УДК 519.21

Ю.А. Олейник[1], Г.М. Тихонов[2], Я.Н. Кожушко[1]

[1]*Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков*
[2]*Национальный университет обороны Украины, Киев*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ НАЗЕМНОЙ ПОДВИЖНОЙ СИСТЕМЫ КОМПЛЕКСА РЭБ

В статье рассмотрены модели применения наземной подвижной системы, как элемента комплекса РЭБ. С помощью цепей Маркова и уравнений Колмогорова получены функции зависимости рассмотренных состояний от времени применения и эксплуатации наземной подвижной системы. Проанализированы различия в исследовании восстанавливаемой и невосстанавливаемой наземной подвижной системы. Показана возможность поэтапного исследования наземной подвижной системы при изменении условий применения и эксплуатации.

Ключевые слова: *наземная подвижная система, вероятность состояния, интенсивность перехода.*

Введение

При развитии высокоточного оружия, вероятность поражения элементов комплекса радиоэлектронной борьбы (РЭБ) будет очень высокой, так как радиолокационные станции РЭБ легко обнаружить. Эффективным способом защиты наземных элементов комплекса РЭБ будет являться их подвижность, что позволит уменьшить вероятность обнаружения и наведения средств поражения высокоточным оружием.

Рассмотрим наземную подвижную систему (НПС), как элемент мобильного наземного комплекса РЭБ. НПС перемещается по поверхности земли и может быть на колёсном или гусеничном ходу. При моделировании применения НПС будет использовать математический аппарат, описывающий свойства цепей Маркова [1, 2].

Постановка задачи. Необходимо найти зависимости вероятностей возможных состояний НПС от времени, что даст возможность анализировать эффективность применения НПС.

Цель статьи. Рассмотреть вероятности состояний НПС, как элемента комплекса РЭБ, используя свойства цепей Маркова.

Основная часть

Вначале рассмотрим самый простой пример применения НПС, которая может находится в двух состояниях: выполнение задачи, подготовка к выполнению задачи. Граф этих состояний НПС представлен на рис. 1 [1. 2].

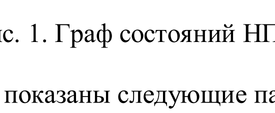

Рис. 1. Граф состояний НПС

На рис. 1 показаны следующие параметры:

$p_{вз}$ - вероятность нахождения НПС в состоянии выполнения задачи (ВЗ);

$p_{пр}$ - вероятность нахождения НПС в состоянии подготовки к ВЗ;

λ - интенсивность перехода НПС из состояния ВЗ в состояние подготовки к ВЗ, 1/с;

μ - интенсивность перехода НПС из состояния подготовки к ВЗ в состояние ВЗ, 1/с.

Запишем уравнения Колмогорова для графа состояний, представленного на рис. 1 [1, 2]:

$$\begin{cases} \mu\, p_{взп}(t) - \lambda\, p_{вз}(t) = \dfrac{d\, p_{вз}(t)}{d\,t}; \\ \lambda\, p_{вз}(t) - \mu\, p_{пвз}(t) = \dfrac{d\, p_{пвз}(t)}{d\,t}; \\ p_{вз}(t) + p_{пвз}(t) = 1. \end{cases} \qquad (1)$$

Решив систему уравнений (1), получим выражения [1, 2]:

$$p_{вз}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + C e^{-(\lambda+\mu)\,t};$$

$$p_{пвз}(t) = 1 - p_{вз}(t),$$

где C – свободный коэффициент.

Коэффициент C определяем из начальных условий:

$$\begin{cases} p_{вз}(0) = p_0; \\ p_{пвз}(0) = 1 - p_0. \end{cases} \qquad (2)$$

Подставляя в систему уравнений (2) значения функций $p_{вз}(0)$ и $p_{пвз}(0)$, получим для коэффициента C выражение:

$$C = \frac{p_0(\lambda+\mu) - \mu}{\lambda+\mu}.$$

Запишем выражения для $p_{вз}(t)$ и $p_{пвз}(t)$ с учётом коэффициента C:

$$p_{вз}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{p_0(\lambda+\mu)-\mu}{\lambda+\mu}\,e^{-(\lambda+\mu)\,t};$$

$$p_{пвз}(t)=1-p_{пз}(t),$$

где p_0 – начальное условие применения НПС, которое задаётся.

