УДК 621.34:004.7

С.Г. Семенов[1], Е.В. Мелешко[2], Я.В. Илюшко[3]

[1] *Национальный технический университет «ХПИ», Харьков*
[2] *Кировоградский национальный технический университет, Кировоград*
[3] *Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МУЛЬТИСЕРВИСНОГО КАНАЛА СВЯЗИ НА ОСНОВЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ GERT-СЕТИ

Проведен анализ подходов математического моделирования информационно-телекоммуникационных систем в целом, и возможностей математического моделирования современных телекоммуникационных сетей с помощью GERT-систем в частности. Разработана математическая модель мультисервисного канала связи на основе экспоненциальной GERT-сети. Получено аналитическое выражение для расчета плотности распределения времени передачи сообщения в канале связи сети NGN. Доказана теорема о невозможности порождения полюсов второго и третьего порядка, определенным в результате математического моделирования, многочленом.

Ключевые слова: *мультисервисный канал связи, математическая модель, граф, сети NGN, GERT-сети.*

Введение

Постановка проблемы. В настоящее время в связи с развитием информационных технологий, усложнением микропроцессорных и микроконтроллерных устройств, совершенствованием математического и программного обеспечения телекоммуникационных систем возникает необходимость в разработке новых протоколов обработки и обмена данными. При этом многие возникающие задачи, связанные с процессами оптимизации, тестирования, оценки вероятностно-временных характеристик, параметров оперативности, безопасности, надежности, отказоустойчивости телекоммуникаций значительно упрощаются, если их предварительно решать с помощью математических или имитационных моделей.

Анализ показал, что при решении задач математического моделирования информационно-телекоммуникационных систем в настоящее время используется целый ряд подходов, наиболее результативные из которых базируются на использовании графовых моделей и комбинаторных методов расчета [5], потоковых моделей и методов анализа сетей [4, 6], нейронных сетей, тензорных моделей [6] а также аппарата марковских управляемых случайных процессов [2].

Кроме того, получили свое развитие средства решения оптимизационных задач, формализуемых на основе данных моделей. Это, прежде всего, аналитические методы, методы математического программирования, эвристические методы и др. [1].

Проведенные исследования показали, что большинство указанных подходов моделирования имеют как достоинства, так и недостатки. Несмотря на анонсированную точность моделирования большинство недостатков современных математических моделей (тензорные, нейронные сети и др.) связано с высокой вычислительной сложностью их реализации. В то же время простота графовых моделей, а также аппарата марковских управляемых случайных процессов в совокупности с новыми нестандартными подходами моделирования позволяет и в настоящее время успешно их использовать при исследовании статистических процессов в телекоммуникационных системах и сетях.

Проведенные исследования показали, что одной из научных проблем математического моделирования телекоммуникационных систем является отсутствие эффективных по времени выполнения и точности методов нахождения закона распределения, характеризующего выходную случайную величину. Это не дает возможности проводить более глубокий анализ проектируемой или действующей телекоммуникационной системы. В то же время ряд подходов, позволяющих решить указанную проблему, остаются не исследованными.

Одним из таких нестандартных подходов математического моделирования является использование графо-аналитических моделей GERT [10].

Анализ литературы [10, 11] показал, что система GERT может быть использована для моделирования сложных технических систем при выполнении следующих условий. Процесс функционирования системы можно рассматривать через последовательные переходы из состояния в состояние, характеризующие определенные события. Каждому из состояний соответствует определенная вероятность. Переход системы из состояния в состояние связывается с выполнением некоторой операции, описываемой случайной величиной с известным законом распределения.

В настоящее время в литературе [11] рассмотрены ряд примеров использования GERT-систем при моделировании сетей передачи данных. Однако ряд ограничений (однородность обрабатываемых входных данных, использование одного протокола транспортного уровня и др.) не позволяют в полной мере использовать эти модели в сетях с гибридной архитектурой и разнородными потоками данных (NGN сетях). Поэтому разработка математической модели мультисервисного канала связи на основе GERT-сети является актуальной научной задачей

Основная часть

Проведенные исследования процесса передачи данных в мультисервисных каналах связи показали, что время передачи кадров, информационных пакетов, сообщений протоколами транспортного уровня и уровня доступа сети NGN можно описывать экспоненциальными распределениями или распределениями Эрланга [7 – 9]. Назовем GERT-сети, все дуги которых характеризуются экспоненциальными распределениями, экспоненциальными GERT-сетями. Для таких сетей в ряде практических случаев конечный результат может быть представлен в виде аналитического выражения, позволяющего проводить сравнительные исследования и решать оптимизационные задачи.

