена на множині вершин, відповідних номерам стовпців в матриці A, в яких в j-тому рядку розташована одиниця.

При цьому вважатимемо, що в матриці A всі рядки містять 2 і більш одиниць. Наприклад, для матриці A мультиграф G матиме вигляд, представлений на рис. 2.

A=

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	0	1
2	0	0	1	1	0
3	1	1	0	0	1
4	0	0	1	1	0
5	1	0	0	1	0
6	0	1	1	0	0
7	1	0	0	1	1

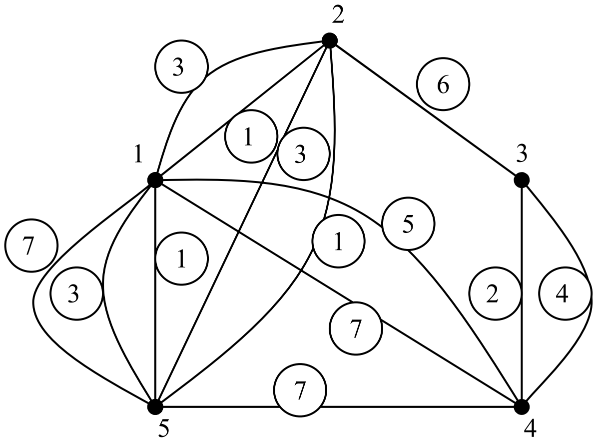

Рис. 2. Мультиграф G матрицы A

З правил побудови мультиграфа виходить:

Твердження 1. Підмножина вершин мультиграфа матриці A, інцидентних ребрам з номерами 1, 2 ., n, визначає покриття рядків стовпцями в матриці A.

Наслідок. Мінімальне число вершин мультиграфа, яким інцидентні ребра з номерами 1, 2, …, m відповідає мінімальному числу стовпців, що покривають одиницями всі рядки в матриці A.

Перетворимо мультиграф G в неорієнтований граф G(V, E), в якому всі мультиребра замінені одним ребром (рис. 3).

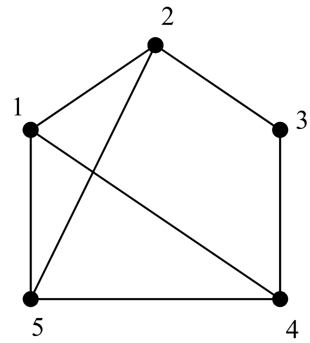

Рис. 3. Неорієнтований граф G(V, E) після заміни мультиребер одним неорієнтованим ребром

Це граф перетворення мультиграфа G. Тоді справедливо:

Твердження 2. Мінімальне вершинне покриття (МВП) графа перетворення визначає підмножина вершин в мультиграфі G, інцидентне номерам ребер 1, 2, …, m.

Доказ. Нехай множина вершин графа перетворення $\{V_k, V_l, V_q\}$ утворюють в ньому мінімальне вершинне покриття, оскільки в мультиграфі кожне ребро вироджується в деяку підмножину паралельних ребер. Значить, множина вершин $\{V_k, Vl, Vq\}$ в мультиграфі G теж покриває всі ребра і, отже, інцидентно ребрам з номерами 1, 2, …, m, що і потрібно було довести.

У мультиграфі кожній вершині i відповідає підмножина інцидентних ребер з підмножиною номерів Ω_i. Позначимо мінімальне вершинне покриття графа перетворення $Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$. Кожній вершині $y_i \in Y$ в мультиграфі G інцидентна деяка підмножина ребер Ω_i

$$\begin{array}{c} y_{11} \\ y_{22} \\ \ldots \\ y_к \to \Omega_к. \end{array} \quad (4)$$

На основі підмножин Ω_i номерів ребер побудуємо повний граф $G_П$ з до вершинами в якому кожній вершині i відповідає множина Ω_i. Довільну кліку графа $G_П$, що складається, наприклад, з вершин (p, l, t), характеризуватимемо об'єднанням підмножин $\{\Omega_p \cup \Omega_l \cup \Omega_t\}$.

Ясно, що кліка мінімальної потужності в графові $G_П$, що містить всю множину номерів ребер $\{1, 2 ., m\}$, визначає підмножина вершин $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ в мультиграфі G, що покриває m ребер з номерами $\{1, 2, \ldots, m\}$, і мінімальне покриття стовпцями матриці A з номерами стовпців відповідно $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.

Неважко бачити, що перед пошуком кліки граф $G_П$ може бути спрощений за рахунок виключення вершин за правилом L: якщо $\Omega_i \subset \Omega_j$,то Ω_i і відповідна їй y_i виключаються з розгляду.

