УДК 623.547

Р.В. Кузьменко

Академія сухопутних військ ім. гетьмана П. Сагайдачного, Львів

МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ ПОЛЬОТУ АРТИЛЕРІЙСЬКОЇ МІНИ ЗА ЇЇ ОБРАЗОМ, ЯКИЙ ОТРИМАНО ВІДЕОФІКСАЦІЄЮ

Розглянуто процес польоту артилерійської міни з одночасною фото-відео-фіксацією. Встановлені математичні зв'язки між реальним положенням центру маси артилерійської міни на траєкторії в площині польоту та її проекцією в площині знімання (ПЗС) фото-відео-фіксуючого пристрою. Запропоновано математичну модель побудови реальної траєкторії на основі її образу отриманого за допомогою фото-відео-фіксуючого пристрою, та проведено комп'ютерне моделювання відповідними процедурами пакету Maple 5.00. Дана математична модель надає можливість визначення та уточнення параметрів траєкторії польоту артилерійської міни.

Ключові слова: *математична модель, фото-відео-фіксація, траєкторія, артилерійська міна.*

Вступ

Актуальність теми. Ефективність вогню артилерії досягається в першу чергу точністю та своєчасністю. Розглядаючи власне точність необхідно відмітити, що для її забезпечення попередньо проводиться ряд заходів з визначення установок для стрільби, а саме топогеодезична, метеорологічна, балістична, технічна підготовки. Визначення координат цілей та виконання пристрілки проводиться в супроводі радіолокаційних станцій типу АРК і СНАР-10 [1]. Ними використовується активна радіолокація, що являється суттєвим недоліком у зв'язку з можливістю визначення противником координат місцезнаходження цієї станції. З метою зниження імовірності зворотного удару противника, а також для підвищення точності вогневого ураження, актуальною є задача створення нових методів отримання поправок для стрільби та координат траєкторії польоту серед яких відзначу фототеодолітний метод [2]. Тому подальше опрацювання цього методу являється актуальним.

Метою статті є розроблення математичної моделі побудови траєкторії польоту артилерійської міни за даними відеоспостереження.

Основний матеріал

Подальші дослідження проводилися з використанням наступних припущень:

1. Міна симетрична відносно повздовжньої осі інерції.
2. Кут нутації під час усього руху міни рівний нулю і обертовий рух не впливає на її поступальний рух, лінія дії сили опору повітря проходить через центр маси міни і направлена в протилежному напрямі швидкості руху; тоді рух міни розглядається як рух матеріальної точки під дією сили тяжіння та опору повітря;
3. Прискорення сили тяжіння постійне по величині та напрямку;
4. Атмосферні умови нормальні [3].

Враховуючи величину допусків на виготовлення мін, припущення 1 – 2 відповідають дійсним умовам польоту міни з достатньою точністю для практичного розрахунку траєкторії. Припущення 3 не вносить похибки в практичне значення при розрахунку траєкторії та дальності польоту до 50 км [4].

Розрахунок траєкторії. Відповідно до [4] траєкторія польоту артилерійської міни характеризується системою рівнянь (1), які визначають елементарну зміну координат (x, y) центру мас міни у деякій системі координат xOy, модуля вектора швидкості $V = |\vec{V}|$ (рис. 1), кута θ між вектором швидкості і додатнім напрямом осі Ox з елементарною зміною часу t.