Рассмотрим процесс передачи данных и разработаем математическую модель алгоритма передачи сообщения в мультисервисном канале связи на основе GERT-сети представленной на рис. 1.

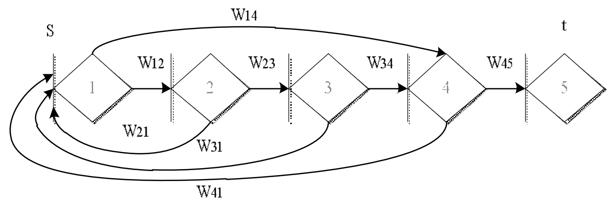

Рис. 1. Модель алгоритма передачи сообщения в мультисервисном канале связи

В представленной сети узлы графа интерпретируются состояниями канала связи ТКС, а ветви графа – вероятностно-временными характеристиками. Важной особенностью процесса передачи мультисервисной информации в сетях NGN является использование всего спектра протоколов транспортного уровня и уровня доступа. В частности использования протоколов TCP и UDP в соответствии с набором используемых сетевых приложений. На рис. 1 ветвь (1, 2) характеризует время передачи кадра (информационного пакета) от передатчика к приемнику. В состоянии 2 осуществляется контроль целостности принятых данных, и оценка служебных полей на предмет их соответствия заданным требованиям. Ветви (2, 3); (2, 1) соответствуют режиму работы протокола TCP, и задают случайное время передачи квитанций о результате контроля правильности передачи кадра от приемника к передатчику. Узел 3 отражает состояние системы в момент проверки номера кадра. В этом состоянии определяется, является ли принятый кадр промежуточным или последним в переданном сообщении. Если принятый кадр является промежуточным, то соответствующая этому состоянию системы информация в виде квитанции передается передатчику (ветвь (3, 1)). В случае если принятый кадр является последним в сообщении, то система присоединяет данный кадр к общему набору принятых кадров и осуществляет сборку сообщений в соответствии с номерами кадров. Случайное время сборки кадров задается ветвью (3, 4). Результаты сборки сообщения в виде соответствующих квитанций передаются передатчику, что соответствует ветви (4, 1), Успешная сборка сообщения переводит систему в состояние готовности 5. При передаче данных, в соответствии с алгоритмами обработки данных протокола UDP, движение кадров в представленном графе соответствует ветви (1, 4), при этом предполагается, что вероятность выбора этой дуги известна. Ветви (2, 3); (2, 1); (3, 1); (3, 4) и (4, 1) можно характеризовать одним и тем же параметром распределения, так как они задают схожие операции передачи служебной информации от приемника к передатчику. Характеристики ветвей модели представлены в табл. 1.

Таблица 1

Характеристики ветвей модели

№ п/п	Ветвь	W-функция	Вероятность	Производящая функция моментов
1	(1,2)	W_{12}	p_1	$\lambda_2/(\lambda_2-s)$
2	(1,4)	W_{14}	$1-p_1$	$\lambda_1/(\lambda_1-s)$
3	(2,3)	W_{23}	p_2	$\lambda_3/(\lambda_3-s)$
4	(2,1)	W_{21}	$1-p_2$	$\lambda_3/(\lambda_3-s)$
5	(3,1)	W_{31}	$1-p_3$	$\lambda_3/(\lambda_3-s)$
6	(3,4)	W_{34}	p_3	$\lambda_3/(\lambda_3-s)$
7	(4,1)	W_{41}	$1-p_4$	$\lambda_3/(\lambda_3-s)$
7	(4,5)	W_{45}	p_4	$\lambda_4/(\lambda_4-s)$

Эквивалентная W-функция времени передачи сообщения равна:

$$W_E(s)=\left(W_{14}W_{45}+W_{12}W_{23}W_{34}W_{45}\right)\Big/\left(1-W_{12}W_{21}-W_{12}W_{23}W_{31}-W_{12}W_{23}W_{34}W_{41}-W_{14}W_{41}\right)=$$

$$=\frac{p_4\lambda_4\left(\lambda_3-s\right)\left(q_1\lambda_1\left(\lambda_2-s\right)\left(\lambda_3-s\right)^2+p_1p_2p_3\lambda_2\lambda_3^2\left(\lambda_1-s\right)\right)}{\left(\lambda_4-s\right)\left(p_1\lambda_2\lambda_3\left(\lambda_1-s\right)\left(\lambda_3-s\right)^2\left(\frac{\left(\lambda_2-s\right)\left(\lambda_3-s\right)}{p_1\lambda_2\lambda_3}-\frac{p_2q_3\lambda_3}{\lambda_3-s}-\frac{p_2p_3q_4\lambda_3^2}{\left(\lambda_3-s\right)^2}-\frac{q_1q_4\lambda_1\left(\lambda_2-s\right)}{p_1\lambda_2}-q_2\right)\right)},$$

где $1-p_1=q_1$; $1-p_2=q_2$; $1-p_3=q_3$; $1-p_4=q_4$.

