УДК 519.832

В.В. Романюк

Хмельницький національний університет, Хмельницький

МОДЕЛЮВАННЯ ПОШУКІВ ОБ'ЄКТА В УМОВАХ ЧАСТКОВОЇ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ З ВИКОРИСТАННЯМ ЗАГАЛЬНОЇ МОДЕЛІ УСУНЕННЯ ЧАСТКОВИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ІМОВІРНІСНОГО ТИПУ ЯК МІНІМІЗАЦІЇ МАКСИМАЛЬНОГО ДИСБАЛАНСУ

Знайдено оптимальну стратегію другого гравця в опуклій антагоністичній грі з ядром як функцією $2N-2$ змінних на паралелепіпеді в $\Re^{2N-2}$, котра є моделлю усунення N часткових невизначеностей імовірнісного типу як мінімізації максимального дисбалансу. У формі багатоетапної діагональної $N\times N$-гри представлено модель оптимального розподілу пошукових ресурсів для організації диспетчером пошукового процесу щодо об'єкта фізичної природи.

Ключові слова: *часткова невизначеність, антагоністична гра, опуклість гри, мінімізація максимального дисбалансу, оптимальна стратегія, модель пошуків, пошуковий процес, діагональна гра, прийняття рішення.*

Вступ та опис предметної області дослідження

Організація пошукових процесів об'єктів фізичної природи є важливою складовою у вирішенні оперативних задач на прикордонних смугах, при розшуку підозрюваних або людей, котрі загубилися, при добуванні корисних копалин тощо. В організації таких процесів визначну роль відіграє оцінювання імовірностей перебування шуканого об'єкта у зонах пошуків, на які розбита загальна пошукова область, що у подальшому допомагає вірно сформувати напрям пошуку. Точкове оцінювання таких імовірностей, які відтепер називатимемо OS-імовірностями (object sojourning probabilities), практично не вважається коректним [1, 2]. Тому у моделях пошукових процесів попередньо визначені OS-імовірності представляються у вигляді сегментів імовірностей ненульової міри на числовій прямій. Звісно, ніяких імовірнісних мір на цих сегментах не задається, тобто проблема усунення невизначеностей стосовно OS-імовірностей залишається відкритою. І тільки за умови усунення невизначеностей стосовно OS-імовірностей диспетчер пошукового процесу має можливість сформулювати принципи оптимального здійснення пошукових заходів, де, говорячи строго, необхідно враховувати усі можливі зміни дислокації об'єкта, не виключаючи його найбільш вдалі дії.

Аналіз досліджень і публікацій за проблематикою у предметній області. Більшість фундаментальних питань моделювання або прийняття рішень в умовах невизначеності розглянуті у джерелах [3, 4]. Однією з найпростіших моделей усунення невизначеностей є мінімізація максимального дисбалансу припущеного і справжнього значень досліджуваного параметра (тобто, у даному випадку, OS-імовірності). Така модель є суто антагоністичною і досить ґрунтовно висвітлена у [5, 6], де досліджується два параметри імовірнісного типу. Під параметрами імовірнісного типу зазвичай розуміють таку множину N параметрів з їх оцінками $\{X_n\}_{n=1}^{N}$ у формі сегментів ненульової міри, що

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = 1 \tag{1}$$

при $x_n \in X_n \subset [0;\, 1]$ $\forall\ n = \overline{1,\, N}$. Множина $\{x_n\}_{n=1}^{N}$ є множиною невідомих значень цих N параметрів, і ці значення необхідно оцінити якнайкраще [1, 3, 5]. Часто також на параметри імовірнісного типу накладають умову

$$\min X_n > 0\,,\ \ \max X_n < 1 \quad \forall\ n = \overline{1,\, N}\,. \tag{2}$$

Умова (2) означає те, що серед усіх оцінюваних N параметрів немає нульових або одиничних, тобто можливість виключення із розгляду хоча б одного параметра заборонена. Невизначеності N параметрів імовірнісного типу у формі сегментів $\{X_n\}_{n=1}^{N}$ називатимемо частковими, якщо умова (2) обов'язково виконується. Власне, повна невизначеність характерна для такої імовірності у формі сегмента ненульової міри, де існує можливість її нульового або одиничного значення.

Моделювання пошуків об'єкта в умовах часткової невизначеності у літературі не відображене так ґрунтовно, як питання моделювання або прийняття рішень в умовах невизначеності. Можливо, справа у тому, що інколи "пошук" розуміється у більш специфічному смислі, й у дослідженнях надається перевага пошуку в інформаційних середовищах – у каталогах, базах даних, сховищах даних, на web-джерелах. Утім, проблеми комп'ютерного пошуку слід чітко відокремлювати від проблем побудови моделей пошукових процесів фізичних об'єктів, адже комп'ютерний (інформаційний) пошук стосується лише процесів пошуку й обробки інформації, контроль яких може здійснювати один користувач. А от пошук фізичного та, можливо, активного об'єкта вимагає значно більших зусиль і ресурсів, серед яких на перше місце виходять фізичні сили, фінансові засоби, а також й інформаційне забезпечення. Тому моделювання пошуків об'єкта в умовах часткової невизначеності є набагато більш проблемним й об'ємним, ніж питання інформаційного пошуку. Власне, головна проблематика у пошуках фізичного та потенційно активного об'єкта полягає у повному враховуванні його здатності до свідомого переховування і маскування або, якщо шукають зниклу чи заблукалу людину, до найбільш несприятливих вчинків [1, 6]. Іншими словами, головною проблемою при моделюванні пошуку об'єкта є формулювання принципу оптимальної організації пошукового процесу з урахуванням найбільш несприятливих дій з боку об'єкта по відношенню до кінцевої мети цього процесу – виявити місце його розташування.