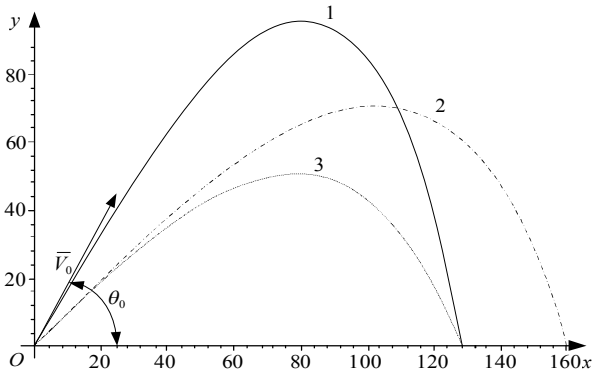

Рис. 1. Траєкторія польоту міни, що розрахована за системою рівнянь (1) та умовами (2) при $x_0 = y_0 = 0$: 1) $V_0 = 100$, $\theta_0 = 60^o$; 2) $V_0 = 100$, $\theta_0 = 45^o$; 3) $V_0 = 70$, $\theta_0 = 45^o$

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} = -cH(y)F(V) - g\sin\theta, \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -g\dfrac{\cos\theta}{V}, \\ \dfrac{dy}{dt} = V\sin\theta, \\ \dfrac{dx}{dt} = V\cos\theta. \end{cases} \quad (1)$$

© Р.В. Кузьменко

де $\tilde{N}$ – безрозмірний балістичний коефіцієнт, відомий параметр, що характеризує калібр міни. Відповідно до [5, 6] для крупнокаліберних снарядів він дорівнює 0.1, для малокаліберної артилерії – 1, а для куль – порядку декількох одиниць; g – прискорення земного тяжіння [м/с^2]; H(y) – відносна зміна густини повітря з висотою польоту міни; F(V) – питома сила опору повітря на одиницю маси тіла. Приймається пропорційною квадрату швидкості снаряду. Коефіцієнт пропорційності різко змінюється лише при швидкостях, близьких до швидкості звуку.

Доповнимо систему рівнянь (1) такими початковими умовами

$$V|_{t=t_{\text{ïî÷}}} = V_0,\ \theta|_{t=t_{\text{ïî÷}}} = \theta_0,$$
$$x|_{t=t_{\text{ïî÷}}} = x_0,\ y|_{t=t_{\text{ïî÷}}} = y_0. \qquad (2)$$

Розв'язок задачі Коші для (1), виконано чисельними методами на основі методів Рунге-Кутта [7].

Приклади траєкторій, що відповідають розв'язку системи рівнянь (1) для різних початкових умов (2) представлено на рис. 1.

Врахування точки спостереження і напряму спостереження. Розташуємо прямокутну декартову систему координат Oxyz таким чином, щоб початок координат співпадав із зрізом каналу ствола мінометa, вісь Oz була спрямована вертикально вгору, вісь Ox спрямована так, що траєкторія міни знаходиться в площині xOz, а вісь Oy спрямована так, що система координат Oxyz правостороння. Міну позначатимемо біжучою точкою M (x_M, y_M, z_M).

За вибраної системи координат

$$x_M \ge 0, y_M = 0 .$$

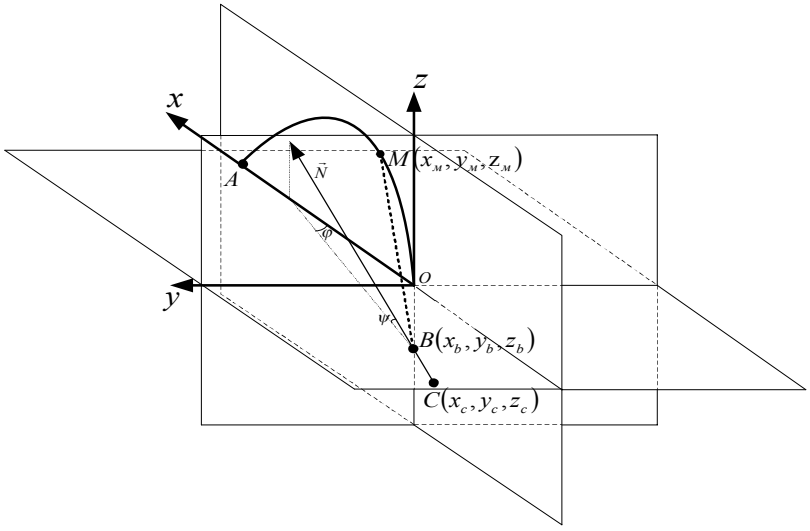

Рис. 2. Схематичне зображення фотографування траєкторії польоту

Відеоспостережний пристрій розташуємо у точці C (x_C, y_C, z_C). Зазвичай $x_M < 0, z_M = 0$. Головну оптичну вісь пристрою спрямуємо із відхиленням від додатнього напряму осі Ox на кути φ та ψ:

– кут φ задається кутом між вертикальною площиною в якій лежить головна оптична вісь та площиною xOz і відкладається за годинниковою стрілкою, якщо дивитись із додатнього напряму осі Oz;

– кут ψ ($0 \le \psi \le 90^o$) є кутом між головною оптичною віссю відеоспостережного пристрою і площиною xOy і відраховується вгору від площини.

Напрям орієнтації позначимо вектором $\vec{N}$. Він є нормаллю до площини знімання матриці пристрою (ПЗС). Вектор $\vec{N}$ у системі координат Oxyz визначається через кути φ та ψ наступним чином

$$\vec{N} = (\cos\varphi\cos\psi, -\sin\varphi\cos\psi, \sin\psi) \equiv (\nu_1, \nu_2, \nu_3). \quad (3)$$

З'ясуємо, яку форму матиме траєкторія, отримана як розв'язок системи (1), (2) при спостереженні із точки C у напрямі $\vec{N}$. З цією метою спроектуємо криву траєкторії на ПЗС, віддалену від точки C у напрямі $\vec{N}$ на фокусну віддаль f. Тоді рівняння ПЗС буде мати вигляд

$$\nu_1(x - x_0) + \nu_2(y - y_0) + \nu_3(z - z_0) = f . \qquad (4)$$

При спостереженні з точки C точка M кривої буде проектуватись на ПЗС (4) уздовж прямої, що сполучає точку M із точкою C. Параметричне рівняння цієї прямої має вигляд

$$\begin{cases} x = x_{\tilde{n}} + (x_{\text{ì}} - x_{\tilde{n}})s, \\ y = y_{\tilde{n}} + (y_{\text{ì}} - y_{\tilde{n}})s, \\ z = z_{\tilde{n}} + (z_{\text{ì}} - z_{\tilde{n}})s. \end{cases} \qquad (5)$$

Зі співвідношень (4), (5) знаходимо значення параметру s, підставивши яке у (5) отримуємо рівняння проекції траєкторії на ПЗС

$$\begin{cases} x = x_{\tilde{n}} + \dfrac{(x_{\text{ì}} - x_{\tilde{n}})f}{\nu_1(x_{\text{ì}} - x_{\tilde{n}}) + \nu_2(y_{\text{ì}} - y_{\tilde{n}}) + \nu_3(z_{\text{ì}} - z_{\tilde{n}})}, \\ y = y_{\tilde{n}} + \dfrac{(y_{\text{ì}} - y_{\tilde{n}})f}{\nu_1(x_{\text{ì}} - x_{\tilde{n}}) + \nu_2(y_{\text{ì}} - y_{\tilde{n}}) + \nu_3(z_{\text{ì}} - z_{\tilde{n}})}, \\ z = z_{\tilde{n}} + \dfrac{(z_{\text{ì}} - z_{\tilde{n}})f}{\nu_1(x_{\text{ì}} - x_{\tilde{n}}) + \nu_2(y_{\text{ì}} - y_{\tilde{n}}) + \nu_3(z_{\text{ì}} - z_{\tilde{n}})}. \end{cases} \qquad (6)$$

Надалі називатимемо отриману криву образом траєкторії за даних умов спостереження. Схема розташування траєкторії, її образу та точки спостереження показана на рис. 3; точка B – проекція точки C на ПЗС.