Особенности процесса передачи данных в мультисервисном канале связи характеризуются разнородностью циркулирующих в нем информационных □оттоков, и, соответственно использованием различных протоколов (TCP, UDP и др.) транспортного уровня и уровня доступа [9]. При этом возможны различные случаи организации обратной связи (циклы отправитель-получатель-отправитель) через служебные сообщения (протокол TCP). На рис. 1 эти циклы зафиксированы в виде переходов

$$W_{12} \to W_{21};\ W_{12} \to W_{23} \to W_{31};$$

$$W_{12} \to W_{23} \to W_{34} \to W_{41};\ W_{14} \to W_{41}.$$

Для GERT-сетей с циклами не существует простых методов нахождения особых точек функции $\Phi_E(z)$ замены действительных переменных $(z=-i\varsigma)$, где ς – действительная переменная. Это объясняется тем, что для нахождения особых точек необходимо решать нелинейные уравнения, и чем сложнее структура GERT-сети, тем сложнее и исходное уравнение. Поэтому в ходе моделирования предлагается прибегнуть к подобной замене. Выполняя комплексное преобразование $z=-s$, получим

$$\Phi(z)=\frac{uz^3+wz^2+vz+h}{(\lambda_1+z)(\lambda_3+z)(\lambda_4+z)\left(z^3+az^2+bz+c\right)}, \quad (1)$$

где $w=q_1\lambda_1(\lambda_2+2\lambda_3)$; $h=\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2(q_1+p_1p_2p_3)$; $v=\lambda_3\left(q_1\lambda_1(2\lambda_2+\lambda_3)+p_1p_2p_3\lambda_2\lambda_3\right)$; $u=q_1\lambda_1$; $a=2\lambda_3+\lambda_2-q_1q_4\lambda_1\lambda_3/(\lambda_1+z)$; $b=\lambda_3\left(\lambda_3+2\lambda_2-\right.$ $\left.-p_1q_2\lambda_2\lambda_3-\frac{q_1q_4\lambda_1\lambda_3(\lambda_3+\lambda_2)}{\lambda_1+z}-\frac{p_1p_2q_3\lambda_2\lambda_3^2}{\lambda_3+z}\right)$;

$$c=\lambda_2\lambda_3^2\left(1-p_1q_2-\frac{q_1q_4\lambda_1}{\lambda_1+z}-\frac{p_1p_2\lambda_3(q_3+q_4)}{\lambda_3+z}\right).$$

Плотность распределения вероятностей времени передачи сообщения:

$$\varphi(x)=(2\pi i)^{-1}\times$$

$$\times\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{zx}\times\frac{uz^3+wz^2+vz+h}{(\lambda_1+z)(\lambda_3+z)(\lambda_4+z)\left(z^3+az^2+bz+c\right)}dz, \quad (2)$$

где операция интегрирования выполняется с помощью интеграла Бромвича-Вагнера [1].

Способ интегрирования зависит от того, имеет ли функция $\Phi(z)$ только простые полюсы, или полюсы некоторого порядка. В том случае, когда функция $\Phi(z)$ имеет только простые полюсы, выражение $e^{zx}\Phi(z)$ можно представить в виде:

$$e^{zx}\Phi(z)=\frac{e^{zx}\left(uz^3+wz^2+vz+h\right)}{z^6+g_5z^5+g_4z^4+g_3z^3+g_2z^2+g_1z+g_0}= \quad (3)$$

$$=\mu(z)/\psi(z),$$

где $g_5=a+\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4$; $g_4=b+a(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)+$ $+\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_4+\lambda_1\lambda_3$; $g_3=c+b(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)+$ $+a(\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_4+\lambda_1\lambda_3)+\lambda_1\lambda_3\lambda_4$; $g_2=a(\lambda_1\lambda_3\lambda_4)+$ $+b(\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_4+\lambda_1\lambda_3)+c(\lambda_1+\lambda_3+\lambda_4)$; $g_1=b(\lambda_1\lambda_3\lambda_4)+\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_4+\lambda_1\lambda_3$; $g_0=c(\lambda_1\lambda_3\lambda_4)$.