Мета та постановка завдань статті. Відштовхуватимемося від того, що область пошуків об'єкта є прямокутною, і вона поділена на S однакових прямокутних смуг, де $S \in \mathbb{N}$, кожна з яких розбита на N, де $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, ідентичних зон. В s-й смузі відомі OS-імовірності, де в n-й зоні сегмент ненульової міри

$$\left[p_1^{\langle s \rangle}(n);\, p_2^{\langle s \rangle}(n) \right] \subset (0;\, 1) \tag{3}$$

є відомим $\forall\, s = \overline{1,\, S}$ та $\forall\, n = \overline{1,\, N-1}$. OS-імовірність в N-й зоні s-ї смуги визначається з (1) як

$$x_N(s) = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} x_n(s) \tag{4}$$

при $\quad x_n(s) \in \left[p_1^{\langle s \rangle}(n);\, p_2^{\langle s \rangle}(n) \right] \subset (0;\, 1)$;

$$\forall\, s = \overline{1,\, S} \text{ та } \forall\, n = \overline{1,\, N-1} \tag{5}$$

й $\; x_N(s) \in \left[p_1^{\langle s \rangle}(N);\, p_2^{\langle s \rangle}(N) \right] \subset (0;\, 1) \quad \forall\, s = \overline{1,\, S}$. (6)

Одна з найпростіших моделей усунення часткових невизначеностей імовірнісного типу (3) $\forall\, s = \overline{1,\, S}$ та $\forall\, n = \overline{1,\, N-1}$ полягає у мінімізації максимального дисбалансу N припущених значень

$$y_n(s) \in \left[p_1^{\langle s \rangle}(n);\, p_2^{\langle s \rangle}(n) \right] \subset (0;\, 1);$$

$$\forall\, s = \overline{1,\, S} \text{ та } \forall\, n = \overline{1,\, N} \tag{7}$$

OS-імовірностей та N невідомих значень (5) і (6) цих імовірностей. Для цього $\forall\, s = \overline{1,\, S}$ згідно з роботою [7] необхідно скласти антагоністичну гру з ядром як функцією $2N-2$ змінних, у якому будуть $N-1$ значення $\{x_n(s)\}_{n=1}^{N-1}$ й $N-1$ значення $\{y_n(s)\}_{n=1}^{N-1}$. На основі розв'язку цієї гри, де вже будуть точкові оцінки OS-імовірностей, складатимемо модель оптимального розподілу пошукових ресурсів для організації пошукового процесу щодо об'єкта, враховуючи увесь спектр можливих його дій за допомогою відповідного антагоністичного моделювання.

Розв'язки антагоністичної гри для усунення часткових невизначеностей

Згідно з [7] ядром антагоністичної гри для усунення часткових невизначеностей як мінімізації максимального дисбалансу N припущених значень (7) OS-імовірностей та N невідомих значень (5) і (6) цих імовірностей є функція

$$\begin{aligned} & K\left[\mathbf{X}_{N-1}(s),\, \mathbf{Y}_{N-1}(s) \right] = \\ & = K\left[x_1(s),\, \ldots,\, x_{N-1}(s),\, y_1(s),\, \ldots,\, y_{N-1}(s) \right] = \\ & = \max \left\{ \frac{x_1(s)}{y_1(s)},\, \frac{x_2(s)}{y_2(s)},\, \ldots,\, \frac{x_{N-1}(s)}{y_{N-1}(s)},\, \frac{1 - \sum\limits_{n=1}^{N-1} x_n(s)}{1 - \sum\limits_{n=1}^{N-1} y_n(s)} \right\} = \\ & = \max \left\{ \left\{ \frac{x_k(s)}{y_k(s)} \right\}_{k=1}^{N-1},\, \left[1 - \sum_{n=1}^{N-1} x_n(s) \right] \Big/ \left[1 - \sum_{n=1}^{N-1} y_n(s) \right] \right\} \end{aligned} \tag{8}$$

на паралелепіпеді

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{n=1}^{N-1} \left[p_1^{\langle s \rangle}(n);\, p_2^{\langle s \rangle}(n) \right] \right\} \times \left\{ \prod_{m=1}^{N-1} \left[p_1^{\langle s \rangle}(m);\, p_2^{\langle s \rangle}(m) \right] \right\} \subset \\ & \subset \left\{ \prod_{n=1}^{N-1} (0;\, 1) \right\} \times \left\{ \prod_{m=1}^{N-1} (0;\, 1) \right\} = \left\{ \prod_{k=1}^{2N-2} (0;\, 1) \right\} \subset \\ & \subset \left\{ \prod_{n=1}^{N-1} (0;\, 1) \right\} \times \left\{ \prod_{m=1}^{N-1} (0;\, 1) \right\} = \left\{ \prod_{k=1}^{2N-2} (0;\, 1) \right\} \subset R^{2N-2} \end{aligned} \tag{9}$$

при (5) та

$$\begin{aligned} & y_m(s) \in \left[p_1^{\langle s \rangle}(m);\, p_2^{\langle s \rangle}(m) \right] \subset (0;\, 1) \\ & \forall\, s = \overline{1,\, S} \text{ та } \forall\, m = \overline{1,\, N-1}, \end{aligned} \tag{10}$$

де

$$\begin{aligned} & \mathbf{X}_{N-1}(s) = \left[x_1(s) \quad x_2(s) \quad \cdots \quad x_{N-2}(s) \quad x_{N-1}(s) \right] \subset \\ & \subset \left\{ \prod_{n=1}^{N-1} (0;\, 1) \right\} \subset \left\{ \prod_{n=1}^{N-1} (0;\, 1) \right\} \subset R^{N-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

й

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}_{N-1}(s) = \left[y_1(s) \quad y_2(s) \quad \cdots \quad y_{N-2}(s) \quad y_{N-1}(s) \right] \subset \\ & \subset \left\{ \prod_{m=1}^{N-1} (0;\, 1) \right\} \subset \left\{ \prod_{m=1}^{N-1} (0;\, 1) \right\} \subset R^{N-1}. \end{aligned} \tag{12}$$

Очевидно, що диспетчера пошукового процесу у цій грі персоніфікує другий гравець. Для відшукування у грі з ядром (8) на паралелепіпеді (9) оптимальних стратегій другого гравця можна використати принцип розв'язування опуклих антагоністичних ігор, оскільки ця гра є опуклою [7].