Так как условия применения НПС могут изменяться на новой позиции, то для общего случая на i-ой позиции получим выражение:

$$p_{вз\,i}(t)=\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}+C_i\,e^{-(\lambda_i+\mu_i)\,t},$$

где для начальных условий запишем:

$$\begin{cases} p_{вз\,i}(0)=p_{вз\,(i-1)}(\Delta t_{i-1}); \\ p_{пвз\,i}(0)=1-p_{вз\,(i-1)}(\Delta t_{i-1}), \end{cases}$$

откуда для C_i получим:

$$C_i=\frac{p_{вз\,(i-1)}(\Delta t_{i-1})\,(\lambda_1+\mu_1)-\mu_1}{\lambda_1+\mu_1},$$

где Δt_{i-1} - время нахождения НПС в предыдущих (i-1) условиях, после чего НПС перешла в новые i-ые условия, с.

На рис. 2 показан пример графиков функций $p_{вз\,i}(t)$ и обозначения для $p_{вз i}(\Delta t_i)$, t_i и Δt_i.

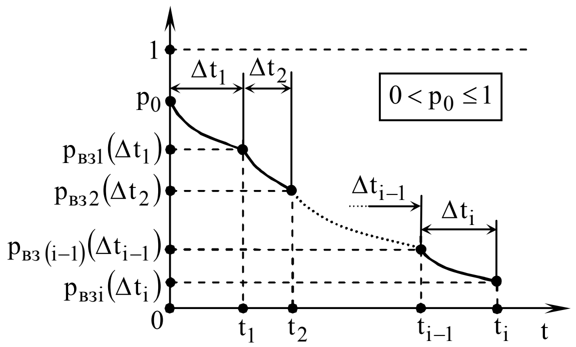

Рис. 2. Пример графиков функций $p_{вз i}(t)$

Функция $p_{вз i}(t)$ стремится к своему предельному значению $p_{вз i}^{пред}$ при $t\to\infty$:

$$p_{вз i}^{пред}=p_{вз\,i}(\infty)=\frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i}.$$

Если $\lambda_i<\mu_i$ и $p_{вз(i-1)}^{пред}<p_{вз i}^{пред}$, то функция $p_{вз i}(t)$ может возрастать от $p_{вз(i-1)}^{пред}$ до $p_{вз i}^{пред}$ на участке Δt_i.

Для закона изменений значений функции

$$p_{вз}^{пред}(\mu)=\frac{\mu}{\lambda+\mu},$$

получим зависимость, показанную на рис. 3.

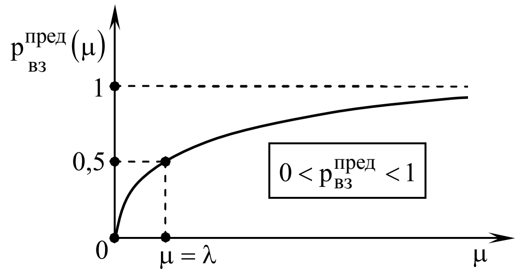

Рис. 3. Изменение функции $p_{вз}^{пред}(\mu)$

Далее рассмотрим выражение для λ и μ, которые можно применять для λ_i и μ_i на участках Δt_i. Для λ запишем [1, 2]:

$$\lambda=\lambda_{вз}+\lambda_{пор};$$

$$\lambda=\frac{p_н}{t_{вз}}+\sum_{i=1}^{n}\frac{p_{обн}\,p_{ну}\,p_{пор}}{t_{пор}},$$

где $\lambda_{вз}$ - интенсивность перехода в состояние подготовки к ВЗ, 1/с;

$\lambda_{пор}$ - интенсивность поражения НПС, 1/с;

$p_{обн}$ - вероятность обнаружения НПС;

$p_{ну}$ - вероятность нанесения удара по НПС;

$p_{пор}$ - вероятность поражения НПС после нанесения по ней удара;

$t_{пор}$ - время поражения НПС от момента начала обнаружения до момента воздействия поражающих элементов на НПС ($t_{пор}=t_{обн}+t_{ну}+t_{пор}$), с.