Тогда плотность распределения времени передачи сообщения равна:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{6}\mathrm{Res}\left[e^{zx}\Phi(z)\right]=\sum_{k=1}^{6}\frac{\mu(z_k)}{\psi(z_k)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{6}\frac{e^{zx}\left(uz_k^3+wz_k^2+vz_k+h\right)}{6z_k^5+5g_5z_k^4+4g_4z_k^3+3g_3z_k^2+2g_2z_k+g_1}.. \quad (4)$$

Функция $\Phi(z)$ кроме простых полюсов, определяемых корнями уравнения $yz^3+az^2+bz+c=0$, может иметь и полюса второго или третьего порядка. Это возможно в тех случаях, когда значение λ_1, λ_3 и λ_4 совпадают друг с другом или равны значению корней z_3; z_4; z_5; z_6. В этих случаях плотность распределения времени передачи сообщения $\varphi(x)$ находится по формуле нахождения вычетов r_{-1} от полюсов z_k порядка n:

$$r_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_k}\frac{d^{n-1}\left((z-z_k)^n e^{zx}\Phi(z)\right)}{dz^{n-1}}. \quad (5)$$

Выражение 1 представляет собой дробно-рациональную функцию относительно z со степенью знаменателя большей, чем степень числителя. Поэтому для него выполняется условия леммы Жордана [1]. Функция $\Phi(z)$ имеет полюсы в точках $z_1=-\lambda_1$; $z_2=-\lambda_3$ и $z_3=-\lambda_4$. Многочлен yz^3+az^2+bz+c порождает еще три полюса. Решение уравнения

$$yz^3+az^2+bz+c=0 \quad (6)$$

может быть найдено любым методом, например, по формулам Виета [3]. В результате вычисляются еще три особые точки z_4, z_5, z_6.

Теорема 1. Многочлен yz^3+az^2+bz+c не может порождать полюсов второго и третьего порядка.

Доказательство. Коэффициенты уравнения 6 больше нуля. Поэтому, если это уравнение имеет действительные корни, то, очевидно, ни один из них не может быть положительным. Если уравнение 6 имеет отрицательные действительные корни, то они могут быть второй или третьей кратности. Действительно, если предположить, что многочлен yz^3+az^2+bz+c порождает полюс третьего порядка в точке $z=-\mu$, то $(z+\mu)^3=z^3+3z^2\mu+3z\mu^2+\mu^3$. Так как $\eta<0$, то и $\mu^3<0$, что противоречит соотношению

$$\mu^3=c=\lambda_2\lambda_3^2\times\left(1-p_1q_2-\frac{q_1q_4\lambda_1}{\lambda_1+z}-\frac{p_1p_2\lambda_3(q_3+q_4)}{\lambda_3+z}\right)>0$$

($p_1q_2+q_1q_4\lambda_1/(\lambda_1+z)+p_1p_2\lambda_3(q_3+q_4)/(\lambda_3+z)$ всегда меньше 1), т.е. многочлен yz^3+az^2+bz+c не может порождать полюсов третьего порядка.

Аналогичным образом доказывается невозможность порождения рассматриваемым многочленом полюса второго порядка.

Пусть многочлен yz^3+az^2+bz+c порождает полюс второго порядка в точке $z=-\mu_1$ и полюс первого порядка в точке $z=-\mu_2$. Тогда выполняется соотношение:

$$\left(z+\mu_1\right)^2\left(z+\mu_2\right)=z^3+\left(2\mu_1+\mu_2\right)z^2+\left(\mu_1^2+2\mu_1\mu_2\right)z+\mu_1^2\mu_2 .$$

Так как $\mu_1^2>0$, и $\mu_2<0$, то $\mu_1^2\mu_2<0$. Если $\mu_1^2\mu_2=c>0$ то уравнение 6 не может порождать полюсы второго порядка.

В соответствии с основной теоремой алгебры [3] всякая целая рациональная функция n-й степени

$$f\left(z\right)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots+c_nz^n \; ; \; (c_n\neq 0, n=1,2,\ldots)$$

имеет n нулей.

Из теоремы 1 следует, что многочлен yz^3+az^2+bz+c может иметь или три разных отрицательных действительных нуля, или один отрицательный действительный нуль и два комплексных сопряженных нуля.