Справді, для антагоністичної гри з ядром (8) на паралелепіпеді (9) умовами опуклості є

$$\frac{\partial^2}{\partial y_m(s)\, \partial y_m(s)} K\left[X_{N-1}(s),\, Y_{N-1}(s) \right] \geq 0$$

$$\forall\, y_n(s) \in \left[p_1^{\langle s \rangle}(n);\, p_2^{\langle s \rangle}(n) \right]$$

$$\text{та } \forall\, x_k(s) \in \left[p_1^{\langle s \rangle}(k);\, p_2^{\langle s \rangle}(k) \right]$$

при $n=\overline{1,\,N-1}$ та $k=\overline{1,\,N-1}$, $m=\overline{1,\,N-1}$. (13)

При цьому функція (8) є диференційовною за компонентами (12) майже скрізь. Тоді, беручи перші частинні похідні, отримуємо майже скрізь

$$\frac{\partial}{\partial y_m(s)}K\left[\mathbf{X}_{N-1}(s),\,\mathbf{Y}_{N-1}(s)\right]\in$$

$$\in\left\{-\frac{x_m(s)}{\left[y_m(s)\right]^2},\;0,\left[1-\sum_{n=1}^{N-1}x_n(s)\right]\Big/\left[1-\sum_{n=1}^{N-1}y_n(s)\right]^2\right\}$$

$$\forall\; m=\overline{1,\,N-1} \qquad (14)$$

при (10). З виразів (14) слідують співвідношення

$$\frac{\partial^2}{\partial y_m(s)\partial y_m(s)}K\left[\mathbf{X}_{N-1}(s),\,\mathbf{Y}_{N-1}(s)\right]\in$$

$$\in\left\{\frac{2x_m(s)}{\left[y_m(s)\right]^3},\;0,\;2\left[1-\sum_{n=1}^{N-1}x_n(s)\right]\Big/\left[1-\sum_{n=1}^{N-1}y_n(s)\right]^3\right\}$$

$$\forall\; m=\overline{1,\,N-1} \qquad (15)$$

майже скрізь при (10). Чисельник і знаменник кожного з двох виразів під знаком максимумів у (15) є додатними, оскільки сегменти (3) $\forall\, s=\overline{1,\,S}$ та $\forall\, n=\overline{1,\,N-1}$ є сегментами ненульової міри, що, зокрема, дає

$$0<p_1^{\langle s\rangle}(k)<p_2^{\langle s\rangle}(k)<1 \quad \forall\; k=\overline{1,\,N-1}. \qquad (16)$$

На нуль-вимірних множинах, де функція (8) не є диференційовною, її перші похідні (14) як функції від аргументів $\left\{y_m(s)\right\}_{m=1}^{N-1}$ "стрибають" з меншого значення у більше, тому на цих множинах

$$\frac{\partial^2}{\partial y_m(s)\partial y_m(s)}K\left[\mathbf{X}_{N-1}(s),\,\mathbf{Y}_{N-1}(s)\right]=\infty,$$

і фактично (13) залишається у силі. Тому умова опуклості (13) антагоністичної гри з ядром (8) на паралелепіпеді (9) є справедливою (Теорема 1 у [7]).

Як наслідок, в антагоністичній грі з ядром (8) на паралелепіпеді (9) другий гравець володіє лише одною оптимальною стратегією, котра, до того ж, є чистою (наслідок 1 у [7]). І те, що ця оптимальна стратегія

$$\mathbf{Y}_{N-1}^{*}(s)=\left[y_1^{*}(s)\;\; y_2^{*}(s)\;\;\cdots\;\; y_{N-2}^{*}(s)\;\; y_{N-1}^{*}(s)\right]\subset$$
$$\subset\left\{\prod_{m=1}^{N-1}(0;\,1)\right\}\subset\left\{\prod_{m=1}^{N-1}(0;\,1)\right\}\subset\mathbb{R}^{N-1}. \qquad (17)$$

є чистою, допоможе коректно усунути невизначеності, адже для оптимальної змішаної стратегії, котра не є чистою, зробити це набагато важче, особливо при великому її спектрі. Власне, оптимальна стратегія (17) буде знайдена як елемент

$$\mathbf{Y}_{N-1}^{*}(s)\in\arg\left\{\min_{\mathbf{Y}_{N-1}(s)\in\left\{\prod_{m=1}^{N-1}\left[p_1^{\langle s\rangle}(m);\,p_2^{\langle s\rangle}(m)\right]\right\}}\;\max_{\mathbf{X}_{N-1}(s)\in\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\left[p_1^{\langle s\rangle}(n);\,p_2^{\langle s\rangle}(n)\right]\right\}}K\left[\mathbf{X}_{N-1}(s),\,\mathbf{Y}_{N-1}(s)\right]\right\}. \qquad (18)$$

У [7] показано (теорема 2), що компоненти оптимальної стратегії (17) в антагоністичній грі з ядром (8) на паралелепіпеді (9) визначаються як

$$y_k^{*}(s)=\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)}{1+\sum\limits_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)-\sum\limits_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m)} \quad \forall\; k=\overline{1,\,N-1} \qquad (19)$$

тільки тоді, коли

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)}{1+\sum\limits_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)-\sum\limits_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m)}\geq p_1^{\langle s\rangle}(k) \qquad (20)$$

та

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)}{1+\sum\limits_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)-\sum\limits_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m)}\leq p_2^{\langle s\rangle}(k) \qquad (21)$$

для усіх $k=\overline{1,\,N-1}$.

У цьому легко переконатися, оскільки, знаходячи стратегію (17) як елемент (18), отримуємо спочатку максимум ядра (8) на паралелепіпеді (9):

$$\max_{\mathbf{X}_{N-1}(s)\in\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\left[p_1^{\langle s\rangle}(n);\,p_2^{\langle s\rangle}(n)\right]\right\}}K\left[\mathbf{X}_{N-1}(s),\,\mathbf{Y}_{N-1}(s)\right]=\max_{\mathbf{X}_{N-1}(s)\in\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\left[p_1^{\langle s\rangle}(n);\,p_2^{\langle s\rangle}(n)\right]\right\}}\left\{\max\left\{\left\{\frac{x_k(s)}{y_k(s)}\right\}_{k=1}^{N-1},\left[1-\sum_{k=1}^{N-1}x_k(s)\right]\Big/\left[1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k(s)\right]\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\left\{\max_{x_n(s)\in\left[p_1^{\langle s\rangle}(n);\,p_2^{\langle s\rangle}(n)\right]}\left\{\frac{x_n(s)}{y_n(s)}\right\}\right\}_{n=1}^{N-1},\;\max_{\mathbf{X}_{N-1}(s)\in\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\left[p_1^{\langle s\rangle}(n);\,p_2^{\langle s\rangle}(n)\right]\right\}}\left[1-\sum_{k=1}^{N-1}x_k(s)\right]\Big/\left[1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k(s)\right]\right\}= \qquad (22)$$

$$=\max\left\{\left\{\frac{p_2^{\langle s\rangle}(n)}{y_n(s)}\right\}_{n=1}^{N-1},\;\frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)}{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}y_k(s)}\right\}=\max\left\{\frac{p_2^{\langle s\rangle}(1)}{y_1(s)},\,\frac{p_2^{\langle s\rangle}(2)}{y_2(s)},\,\ldots,\,\frac{p_2^{\langle s\rangle}(N-1)}{y_{N-1}(s)},\;\frac{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)}{1-\sum\limits_{k=1}^{N-1}y_k(s)}\right\}$$