Для вирішення задачі використовуємо представлення графа $G_П$ у вигляді стягнутого дерева D всіх шляхів (рис. 4) [6].

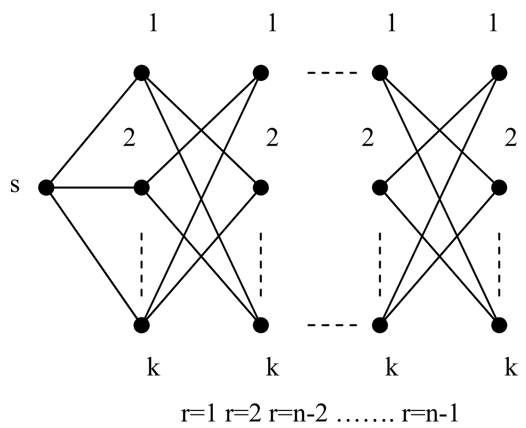

Рис. 4. Стягнуте дерево всіх шляхів D графа $G_П$

Розглянемо алгоритм визначення кліки мінімальної потужності в графові $G_П$.

Кожну вершину графа D характеризуємо ваговою характеристикою α, рівною числу елементів в множині Ωi.

Максимальне значення параметра α рівне m, отже, задача побудови кліки зводиться до пошуку шляху довжини m в графові D мінімально можливого рангу r_{min}.

Алгоритм $А_П$ визначення кліки мінімальної потужності в графові $G_П$.

Крок 1. Формуємо в графові D шляхи рангу r=1 і обчислюємо їх довжини, які визначаються ваговими характеристиками α.

Крок 2. Визначаємо на ярусі r шлях μ_{sj}^{*r} максимальної довжини. Перевіряємо, чи є шлях довжини m. Якщо є, то алгоритм закінчує роботу, інакше переходиться до виконання кроку 3.

Крок 3. На основі шляху поточного рангу μ_{sj}^{*r} будуємо всі можливі шляхи рангу r+1.

Крок 4. Збільшуємо значення поточного рангу r:=r+1 і переходимо до кроку 2.

Мінімальним вершинним покриттям графа G(V, E) (рис. 3) є підмножини вершин:

$$\{245\};\{135\};\{124\}.$$

Але по відношенню до графа G (рис. 2) ці вершинні покриття є надмірними. Так, вершинам 2, 4, 5, створюючим мінімальне вершинне покриття в мультиграфі, відповідають ребра з номерами відповідно

$$2 \to (1, 3, 6) = \Omega_2; \quad 4 \to (2, 4, 5, 7) = \Omega_4;$$
$$5 \to (1, 3, 7) = \Omega_5.$$

Аналіз роботи алгоритму $А_П$ показує, що вершини (2, 4) відповідають стовпцям 2 і 4, створюючим в матриці A мінімальне покриття (табл. 1).

Таблиця 1

Результати роботи алгоритму $А_П$

S2(1,3,6)(α=3) 2	S42(1,2,3,4,5,6,7) (α=7)α 2	______ 2
S4(2,4,5,7)(α=4)α 4	S24(1,2,3,4,5,6,7) (α=7)α 4	______ 4
S5(1,3,7)(α=3)α 5	S25(1,3,6,7) (α=4)α S45(1,2,3,5,7) (α=6)α 5	_____ 5

Висновки

Неважко показати, що сумарна тимчасова складність точного алгоритму рішення задачі визначення мінімального покриття матриці A на основі її зведення до завдання про мінімальне вершинне покриття в графі не може перевищити $O(mn^3)$. Результати експериментального порівняння розробленого алгоритму з відомими приведені на рис. 5. Порівняння проводилося по середньому значенню числа елементарних операцій (ЕО), що виконуються вказаними алгоритмами.

Для забезпечення об'єктивності порівняння щільність ребер у графі була обрана рівною 0,01, тобто розглядався випадок, коли число вершинних покрить експоненціально росте зі збільшенням числа вершин у графі. в.

На рис. 5 напису ЦЛП відповідає алгоритм, заснований на ранговому підході, напису МГГ – алгоритм на основі методу галузей і границь, напису МВП відповідає розроблений у даній статті алгоритм визначення мінімального вершинного покриття.

Середній час рішення задачі визначення мінімального вершинного покриття при щільностях ребер, які змінюються в діапазоні від 0,01 до 0,9, і n, яке змінюється до 300, не перевищувало 10 – 30 секунд.