Выводы

Таким образом, на основе экспоненциальной GERT-сети разработана математическая модель мультисервисного канала связи, которая отличается от известных учетом процедур информационного обмена с возможными циклами в соответствии с протоколами транспортного уровня и уровня доступа сетей NGN. Модель может быть использована для исследования информационных процессов в мультисервисных телекоммуникационных сетях, при разработке новых протоколов, алгоритмов и программ управления канальными ресурсами в NGN-сетях.

Применение экспоненциальных стохастических моделей GERT даст возможность использования результатов, полученных в аналитическом виде (функции, плотности распределения). для проведения сравнительного анализа и исследований более сложных информационно-телекоммуникационных систем математическими методами.

Список литературы

1. *Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров / А. Анго. – М.: Наука, 1964. – 772 с.*
2. *Вишневский В.М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В.М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.*
3. *Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1968. – 431 с.*
4. *Математичні основи теорії телекомунікаційних систем / За заг. ред. В.В. Поповського. – Х.: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. – 564 с.*
5. *Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах: пер. с англ. / Э. Майника; под ред. Е.К. Масловского. – М.: Мир, 1981. – 321 с.*
6. *Семенов С.Г. Разработка распределенного метода многопутевой маршрутизации, основанного на потоковой модели с предвычислением путей (маршрутов). / С.Г. Семенов, А.А. Можаєв, А.Г. Беленков // Зб. наук. пр. «Моделювання та інформаційні технології» – К.: ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова, 2005. – Вип. 32. – С. 189-192.*
7. *Семенов С.Г. Математическая модель процесса доставки информационных пакетов в компьютерной сети системы критического применения / С.Г. Семенов, И.В. Ильина. // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – Вип. 1(28). – С. 162-165.*
8. *Семенов С.Г. Распределение канальных ресурсов сетевого оборудования при информационном обмене в единой автоматизированной системе управления / С.Г. Семенов // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – 2008. – № 6(33). – С. 307-310.*
9. *Телекоммуникационные системы и сети: учебное пособие. В 3 томах / Под ред. В.П. Шувалова. – М.: Горячая линия-Телеком, 2005. – Т. 3. – 592 с.*
10. *Pritsker A.A.B. Modeling and analysis using Q-GERT networks New York : Wiley : Distributed by Halsted Press, 1979.*
11. *Pritsker A.A.B., Happ W.W. GERT: Graphical Evaluation and ReviewTechnique. Part I. Fundamentals // The Journal of Industrial Engineering (May 1966).*

Поступила в редколлегию 6.10.2011

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, ст. научн. сотр. А.А. Можаев, Национальный технический университет «ХПИ», Харьков.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ МУЛЬТИСЕРВІСНОГО КАНАЛУ ЗВ'ЯЗКУ НА ОСНОВІ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЇ GERT-МЕРЕЖІ

С.Г.. Семенов, Є.В. Мелешко, Я.В. Ілюшко

Проведений аналіз підходів до математичного моделювання інформаційно-телекомунікаційних систем в цілому, і можливостей математичного моделювання сучасних телекомунікаційних мереж за допомогою GERT-систем зокрема. Розроблена математична модель мультисервісного каналу зв'язку на основі експоненціальної GERT-мережі. Отриманий аналітичний вираз для розрахунку щільності розподілу часу передачі повідомлення в каналі зв'язку мережі NGN. Доведена теорема про неможливість породження полюсів другого і третього порядку, визначеним в результаті математичного моделювання, многочленом.

Ключові слова: *мультисервісний канал зв'язку, математична модель, граф, мережі NGN, GERT-мережі.*

MATHEMATICAL MODEL OF MULTISERVICE COMMUNICATION CHANNEL ON BASIS OF EXPONENTIAL GERT-NET

S.G. Semenov, E.V. Meleshko, Ya.V. Ilyushko

The analysis of approaches of mathematical design of the informatively-telecommunication systems is conducted on the whole, and possibilities of mathematical design of modern telecommunication networks by the GERT-net in particular. The mathematical model of multiservice communication channel is developed on the basis of exponential GERT-net. Analytical expression is got for the calculation of closeness of distributing of time of transmission of report in the channel of connection of network of NGN. A theorem is proved about impossibility of generation of poles of the second and third order, certain as a result of mathematical design, by a polynomial.

Keywords: *multiservice communication channel, mathematical model, count, networks of NGN, GERT-net.*