як функцію $N-1$ змінної $\left\{x_n(s)\right\}_{n=1}^{N-1}$ на добутку $\prod\limits_{n=1}^{N-1}\left[p_1^{\langle s\rangle}(n);\,p_2^{\langle s\rangle}(n)\right]$. Мінімум функції (22) змінних $\left\{y_n(s)\right\}_{n=1}^{N-1}$, складеної із частин гіперболічних гіперповерхонь на добутку $\prod\limits_{m=1}^{N-1}\left[p_1^{\langle s\rangle}(m);\,p_2^{\langle s\rangle}(m)\right]$, досягається тоді, коли N внутрішніх виразів під знаком максимуму у (22) є рівними:

$$\min_{\mathbf{Y}_{N-1}(s)\in\prod_{m=1}^{N-1}\left[p_1^{\langle s\rangle}(m);\,p_2^{\langle s\rangle}(m)\right]}\left\{\max_{\mathbf{X}_{N-1}(s)\in\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\left[p_1^{\langle s\rangle}(n);\,p_2^{\langle s\rangle}(n)\right]\right\}} K\left[\mathbf{X}_{N-1}(s),\,\mathbf{Y}_{N-1}(s)\right]\right\}=\min_{\mathbf{Y}_{N-1}(s)\in\prod_{m=1}^{N-1}\left[p_1^{\langle s\rangle}(m);\,p_2^{\langle s\rangle}(m)\right]}\times$$

$$\times\left\{\max\left\{\left\{\frac{p_2^{\langle s\rangle}(n)}{y_n(s)}\right\}_{n=1}^{N-1},\ \frac{1-\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)}{1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k(s)}\right\}\right\}=\max\left\{\left\{\frac{p_2^{\langle s\rangle}(n)}{y_n^*(s)}\right\}_{n=1}^{N-1},\ \frac{1-\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)}{1-\sum_{k=1}^{N-1}y_k^*(s)}\right\}=v_{opt}(s),\qquad(23)$$

де

$$v_{opt}(s)=\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)}{y_k^*(s)}=\frac{1-\sum_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m)}{1-\sum_{m=1}^{N-1}y_m^*(s)}\quad\forall\ k=\overline{1,\,N-1}.\qquad(24)$$

Із (24) маємо

$$y_m^*(s)=\frac{p_2^{\langle s\rangle}(m)}{p_2^{\langle s\rangle}(k)}y_k^*(s)$$

$$\forall\ m=\overline{1,\,N-1}\ \text{ та }\ \forall\ k=\overline{1,\,N-1},\qquad(25)$$

а також
$$y_k^*(s)\left(1-\sum_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m)\right)=$$

$$=p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum_{m=1}^{N-1}y_m^*(s)\right)\quad\forall\ k=\overline{1,\,N-1},\qquad(26)$$

причому
$$p_2^{\langle s\rangle}(k)\,y_m^*(s)=$$

$$=p_2^{\langle s\rangle}(k)\frac{p_2^{\langle s\rangle}(m)}{p_2^{\langle s\rangle}(k)}y_k^*(s)=p_2^{\langle s\rangle}(m)\,y_k^*(s).\qquad(27)$$

Тоді, згідно зі співвідношенням (27), права частина у співвідношенні (26) набуває вигляду

$$p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum_{m=1}^{N-1}y_m^*(s)\right)=p_2^{\langle s\rangle}(k)-\sum_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(k)\,y_m^*(s)=$$

$$=p_2^{\langle s\rangle}(k)-\sum_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)\,y_k^*(s)=$$

$$=p_2^{\langle s\rangle}(k)-y_k^*(s)\sum_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m).\qquad(28)$$

Звідси, підставляючи (28) у праву частину співвідношення (26), отримуємо (19). Й очевидно, що (19) має місце тільки тоді, коли виконані умови (20) і (21), адже

$$y_k^*(s)\in\left[p_1^{\langle s\rangle}(k);\,p_2^{\langle s\rangle}(k)\right]\quad\forall\ k=\overline{1,\,N-1}.$$

При порушенні однієї з умов (20) і (21) точка (19) не може бути k-ою компонентою стратегії (17). І для того, щоб значення (19) було k-ю компонентою оптимальної стратегії другого гравця (17) в антагоністичній грі з ядром (8) на паралелепіпеді (9), необхідно виконання нерівності (теорема 3 у [7]):

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)-p_1^{\langle s\rangle}(k)}{\sum_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)-\sum_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m)}\ge p_1^{\langle s\rangle}(k),\quad k=\overline{1,\,N-1}.\qquad(29)$$

Дійсно, значення (19) є k-ю компонентою оптимальної стратегії другого гравця (17) за необхідних умов (20) і (21). Із (20) маємо

$$p_2^{\langle s\rangle}(k)\ge p_1^{\langle s\rangle}(k)+p_1^{\langle s\rangle}(k)\sum_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)-p_1^{\langle s\rangle}(k)\sum_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m);$$

$$p_2^{\langle s\rangle}(k)-p_1^{\langle s\rangle}(k)\ge p_1^{\langle s\rangle}(k)\left(\sum_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)-\sum_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m)\right),$$

звідки випливає (29). Із (21) маємо

$$1\le 1+\sum_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)-\sum_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m),\qquad(30)$$

де використані нерівності (16) і нерівність

$$\sum_{k=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(k)<1,\qquad(31)$$

котра слідує із (3) $\forall\ s=\overline{1,\,S}$ та $\forall\ n=\overline{1,\,N}$ та (4). Далі із (30) виходить, що

$$\sum_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)-\sum_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m)\ge 0,\qquad(32)$$