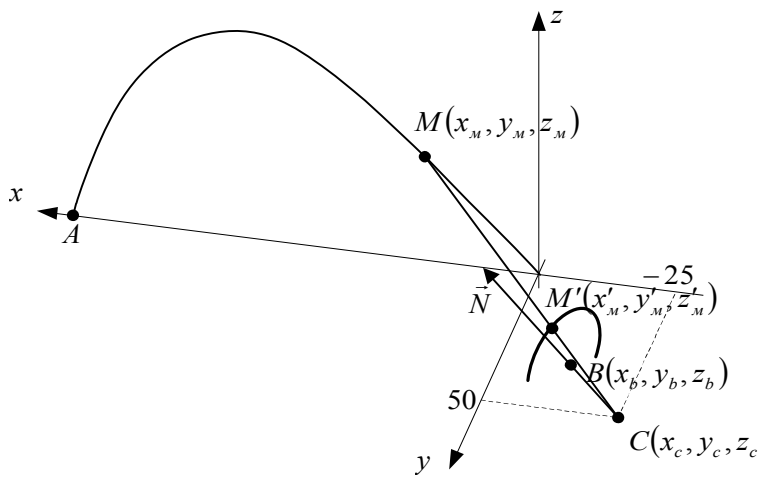

Рис. 3. Траєкторія та її образ за даних умов спостереження при $x_ñ = -25, y_ñ = 50, z_ñ = 0$; $\varphi = 45^\circ, \psi = 15^\circ$

З рівнянь (6) та рис. 3 складно робити однозначні висновки щодо виду образу, зокрема неочевидною є її належність площині.

Виберемо таку координатну систему, де образ матиме спрощений вигляд.

Образ траєкторії руху точки в локальній системі координат. Перейдемо до локальної системи координат Cx'y'z', пов'язаної з точкою спостереження. Для цього здійснимо перенос початку координат у точку C і поворот системи координат таким чином, щоб вісь Cx' співпала із напрямом вектора $\vec{N}$ (на кут φ у горизонтальній площині xCy навколо осі Oz, потім на кут ψ у вертикальній площині навколо осі Cy'). Відповідна заміна координат матиме вигляд

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi\cos\psi & \sin\psi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\sin\psi & \sin\varphi\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Використавши (7) перетворюємо (6) до вигляду

$$\begin{cases} x'_i = f, \\ y'_i = [(x_i - x_ñ)\sin\varphi + (y_i - y_ñ)\cos\varphi]\dfrac{f}{\vec{N}\cdot\overrightarrow{CM}}, \\ z'_i = [-(x_i - x_ñ)\cos\varphi\sin\psi + \\ +(y_i - y_ñ)\sin\varphi\sin\psi + (z_i - z_ñ)\cos\psi]\dfrac{f}{\vec{N}\cdot\overrightarrow{CM}}. \end{cases} \quad (8)$$

де $\vec{N}\cdot\overrightarrow{CM} = \nu_1(x_i - x_ñ) + \nu_2(y_i - y_ñ) + \nu_3(z_i - z_ñ)$.

Система рівнянь (8) описує образ траєкторії руху міни в координатній системі Cx'y'z'. Параметр f можна вибрати рівним одиниці шляхом відповідного вибору масштабу локальної системи координат. Врахуємо також, що відповідно до початкових припущень $y_м = 0$.

Тоді у площині ПЗС (4) за координатної системи Cy'z' рівняння образу є таким

$$\begin{cases} y'_i = \dfrac{(x_i - x_ñ)\sin\varphi - y_ñ\cos\varphi}{\nu_1(x_i - x_ñ) - \nu_2 y_ñ + \nu_3(z_i - z_ñ)}, \\ z'_i = \dfrac{-(x_i - x_ñ)\cos\varphi\sin\psi - y_ñ\sin\varphi\sin\psi}{\nu_1(x_i - x_ñ) - \nu_2 y_ñ + \nu_3(z_i - z_ñ)} + \\ \quad + \dfrac{(z_i - z_ñ)\cos\psi}{\nu_1(x_i - x_ñ) - \nu_2 y_ñ + \nu_3(z_i - z_ñ)}. \end{cases} \quad (9)$$

Таким чином, співвідношення (9) являють собою розв'язок прямої задачі про визначення образу траєкторії за даних умов спостереження.