Оцінка показника оперативності рішення задачі створення єдиного радіолокаційного поля в умовах протидії супротивника показала (рис. 6), що при рівні оперативності $P \geq 0,9$ в даний час забезпечення розрахунками етапу ведення операції можливе тільки алгоритмами, заснованими на запропонованому графовому підході, що забезпечує задану точність обчислень при припустимих тимчасових і ресурсних витратах.

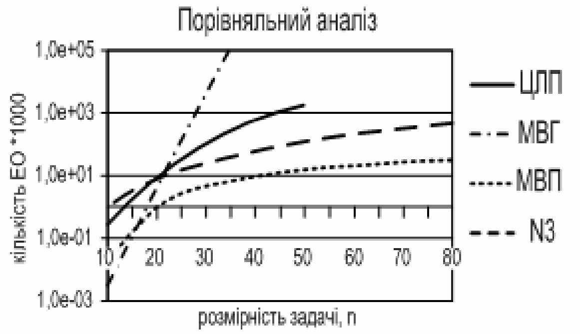

Рис. 5. Залежність числа елементарних операцій, виконуваних алгоритмами від розмірності розв'язуваної задачі

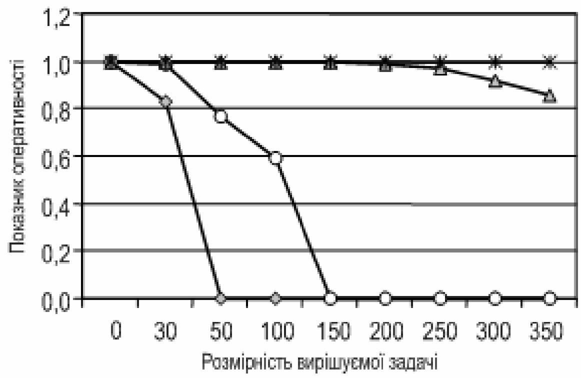

Рис. 6. Залежність показника оперативності розв'язуваної задачі від її розмірності

Список літератури

1. *Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Н. Кристофидес. – М.: Мир, 1978. – 309 с.*
2. *Компьютер и задачи выбора. – М.: Наука, 1989. – 208 с.*
3. *Городнов В.П. Моделирование боевых действий частей, соединений и объединений войск ПВО / В.П. Городнов. – Х.: ВИРТА ПВО, 1987. – 380 с.*
4. *Голубничий Д.Ю. Математичні моделі і методи в обчислювальних системах та мережах ЕОМ / Д.Ю. Голубничий, С.В. Лістровий, О.Ю. Гуль, В.Ф. Третяк. – Х.: ХВУ, 1998. – 191 с.*
5. *Пономаренко В.С. Цілочисельне програмування в економіці / В.С. Пономаренко, Д.Ю. Голубничий, В.Ф. Третяк. – Х.: Вид. ХНУ, 2005. – 204 с.*
6. *Листровой С.В., Гуль А.Ю. Метод решения задачи о наименьшем покрытии на основе рангового подхода / С.В. Листровой, А.Ю. Гуль // Электронное моделирование. – 1999. – №1. – С. 58-70.*

Надійшла до редколегії 9.09.2009

Рецензент: д-р техн. наук, проф. С.В. Лістровой, Українська державна академія залізничного транспорту, Харків.

МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСЧЕТА МИНИМАЛЬНОГО КОЛИЧЕСТВА РАДИОЛОКАЦИОННЫХ СТАНЦИЙ НА ОСНОВЕ РАНГОВОГО ПОДХОДА

А.Ю. Гуль, В.М. Приходько, В.В. Огурцов

В работе описан метод для решения задачи расчета минимального количества радиолокационных станций (РЛС) и мест их размещения для создания сплошного радиолокационного поля (РЛП) в условиях противодействия противника. Предложен новый подход решения задачи о наименьшем покрытии, что позволяет повысить оперативность принятия решения на размещение радиолокационных станций в заданном районе.

Ключевые слова: *сплошное радиолокационное поле, ранговый подход, задача о наименьшем покрытии, теория графов, клика, дерево путей, мультиграф.*

METHOD FOR DECISION OF TASK OF CALCULATION OF THE LEAST THE RADIO-LOCATION STATIONS ON BASIS OF GRADE APPROACH

A.Yu. Gul', V.M. Prihodko, V.V. Ogurtsov

A method is in-process described for the decision of task of calculation of the least of the radio-location stations and places of their placing for creation of the continuous radio-location field (RLP) in the conditions of counteraction of opponent. New approach of decision of task is offered about the least coverage, that allows to promote the operationability of decision-making on placing the radio-location stations in the set district.

Keywords: *continuous radio-location field, grade approach, task about the least coverage, theory of the graphs, clique, tree of ways, multigraph.*