а це, завдяки тим же умовам у (16), виконано завжди. Тому однієї умови (29) достатньо, щоб виконувались (20) і (21), за яких значення (19) може бути k-ю компонентою оптимальної стратегії другого гравця (17). Зрозуміло, що значення (19) є k-ю компонентою оптимальної стратегії другого гравця (17) як (18) тоді, коли нерівності (29) виконані $\forall\ k=\overline{1,\,N-1}$ (необхідність переходить у достатність, наслідок 2 у [7]). Крім того, якщо $N-1$ часткових невизначеностей $\left\{\left[p_1^{\langle s\rangle}(n);\,p_2^{\langle s\rangle}(n)\right]\right\}_{n=1}^{N-1}$ імовірнісного типу у значеннях $N-1$ OS-імовірності є однаковими,

$$\left[p_1^{\langle s\rangle}(n);\,p_2^{\langle s\rangle}(n)\right]=\left[p_1^{\langle s\rangle};\,p_2^{\langle s\rangle}\right];$$

$$\forall\ n=\overline{1,\,N-1}\ \text{ при }\ s=\overline{1,\,S},\qquad(33)$$

то в антагоністичній грі з ядром (8) на паралелепіпеді (9) кожною компонентою оптимальної стратегії другого гравця (17) є одне й те саме значення (Наслідок 3 у [7]), причому

$$y_k^*(s)=\frac{p_2^{\langle s\rangle}}{1+(N-1)\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right)}$$

$$\forall\ k=\overline{1,\,N-1}\ \text{ при }\ s=\overline{1,\,S}.\qquad(34)$$

Це безпосереднім чином випливає з того, що за умов (33) із (19) отримаємо (34), а з умови (29) отримаємо

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}}{(N-1)\left(p_2^{\langle s\rangle}-p_1^{\langle s\rangle}\right)} \ge p_1^{\langle s\rangle};\quad \frac{1}{N-1} \ge p_1^{\langle s\rangle}, \qquad (35)$$

справедливість нерівності (35) випливає з (16) і (31).

Але, що цікаво, умова (29) не може бути порушена одночасно $\forall\ k=\overline{1,\ N-1}$. І, згідно з теоремою 4 у роботі [7], для антагоністичної гри з ядром (8) на паралелепіпеді (9) знайдеться хоча б одне $k\in\left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$ таке, що умова (29) буде виконана. Це легко показати, припустивши протилежне: якщо б умова (29) не виконувалася для жодного $k\in\left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$, то було б

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)-p_1^{\langle s\rangle}(k)}{\sum\limits_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)-\sum\limits_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m)} < p_1^{\langle s\rangle}(k)\quad \forall\ k=\overline{1,\ N-1}. \quad (36)$$

Сумуючи по $k=\overline{1,\ N-1}$ ліві та праві частини нерівності (36), отримуємо

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left[p_2^{\langle s\rangle}(k)-p_1^{\langle s\rangle}(k)\right]<$$

$$<\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)\left(\sum_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)-\sum_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m)\right),$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(k)<\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)\sum_{m=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(m)-$$

$$-\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)\sum_{m=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(m)+\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k),$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(k)-\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)\sum_{k=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(k)<$$

$$<-\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)+\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k),$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)\right)<\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k)\right),$$

$$\sum_{k=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(k)<\sum_{k=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(k),$$

що неможливо. Отже, умова (29) не може не виконуватись для жодного $k\in\left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$, тому знайдеться хоча б одне $k\in\left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$ таке, що вона буде виконана.

Якщо ж принаймні одна з умов (29) порушується, то компоненти оптимальної стратегії (17) знаходяться за теоремою 5 із [7], згідно з якою за умови

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k_m)-p_1^{\langle s\rangle}(k_m)}{\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(i)-\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)}<p_1^{\langle s\rangle}(k_m)$$

при $\{k_m\}_{m=1}^{M}=\mathcal{M}$, $M\in\left\{\overline{1,\ N-2}\right\}$, $k_m\in\left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$ (37)

k_m-ю компонентою оптимальної стратегії другого гравця (17) є

$$y_{k_m}^*(s)=p_1^{\langle s\rangle}(k_m), \qquad (38)$$

а $$y_k^*(s)=\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum\limits_{m=1}^{M}p_1^{\langle s\rangle}(k_m)\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(i)-\sum\limits_{m=1}^{M}p_2^{\langle s\rangle}(k_m)-\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)}$$

при $k\in\left\{\overline{1,\ N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}$ (39)

за умов

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum\limits_{m=1}^{M}p_1^{\langle s\rangle}(k_m)\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(i)-\sum\limits_{m=1}^{M}p_2^{\langle s\rangle}(k_m)-\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)}\geqslant p_1^{\langle s\rangle}(k)$$

при $k\in\left\{\overline{1,\ N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}$ (40)

та $$\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum\limits_{m=1}^{M}p_1^{\langle s\rangle}(k_m)\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(i)-\sum\limits_{m=1}^{M}p_2^{\langle s\rangle}(k_m)-\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)}\leqslant p_2^{\langle s\rangle}(k)$$

при $k\in\left\{\overline{1,\ N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}$. (41)

Справді, замість (24) із (23) матимемо

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)}{y_k^*(s)}=\frac{1-\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)}{1-\sum\limits_{i=1}^{N-1}y_i^*(s)}\quad \text{при}\ k\in\left\{\overline{1,\ N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}, \quad (42)$$

де $$y_{k_m}^*(s)>\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k_m)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(i)-\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)}\quad \forall m=\overline{1,M}, \quad (43)$$

адже умова (37) означає

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k_m)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(i)-\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)}<p_1^{\langle s\rangle}(k_m)\quad \forall\ m=\overline{1,\ M}, \quad (44)$$

а має бути $y_{k_m}^*(s)\in\left[p_1^{\langle s\rangle}(k_m);\ p_2^{\langle s\rangle}(k_m)\right]$ $\forall\ m=\overline{1,\ M}$. Найближчою точкою до лівої частини у (44) є лівий кінець $p_1^{\langle s\rangle}(k_m)$ сегмента $\left[p_1^{\langle s\rangle}(k_m);\ p_2^{\langle s\rangle}(k_m)\right]$. Якщо має місце (38), то

$$\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k_m)}{y_{k_m}^*(s)}=\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k_m)}{p_1^{\langle s\rangle}(k_m)}<\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)}{y_k^*(s)}=$$

$$=\frac{1-\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)}{1-\sum\limits_{j=1}^{M}y_{k_j}^*(s)-\sum\limits_{l\in\left\{\overline{1,\ N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}}y_l^*(s)}$$