Обернена задача. Розглянемо обернену задачу: за відомим образом відновити траєкторію. Зауважимо, що на основі виключно співвідношень (8) це зробити неможливо, оскільки у криву (8) будуть проектуватись не лише точки M траєкторії, але й усі точки конічної поверхні (5). Разом із тим, умова $y_м$=0 є достатньою для однозначного розв'язання цієї задачі.

Виразивши із (9) координати $x_м$, $z_м$ траєкторії через їх проекції $x'_м$, $z'_м$ на ПЗС та врахувавши умову $y_м$=0 записуємо координати траєкторії руху міни в системі координат Oxyz

$$\begin{cases} x_i = x_ñ + \dfrac{\cos\varphi\cos\psi + y'_i\sin\varphi - z'_i\cos\varphi\sin\psi}{\sin\varphi\cos\psi - y'_i\cos\varphi - z'_i\sin\varphi\sin\psi} y_c, \\ y_i = 0, \\ z_i = z_ñ + \dfrac{\sin\psi + z'_i\cos\psi}{\sin\varphi\cos\psi - y'_i\cos\varphi - z'_i\sin\varphi\sin\psi} y_c. \end{cases} \quad (10)$$

Результати чисельного моделювання. Побудуємо графіки траєкторії та її проекції. Результати чисельного дослідження наведено на рис. 4 для точки спостереження, зміщеної ліворуч відносно мінометa.

Відмітимо, що у реальних умовах відеоспостереження фіксуватиме лише частину образу траєкторії, зображеної на рис. 4, б – г, в силу обмеженості поля зору камери.

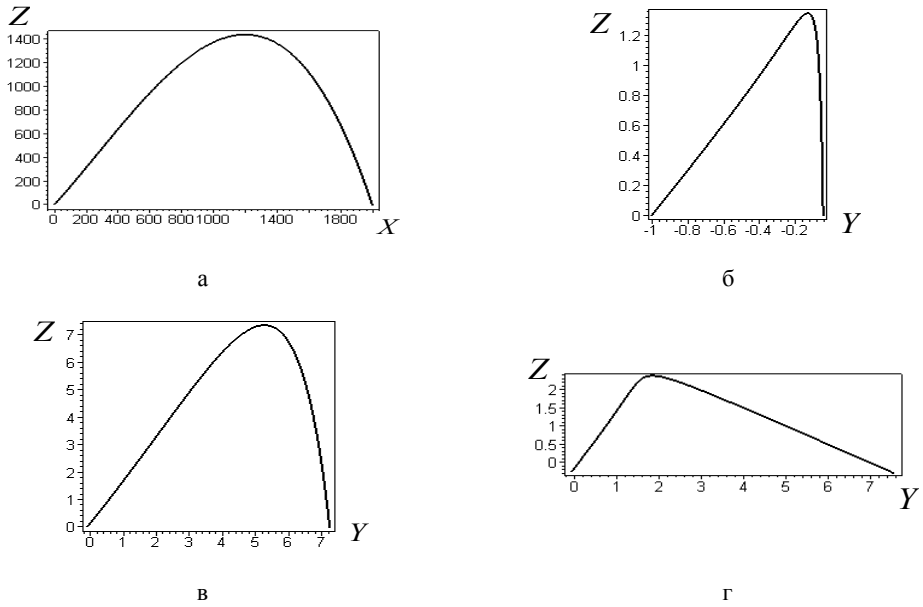

Рис. 4. Траєкторія та її образ за різних умов спостереження: а – траєкторія; б – образ при $\varphi = 0^o$, $\psi = 0^o$, $x_c = -100$, $y_c = 100$; в – образ при $\varphi = 85^o$, $\psi = 0^o$, $x_c = 0$, $y_c = 100$; г – образ при $\varphi = 85^o$, $\psi = 15^o$, $x_c = 0$, $y_c = 100$