Для μ запишем следующую формулу [1, 2]:

$$\mu=\mu_{оз}+\mu_{вст}+\mu_{рез}+\mu_{изг};$$

$$\mu=\frac{p_н}{t_{оз}}+p_н\frac{p_{вст}}{t_{вст}+t_{дост1}}\sum_{i=1}^{n}p_{обнi}\,p_{нуi}\,p_{порi}$$

$$+\frac{p_н}{t_{дост2}}+\frac{p_н}{t_{изг}+t_{дост3}},$$

где $\mu_{оз}$ - интенсивность перехода исправных, не поражённых НПС из состояния подготовки к ВЗ в состояние ВЗ, 1/с;

$\mu_{вст}$ - интенсивность перехода восстановленных (после поражения) НПС в состояние ВЗ, 1/с;

$\mu_{рез}$ - интенсивность поступления НПС в состояние ВЗ из резерва, 1/с;

$\mu_{изг}$ - интенсивность поступления в состояние ВЗ изготовленных НПС, 1/с;

$p_н$ - надёжность НПС;

$t_{оз}$ - время перехода НПС из состояния ВЗ в состояние подготовки к ВЗ, при этом НПС исправна, с;

$p_{вст}$ - вероятность того, что поражённая НПС может быть восстановлена;

$t_{вст}$ - время восстановления НПС, с;

$t_{дост1}$ - время доставки восстановленной НПС в район (условия) ВЗ, с;

n - число комплексов, поражающих НПС;

$t_{дост2}$ - время доставки резервных НПС в район (условия) ВЗ, с;

$t_{изг}$ - время изготовления новых НПС, с.

$t_{дост3}$ - время доставки изготовленных НПС в район (условия) ВЗ, с.

Если НПС восстанавливаются за различное время и с различными вероятностями (в зависимости от i-го комплекса поражения), то для $\mu_{вст}$ запишем следующее выражение:

$$\mu_{вст} = p_н \sum_{i=1}^{n} \frac{p_{обнi}\, p_{нуi}\, p_{порi}}{t_{встi} + t_{дост1}} p_{встi} .$$

Для вероятностей восстановления запишем:

$$p_{встi} + p_{нвстi} = 1 ;$$

$$p_{вст} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_{встi} ;\; p_{нвст} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_{нвстi} ;$$

$$p_{вст} + p_{нвст} = 1 .$$

где $p_{встi}$ - вероятность того, что поражённая НПС может быть восстановлена после поражения конкретным i-ым комплексом;

$p_{нвстi}$ - вероятность того, что поражённая НПС не может быть восстановлена после поражения конкретным i-ым комплексом.

Рассмотрим свойство $\mu_{вст}$, которое влияет на смысл и сущность математической модели (ММ), получаемой при исследовании рассматриваемых цепей Маркова. Для этого преобразуем выражение для $\mu_{вст}$, разделив числитель и знаменатель на $p_{вст}$:

$$\frac{p_{вст}}{t_{вст} + t_{дост1}} = \frac{1}{\dfrac{t_{вст} + t_{дост1}}{p_{вст}}} .$$

Из полученного преобразования следует, что $\mu_{вст}$ в ММ, равное значению

$$\frac{p_{вст}}{t_{вст} + t_{дост1}} ,$$

может быть воспринято как $\mu_{вст}$, равное

$$\frac{1}{\dfrac{t_{вст} + t_{дост1}}{p_{вст}}} ,$$

где $p_{вст} = 1$, а время $t_{вст} + t_{дост1}$ увеличено на $1/p_{вст}$. Именно для $\mu_{вст}$ с учётом $p_{вст} = 1$ мы получаем значения $p_{взi}(\Delta t_i)$ и ММ подразумевает, что все НПС можно восстановить, но за большее, чем $t_{вст} + t_{дост1}$ время.

Можно сделать вывод о том, что если НПС при любом поражении восстанавливаемы, то для них можно использовать ММ согласно графа состояний рис. 1, но ММ будет принимать $p_{вст} = 1$, а время, равное $(t_{вст} + t_{дост1})/p_{вст}$.

Если не все НПС при их поражении восстанавливаемы, то нельзя рассчитывать значения $p_{вз}(t)$, используя только два состояния, показанные на рис. 1. Необходимо водить состояние поражения, в котором будут находится НПС, не подлежащие восстановлению, что показано на рис. 4.