при $k\in\left\{\overline{1,\ N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}$, $\forall\ m=\overline{1,\ M}$, (45) де $$v_{opt}(s)=\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)}{y_k^*(s)}=\frac{1-\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)}{1-\sum\limits_{j=1}^{M}y_{k_j}^*(s)-\sum\limits_{l\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}}y_l^*(s)}$$

при $$k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}. \qquad (46)$$

Із (45) видно, що при $y_{k_m}^*(s)>p_1^{\langle s\rangle}(k_m)$ використання хоча б однієї такої k_m-ї компоненти в оптимальній стратегії другого гравця (17) ніяк не зменшить оптимальне значення гри (46) $\forall\ m=\overline{1,\,M}$, а хіба що збільшить останній у (46) дріб, оскільки його знаменник буде зменшений. Таким чином, при $y_{k_m}^*(s)>p_1^{\langle s\rangle}(k_m)$ другий гравець може тільки збільшити виграш першого гравця, тому має місце (38) $\forall\ m=\overline{1,\,M}$. При цьому решта $\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}$ компонент оптимальної стратегії другого гравця (17) є коренями рівнянь у співвідношенні (46), з якого послідовно маємо

$$y_l^*(s)=\left(p_2^{\langle s\rangle}(l)\big/p_2^{\langle s\rangle}(k)\right)\cdot y_k^*(s)$$

при $$l\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}\ \text{ та }\ k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}, \qquad (47)$$

$$y_k^*(s)\left(1-\sum_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)\right)=$$
$$=p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum_{j=1}^{M}y_{k_j}^*(s)-\sum_{l\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}}y_l^*(s)\right)$$

при $$k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}. \qquad (48)$$

Згідно з (47) права частина (48) перетворюється у таке:

$$p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum_{j=1}^{M}y_{k_j}^*(s)-\sum_{l\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}}y_l^*(s)\right)=$$
$$=p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum_{j=1}^{M}y_{k_j}^*(s)\right)-p_2^{\langle s\rangle}(k)\sum_{l\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}}y_l^*(s)=$$
$$=p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum_{j=1}^{M}y_{k_j}^*(s)\right)-y_k^*(s)\sum_{l\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}}p_2^{\langle s\rangle}(l)=$$
$$=p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum_{j=1}^{M}y_{k_j}^*(s)\right)-y_k^*(s)\left(\sum_{i=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(i)-\sum_{j=1}^{M}p_2^{\langle s\rangle}(k_j)\right)$$

при $$k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}. \qquad (49)$$

Звідси, з урахуванням $\forall\ m=\overline{1,\,M}$ співвідношення (38) і, підставляючи (49) у праву частину співвідношення (48), отримуємо компоненти (39). Очевидно, що (39) має місце тільки тоді, коли виконані умови (40) і (41), адже $y_k^*(s)\in\left[p_1^{\langle s\rangle}(k);\,p_2^{\langle s\rangle}(k)\right]$ для кожного $k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}$. Як наслідок, умова (41) виконана завжди, а при порушенні умови (40) значення (39) не є k-ю компонентою оптимальної стратегії (Наслідок 4 у роботі [7]) другого гравця (17) в антагоністичній грі з ядром (8) на паралелепіпеді (9). Це доводиться елементарно: із (41) завдяки (16) і (31) маємо

$$1-\sum_{m=1}^{M}p_1^{\langle s\rangle}(k_m)\leqslant 1+\sum_{i=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(i)-\sum_{m=1}^{M}p_2^{\langle s\rangle}(k_m)-\sum_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i),$$
$$-\sum_{m=1}^{M}p_1^{\langle s\rangle}(k_m)\leqslant \sum_{i=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(i)-\sum_{m=1}^{M}p_2^{\langle s\rangle}(k_m)-\sum_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i),$$
$$0\leqslant \sum_{i=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(i)-\sum_{m=1}^{M}p_2^{\langle s\rangle}(k_m)-$$
$$-\left(\sum_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)-\sum_{m=1}^{M}p_1^{\langle s\rangle}(k_m)\right), \qquad (50)$$

причому завдяки (16) нерівність (50) виконана завжди. Якщо ж порушено (40), то вийде, що точка

$$y_k^*(s)=$$
$$=\frac{p_2^{\langle s\rangle}(k)\left(1-\sum\limits_{m=1}^{M}p_1^{\langle s\rangle}(k_m)\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_2^{\langle s\rangle}(i)-\sum\limits_{m=1}^{M}p_2^{\langle s\rangle}(k_m)-\sum\limits_{i=1}^{N-1}p_1^{\langle s\rangle}(i)}<p_1^{\langle s\rangle}(k)$$

при $$k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}, \qquad (51)$$

а має бути $y_k^*(s)\in\left[p_1^{\langle s\rangle}(k);\,p_2^{\langle s\rangle}(k)\right]$ при $k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}$. Втім, таке трапляється дуже рідко, де, зазвичай, для деякого $s\in\left\{\overline{1,\,S}\right\}$ OS-імовірності $\left\{\left[p_1^{\langle s\rangle}(n);\,p_2^{\langle s\rangle}(n)\right]\right\}_{n=1}^{N-1}$ були некоректно оцінені (тому вони мають бути переоцінені), і питання про знаходження тих компонент оптимальної стратегії другого гравця (17), для яких виходить (51), можна відкласти [7].

Модель оптимального розподілу пошукових ресурсів для організації диспетчером пошукового процесу щодо об'єкта

Зараз вже можна використати точкові оцінки $\left\{y_n^*(s)\right\}_{n=1}^{N-1}$ OS-імовірностей в оптимальній стратегії (17) диспетчера пошукового процесу для того, щоб на s-й смузі оптимально розподілити пошукові ресурси в N зон цієї смуги, $s=\overline{1,\,S}$. Звісно, точкова оцінка в N-й зоні s-ої смуги

$$y_N^*(s)=1-\sum_{n=1}^{N-1}y_n^*(s) \qquad (52)$$

завдяки (4).