Висновки

Проводячи відеоспостереження польоту міни в масштабі реального часу і аналізуючи при цьому образ траєкторії за допомогою отриманої у роботі математичної моделі можна визначити або уточнити параметри її реальної траєкторії.

Список літератури

1. Бойова робота на радіолокаційних станціях (1РЛ239-1(М); 1РЛ133 / М. Грицай, П. Трофименко, С. Колобилін, О. Мєшков. – С.: Видавництво СУМДУ, 2003. – 105 с.

2. Геоінформаційні системи у військових задачах: Другий науково-технічний семінар 21-22 січня 2011 року / відп. ред. В.Ю. Тимчук. – Л.: Академія сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного, 2011. – 272с.

3. Савкин Л.С. Метеорология и стрельба артилерии / Л.С. Савкин, Б.Д. Лебедев. – М.: Воениздат, 1974. – 144 с.

4. Внешняя баллистика. Кн. 1. / А.Д. Чернозубов, В.Д. Кириченко, И.И. Разин, К.В. Михайлов. – М.: ВАИА, 1954. – 463 с.

5. Таблицы стрельбы 120-мм минометов обр. 1938 г. и 1943 г. – М.: Воениздат, 1980. – 92 с.

6. Таблицы стрельбы 122-мм гаубицы Д-30. – М.: Воениздат, 1984. – 106 с.

7. Бахвалов Н.С. Чисельные методы: уч. пособ. / Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. – М.: Наука, 1987. – 600 с.

Надійшла до редколегії 7.06.2011

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.В. Шабатура, Академії сухопутних військ ім. гетьмана Петра Сагайдачного, Львів.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА АРТИЛЛЕРИЙСКОЙ МИНЫ ПО ЕЕ ОБРАЗУ, ПОЛУЧЕНОМУ ВИДЕОФИКСАЦИЕЙ

Р.В. Кузьменко

Рассмотрен процесс полета артиллерийской мины с одновременной фото-відео-фіксацей. Описаны математические связи между реальным положением центра масс артиллерийской мины на траектории в плоскости полета и ее проекцией в плоскости снимания (ПЗС) фото-видео-фиксирующего устройства. Предложена математическая модель построения траектории на основе полученного, в зависимости от места установления и углов наведения фото-видео-фиксирующего устройства, ее образа. Также проведено компьютерное моделирование соответствующими процедурами пакета Maple 5.00. Данная математическая модель предоставляет возможность определения и уточнения параметров траектории полета артиллерийской мины.

Ключевые слова: *математическая модель, фото-видео-фиксация, траектория, артиллерийская мина.*

DESIGN OF TRAJECTORY OF FLIGHT OF ARTILLERY MINE AFTER ITS APPEARANCE WHICH IS GOT VIDEO-FIXING

R.V. Kuzmenko

The process of flight of artillery mine (shell) is considered with simultaneous photo-video-fixing. Mathematical copulas are set between the real position of center of mass of artillery mine on a trajectory in the plane of flight and his projection in the plane of removal (PZS) photo-video- of fixative device will build on. The mathematical model of construction of trajectory is offered on the basis of got, depending on the place of establishment and corners of aiming of photo-video- of fixative device, its appearance and the computer design of package of Maple 5.00 is conducted the proper procedures. This mathematical model gives possibility of determination and clarification of parameters of trajectory of flight of artillery mine.

Keywords: *mathematical model, photo-video-fixing, trajectory, artillery mine.*