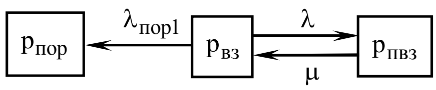

Рис. 4. Граф состояний НПС с учётом состояния с вероятностью $p_{вст}$

Для интенсивностей перехода, показанных на рис. 4, запишем выражения:

$$\lambda_{пор1} = \lambda_{пор} p_{нвст} = \lambda_{пор}\left(1 - p_{вст}\right) ;$$

$$\lambda = \lambda_{вз} + \lambda_{пор2} = \lambda_{вз} + \lambda_{пор} p_{вст} ;$$

$$\mu = \mu_{оз} + \mu_{вст} + \mu_{рез} + \mu_{изг} ,$$

где $\lambda_{пор1}$ – интенсивность поражения НПС, которые не могут быть восстановлены 1/с;

$\lambda_{пор2}$ - интенсивность поражения НПС, которые могут быть восстановлены 1/с;

Составим систему уравнений Колмогорова согласно графу состояний, показанному на рис. 4:

$$\begin{cases} \mu\, p_{взп}(t) - \left(\lambda + \lambda_{пор1}\right) p_{вз}(t) = \dfrac{d\, p_{вз}(t)}{d\, t}; \\ \lambda\, p_{вз}(t) - \mu\, p_{пвз}(t) = \dfrac{d\, p_{пвз}(t)}{d\, t}; \\ \lambda_{пор1}\, p_{вз}(t) = \dfrac{d\, p_{пор}(t)}{d\, t}; \\ p_{вз}(t) + p_{пвз}(t) + p_{пор}(t) = 1. \end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений получим:

$$p_{вз}(t) = C_1\, e^{-\frac{1}{2}(D_1 + D_2)\, t} + C_2\, e^{\frac{1}{2}(D_1 - D_2)\, t} ;$$

$$p_{пвз}(t) = \frac{1}{2\mu}\left\{\left(\lambda + \lambda_{пор1} - \mu\right) \times \right.$$

$$\times \left(C_1\, e^{-\frac{1}{2}(D_1 + D_2)\, t} + C_2\, e^{\frac{1}{2}(D_1 - D_2)\, t} \right) -$$

$$\left. - D_2 \left(C_1\, e^{-\frac{1}{2}(D_1 + D_2)\, t} + C_2\, e^{\frac{1}{2}(D_1 - D_2)\, t} \right) \right\};$$

$$p_{пор}(t) = 1 - p_{вз}(t) - p_{пвз}(t) ;$$

$$D_1 = \sqrt{D} ;$$

$$D_2=\lambda+\lambda_{пор1}+\mu;$$

$$D=\left(\lambda+\lambda_{пор1}\right)^2+\mu\left(\mu+2\lambda-2\lambda_{пор1}\right).$$

Имея конечное состояние с вероятностью $p_{пор}$ (см. рис. 4), мы не можем определить предельные вероятности.

Чтобы выйти из этого положения, изменим граф состояний, приняв, что все поражённые и не подлежащие восстановлению НПС будут заменяться на НПС, прибывающие из резерва и из предприятий изготовителей.

При этом граф состояний изменится, что показано на рис. 5.

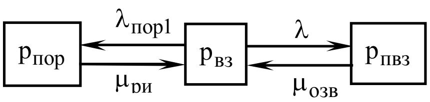

Рис. 5. Граф состояний восстанавливаемой НПС с учётом резерва и изготовления НПС

На рис. 5 введены следующие обозначения:

$$\mu_{озв}=\mu_{оз}+\mu_{вст};$$
$$\mu_{ри}=\mu_{рез}+\mu_{изг},$$

где $\mu_{озв}$ - интенсивность перехода не поражённых и восстановленных (после поражения) НПС из состояния подготовки к ВЗ в состояние ВЗ, 1/с;

$\mu_{ри}$ - интенсивность поступления резервных и изготовленных НПС в состояние ВЗ, 1/с.

Из графа состояний, рис. 5, ясно, что число исправных и подлежащих восстановлению НПС будет неизменным при $\lambda_{пор1}=\mu_{ри}$, число НПС будет убывать при $\lambda_{пор1}>\mu_{ри}$ и число НПС будет возрастать при $\lambda_{пор1}<\mu_{ри}$.

Если $\lambda_{пор1}$ и $\mu_{ри}$ со временем изменяются, то нужно рассматривать процесс применения НПС по участкам Δt_i (см. рис. 2).