Для того, щоб оптимально розподілити пошукові ресурси з урахуванням усього різноманіття можливих дій об'єкта пошуків, складемо антагоністичну пошукову модель, де першим гравцем буде диспетчер пошукового процесу, а другим – об'єкт пошуків. Одним з найпоширеніших варіантів моделей пошуків з антагоністичною основою є діагональна гра [1, 5, 6], де не враховуються витрати ресурсів для пошуку об'єкта на s-й смузі. Такою діагональною грою на s-й смузі буде матрична $N \times N$-гра з матрицею $\mathbf{W}(s) = \left[w_{jk}(s)\right]_{N \times N}$, де j-ою чистою стратегією першого гравця (диспетчера) є рішення про пошук об'єкта у j-й зоні, а k-ю чистою стратегією другого гравця (активного об'єкта) є рішення про переховування (або, принаймні, просто перебування) у k-й зоні s-ї смуги, $j = \overline{1, N}$ та $k = \overline{1, N}$.

У діагональній $\mathbf{W}(s) = \left[w_{jk}(s)\right]_{N \times N}$-грі обидва гравці володіють ідентичними оптимальними стратегіями [5]

$$\mathbf{H}^*(s) = \left[h_1^*(s) \quad h_2^*(s) \quad \cdots \quad h_{N-1}^*(s) \quad h_N^*(s)\right] \in$$

$$\in \left\{\mathbf{H}^*(s) \in \mathbb{R}^N : h_j^*(s) \geqslant 0,\ \sum_{j=1}^{N} h_j^*(s) = 1\right\} \tag{53}$$

на кожній s-й смузі. Зрозуміло, що

$$w_{jk}(s) = 0 \text{ при } j \neq k \text{ та } w_{jj}(s) > 0$$

при $$j = \overline{1, N} \text{ та } k = \overline{1, N}. \tag{54}$$

Елементи матриць

$$\left\{\mathbf{W}(s) = \left[w_{jk}(s)\right]_{N \times N}\right\}_{s=1}^{S}$$

відповідають визначеним точковим оцінкам $\left\{y_n^*(s)\right\}_{n=1}^{N}$ OS-імовірностей в оптимальній стратегії (17) диспетчера пошукового процесу разом з (52). Але очевидно, що матриця $\mathbf{W}(s)$ залежатиме від розв'язку $\mathbf{H}^*(s-1)$ $\forall\ s = \overline{2, S}$. Хоча, очевидно, на першій смузі

$$w_{jj}(1) = y_j^*(1) \quad \forall\ j = \overline{1, N}. \tag{55}$$

А ось на наступних смугах в елементах матриць $\left\{\mathbf{W}(s)\right\}_{s=2}^{S}$ додатково, окрім оцінок $\left\{\left\{y_n^*(s)\right\}_{n=1}^{N}\right\}_{s=2}^{S}$ OS-імовірностей, мають враховуватись оптимальні стратегії диспетчера на попередніх смугах зі збереженням умови

$$\sum_{j=1}^{N} w_{jj}(s) = 1 \quad \forall\ s = \overline{1, S}. \tag{56}$$

Таке враховування означає те, що у j-й зоні точкова оцінка OS-імовірності $y_j^*(s)$ має бути зважена з j-ю компонентою $h_j^*(s-1)$ оптимальної стратегії диспетчера $\mathbf{H}^*(s-1)$ при $s = \overline{2, S}$.

Умова (56) для $s = 1$ виконується завдяки покладанню (55). А далі, починаючи з другої смуги,

$$w_{jj}(s) = \frac{h_j^*(s-1)\, y_j^*(s)}{\sum_{k=1}^{N-1} h_k^*(s-1)\, y_k^*(s) + h_N^*(s-1)\left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} y_k^*(s)\right)} =$$

$$= \frac{h_j^*(s-1)\, y_j^*(s)}{\sum_{k=1}^{N} h_k^*(s-1)\, y_k^*(s)} \quad \forall\ j = \overline{1, N} \text{ та } \forall\ s = \overline{2, S}. \tag{57}$$

Тут, завдяки знаменнику у співвідношенні (57), умова (56) дійсно виконується. А оптимальна стратегія (53) у діагональній $\mathbf{W}(s)$-грі має компоненти

$$h_j^*(s) = \frac{\left[w_{jj}(s)\right]^{-1}}{\sum_{k=1}^{N} \left[w_{kk}(s)\right]^{-1}} \quad \forall\ j = \overline{1, N} \text{ та } \forall\ s = \overline{1, S}. \tag{58}$$

Підкреслимо ще раз, що для $s = 1$ у (58) братимуться елементи (55) оптимальної стратегії другого гравця у грі з ядром (8) на паралелепіпеді (9), а для $s = \overline{2, S}$ у (58) підставлятимуться значення (57).

Вектори $\left\{\mathbf{H}^*(s)\right\}_{s=1}^{S}$ як розв'язки S-етапної діагональної $N \times N$-гри з матрицями виграшів $\left\{\mathbf{W}(s)\right\}_{s=1}^{S}$ містять імовірності $\left\{\left\{h_j^*(s)\right\}_{j=1}^{N}\right\}_{s=1}^{S}$, котрі вказують на потенційне місцеперебування об'єкта у кожній зоні фіксованої смуги області пошуків. Ці імовірності відрізняються від OS-імовірностей тим, що враховують усі можливі дії об'єкта пошуків, котрий, у найгіршому для пошуковців випадку, теж володіє інформацією про OS-імовірності (3) $\forall\ s = \overline{1, S}$ та $\forall\ n = \overline{1, N-1}$. Розв'язаний як (53) антагонізм у математичному розумінні породжується якраз тим, що у розглядуваній задачі пошуку не може бути компромісних рішень або усереднень, і, зокрема, якщо шукають заблукалу людину, потрібно враховувати усі варіанти розвитку подій, включаючи найгірші (наприклад, блукання і потрапляння у ті зони області пошуків, де OS-імовірності є незначними, й об'єкт там очікується найменше; у такі зони можна спрямовувати більші пошукові ресурси).

Знайдені вектори $\left\{\mathbf{H}^*(s)\right\}_{s=1}^{S}$ можна використовувати по-різному, але одним з найпростіших варіантів їх використання (або тлумачення) є спрямовування у j-ту зону s-ї смуги області пошуків пошукових ресурсів, кількість (або об'єм) яких пропорційний значенню $h_j^*(s)$. Під об'ємом пошукових ресурсів можна розуміти як кількість осіб у пошуковому загоні, так і фінансове, інформаційне, технічне забезпечення пошуковців. При цьому під оптимальним розподілом пошукових ресурсів згідно з векторами $\left\{\mathbf{H}^*(s)\right\}_{s=1}^{S}$ у (53) розуміється здійснення диспетчером пошукового процесу заходів щодо спрямовування більших засобів у ті зони, де за OS-імовірностями поява об'єкта менш очікувана. Звичайно, цей принцип можна послабити, перейшовши після розв'язаної антагоністичної гри з ядром (8) на паралелепіпеді (9) до неантагоністичної гри двох гравців (диспетчера й об’єкта), але тільки для випадків пошуку об’єктів неживої природи або заблукалих в області пошуків людей (котра для них, у найгіршому випадку, є незнайомою територією). У випадку ж пошуків (або, радше, розшуку) порушників державного кордону або злочинців викладена модель оптимального розподілу пошукових ресурсів є цілком адекватною.

Висновок та перспектива подальшого дослідження

Моделлю пошуків об’єкта в умовах часткової невизначеності може бути і неантагоністична гра двох осіб, проте розв’язок (53) відповідної діагональної $N \times N$-гри дозволяє отримати розклад імовірностей переховування об’єкта по зонах області пошуків, де як можуть припускатися найвдаліші дії об’єкта проти пошуковців, так і подібні припущення, котрі підсилюють антагонізм взаємодії диспетчер — об’єкт, можуть не розглядатися. Ці імовірності, очевидно, відрізняються від OS-імовірностей, і можуть за аналогією бути названими OA-імовірностями (object avoiding probabilities). При визначення OA-імовірностей $\left\{ \mathbf{H}^*(s) \right\}_{s=1}^{S}$ неможливо обійтись без процедури усунення часткових невизначеностей в оцінках OS-імовірностей (3) $\forall\ s = \overline{1, S}$ та $\forall\ n = \overline{1, N}$, де використовуються доведені у [7] положення для розв’язування антагоністичної гри з ядром (8) на паралелепіпеді (9). А подальше дослідження потрібне лише у напрямку моделі оптимального розподілу пошукових ресурсів для організації диспетчером пошукового процесу щодо об’єкта, де припускатиметься те, що останній не обов’язково діятиме усупереч діям пошуковців (антагонізм у взаємодії диспетчер — об’єкт зникне). Звичайно, якщо за основу моделі усунення часткових невизначеностей імовірнісного типу узяти не мінімізацію максимального дисбалансу, а щось інше, то результати моделювання оптимального розподілу пошукових ресурсів у формі OA-імовірностей виявляться дещо іншими, але принципово не відрізнятимуться від OA-імовірностей $\left\{ \mathbf{H}^*(s) \right\}_{s=1}^{S}$, що визначаються за (58) при (55) і (57) з оптимальною стратегією другого гравця у грі з ядром (8) на паралелепіпеді (9).

Список літератури

1. *Романюк В.В. Моделювання пошуків об’єкта в умовах часткової невизначеності щодо імовірностей його позиціювання у трьох зонах пошукових смуг / В.В. Романюк // Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил. – Х.: ХУ ПС, 2010. – Вип. 4 (26). – С. 139-149.*
2. *Трухаев Р.И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Р.И. Трухаев. – М.: Наука, 1981. – 258 с.*
3. *Юдин Д.Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д.Б. Юдин. – М.: Сов. радио, 1974. – 400 с.: ил.*
4. *Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений / И.Г. Черноруцкий. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.*
5. *Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н.Н. Воробьёв – М.: Наука, 1985. – 272 с.*
6. *Романюк В.В. Елементарна модель пошуку активного об’єкта в умовах часткової невизначеності у формі багатоетапної діагональної 2×2-гри / В.В. Романюк // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2010. – № 6. – С. 64-69.*
7. *Романюк В.В. Модель усунення часткових невизначеностей імовірнісного типу як мінімізація максимального дисбалансу / В.В. Романюк // Науковий вісник Чернівецького університету: зб. наук. пр. Комп’ютерні системи та компоненти. – Чернівці: ЧНУ, 2011.– Т. 2, вип. 1.*

Надійшла до редколегії 8.12.2010

Рецензент: д-р техн. наук, проф. В.Б. Рудницький, Хмельницький національний університет, Хмельницький.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОИСКОВ ОБЪЕКТА В УСЛОВИЯХ ЧАСТИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБЩЕЙ МОДЕЛИ УСТРАНЕНИЯ ЧАСТИЧНЫХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТНОГО ТИПА КАК МИНИМИЗАЦИИ МАКСИМАЛЬНОГО ДИСБАЛАНСА

В.В. Романюк

Найдено оптимальную стратегию второго игрока в выпуклой антагонистической игре с ядром как функцией $2N-2$ переменных на параллелепипеде в $\Re^{2N-2}$, которая является моделью устранения N частичных неопределённостей вероятностного типа как минимизации максимального дисбаланса. В форме многоэтапной диагональной N×N-игры представлено модель оптимального распределения поисковых ресурсов для организации диспетчером поискового процесса относительно объекта физической природы.

Ключевые слова: *частичная неопределённость, антагонистическая игра, выпуклость игры, минимизация максимального дисбаланса, оптимальная стратегия, модель поисков, поисковый процесс, диагональная игра, принятие решения.*

MODELING THE OBJECT SEARCH WITHIN PARTIAL INDETERMINANCY CONDITIONS WITH USING GENERAL MODEL OF REMOVING PARTIAL INDETERMINANCIES OF PROBABILISTIC TYPE AS MAXIMAL DISBALANCE MINIMIZATION

V.V. Romanuke

There has been found the optimal strategy of the second player in the convex antagonistic game with the kernel as a function of $2N-2$ variables on the parallelepiped in $\Re^{2N-2}$, that is a model of removing N partial indeterminancies of the probabilistic type as maximal disbalance minimization. In the form of multistage diagonal N×N-game there has been represented a model of optimally distributing the search resources for organizing the search process with the dispatcher with regard to a physical nature object.

Keywords: *partial indeterminancy, antagonistic game, game convexity, maximal disbalance minimization, optimal strategy, search model, search process, diagonal game, decision making.*