Составим систему уравнений Колмогорова согласно графу состояний, показанному на рис. 5:

$$\begin{cases}\mu_{озв}\,p_{пвз}(t)+\mu_{ри}\,p_{пор}(t)-\left(\lambda+\lambda_{пор1}\right)p_{вз}(t)=\\ \quad=\dfrac{d\,p_{вз}(t)}{d\,t};\\ \lambda\,p_{вз}(t)-\mu_{озв}\,p_{пвз}(t)=\dfrac{d\,p_{пвз}(t)}{d\,t};\\ \lambda_{пор1}\,p_{вз}(t)-\mu_{ри}p_{пор}(t)=\dfrac{d\,p_{пор}(t)}{d\,t};\\ p_{вз}(t)+p_{пвз}(t)+p_{пор}(t)=1.\end{cases}$$

Решив полученную систему уравнений, получим:

$$p_{вз}(t)=\frac{\mu_{озв}\mu_{ри}}{\lambda\mu_{ри}+\mu_{озв}\mu_{ри}+\lambda_{пор1}\mu_{озв}}+$$
$$+C_1\,e^{-\frac{1}{2}(K_1+K_2)t}+C_2\,e^{\frac{1}{2}(K_1-K_2)t};$$

$$p_{пвз}(t)=\frac{1}{2X}\Bigg\{2\lambda\mu_{ри}\left(\mu_{озв}-\mu_{ри}\right)+$$
$$+\left(C_1\,e^{-\frac{1}{2}(K_1+K_2)t}+C_2\,e^{\frac{1}{2}(K_1-K_2)t}\right)\times$$
$$\times\Big[\lambda\lambda_{пор1}\left(\mu_{озв}+\mu_{ри}\right)+\mu_{ри}\left(2\lambda_{пор1}\mu_{озв}+\lambda^2\right)+$$
$$+\mu_{ри}^2\left(\lambda+\mu_{озв}\right)+\mu_{озв}^2\left(\lambda_{пор1}+\mu_{ри}\right)+\lambda_{пор1}^2\mu_{озв}\Big]+$$
$$+K_1\left(C_2\,e^{\frac{1}{2}(K_1-K_2)t}-C_1\,e^{-\frac{1}{2}(K_1+K_2)t}\right)\times$$
$$\times\left[\lambda\mu_{ри}+\mu_{озв}\mu_{ри}+\lambda_{пор1}\mu_{озв}\right]\Bigg\};$$

$$p_{пор}(t)=1-p_{вз}(t)-p_{пвз}(t);$$

$$X=\left(\mu_{озв}-\mu_{ри}\right)\left(\lambda\mu_{ри}+\mu_{озв}\mu_{ри}+\lambda_{пор1}\mu_{озв}\right);$$

$$K_1=\sqrt{K};$$

$$K_2=\lambda+\lambda_{пор1}+\mu_{озв}+\mu_{ри};$$

$$K=\left(\lambda+\lambda_{пор1}\right)^2+\left(\mu_{озв}-\mu_{ри}\right)^2+$$
$$+2\lambda\left(\mu_{озв}-\mu_{ри}\right)+2\lambda_{пор1}\left(\mu_{ри}-\mu_{озв}\right).$$

Далее введём отдельно состояние для восстанавливаемых после поражения НПС с вероятностью $p_{вст}$ (см. рис. 6).

При этом $p_{пвз}$ будет оценивать только непоражённые, ожидающие выполнения задачи НПС, а $p_{вст}$ будет оценивать только восстанавливаемые после поражения НПС.

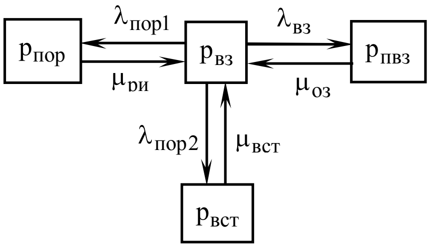

Рис. 6. Граф состояний восстанавливаемой НПС с учётом состояния с вероятностью $p_{вст}$

Запишем систему уравнений Колмогорова согласно графу состояний, показанному на рис. 6:

$$\begin{cases} \mu_{оз} p_{пвз}(t) + \mu_{вст} p_{вст}(t) + \mu_{ри} p_{пор}(t) \\ -\left(\lambda_{вз} + \lambda_{пор1} + \lambda_{пор2}\right) p_{вз}(t) = \dfrac{d\, p_{вз}(t)}{d\,t}; \\ \lambda_{вз} p_{вз}(t) - \mu_{оз} p_{пвз}(t) = \dfrac{d\, p_{пвз}(t)}{d\,t}; \\ \lambda_{пор1} p_{вз}(t) - \mu_{ри} p_{пор}(t) = \dfrac{d\, p_{пор}(t)}{d\,t}; \\ \lambda_{пор2}\, p_{вз}(t) - \mu_{вст} p_{вст}(t) = \dfrac{d\, p_{вст}(t)}{d\,t}; \\ p_{вз}(t) + p_{пвз}(t) + p_{пор}(t) + p_{вст}(t) = 1. \end{cases}$$

Данную систему уравнений решить не удалось, но можно записать полученную систему уравнений для условия $t \to \infty$, что позволит найти предельные вероятности [1, 2]:

$$\begin{cases} \mu_{оз} p_{пвз} + \mu_{вст} p_{вст} + \mu_{ри} p_{пор} = \left(\lambda_{вз} + \lambda_{пор1} + \lambda_{пор2}\right) p_{вз}; \\ \lambda_{вз} p_{вз} = \mu_{оз} p_{пвз}; \\ \lambda_{пор1} p_{вз} = \mu_{ри} p_{пор}; \\ \lambda_{пор2} p_{вз} = \mu_{вст} p_{вст}; \\ p_{вз} + p_{пвз} + p_{пор} + p_{вст} = 1. \end{cases}$$

Из полученной системы уравнений определены предельные вероятности:

$$p_{вз} = \frac{\mu_{оз}\mu_{вст}\mu_{ри}}{W}; \; p_{пвз} = \frac{\lambda\mu_{вст}\mu_{ри}}{W};$$

$$p_{пор} = \frac{\lambda_{пор1}\mu_{оз}\mu_{вст}}{W}; \; p_{вст} = \frac{\lambda_{пор2}\mu_{оз}\mu_{ри}}{W};$$

$$W = \mu_{оз}\mu_{вст}\mu_{ри} + \lambda\mu_{вст}\mu_{ри} + \\ + \lambda_{пор1}\mu_{оз}\mu_{вст} + \lambda_{пор2}\mu_{оз}\mu_{ри}.$$

Предельные вероятности не позволяют точно рассчитать изменение вероятностей состояний во времени, но показывают главное – экстремум значений вероятностей состояний. Так же важно отметить, что зная начальные и экстремальные значения вероятностей состояний, можно прогнозировать их изменения на различных временных участках (см. рис. 2).

Выводы

Проанализированы математические модели цепей Маркова для НПС, которая является элементом мобильного комплекса РЭБ. Данные модели могут использоваться для всех элементов комплекса и далее для комплекса в целом.

Анализ уравнений Колмогорова показал, что для восстанавливаемой НПС лучше всего рассматривать три состояния, что позволит определять изменение вероятностей состояний во времени. Но три состояния не всегда оптимально определяют применение НПС и тогда увеличение состояний будет приводить к определению лишь предельных вероятностей состояний НПС.

Рассмотренные математические модели показывают перспективность применения цепей Маркова для анализа мобильного комплекса РЭБ, НПС которого будут защищены от поражения своей подвижностью.

Список литературы

1. *Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Высшая школа. - 2001. - 575 с.*

2. *Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Советское радио. - 1972. - 551 с.*

Поступила в редколлегию 10.06.2010

Рецензент: канд. техн. наук, доцент А.Н. Полежаев, Национальная юридическая академия Украины им. Я. Мудрого, Харьков.

ВИЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЙ ЙМОВІРНОСТЕЙ СТАНІВ НАЗЕМНОЇ РУХОМОЇ СИСТЕМИ КОМПЛЕКСУ РЕБ

Ю.А. Олійник, Г.М. Тіхонов, Я.М. Кожушко

У статті розглянуті моделі застосування наземної рухомої системи, як елемента комплексу РЕБ. За допомогою ланцюгів Маркова й рівнянь Колмогорова отримані функції залежності розглянутих станів від часу застосування та експлуатації наземної рухомої системи. Проаналізовано розходження в дослідженні відновлюваної та невідновлюваної наземної рухомої системи. Показано можливість поетапного дослідження наземної рухомої системи при зміні умов застосування та експлуатації.

Ключові слова: *Наземна рухома система, імовірність стану, інтенсивність переходу.*

DETERMINATION FUNCTION PROBABILITY OF THE CONDITIONS OF THE OVERLAND ROLLING SYSTEM OF THE COMPLEX ELECTRONIC WARFARE

Ю.A. Oleynik, G.M. Tikhonov, Ya.N. Kozhushko

In article are considered models of the using the overland rolling system as element of the complex electronic warfare. By means of chains of the Markov and equations Kolmogorov are received functions to dependencies of the considered conditions from time of the using and usages of the overland rolling system. The analysed differences in study restored and невосстанавливаемой overland rolling system. Possibility of the phased study of the overland rolling system is Shown when change the conditions of the using and usages.

Keywords: *overland rolling system, probability of the condition, intensity of the transition.*