

УДК 621.396

О.В. Лаврінчук

Національний університет оборони України, Київ

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ВПЛИВУ ПРОСТОРОВОЇ СТРУКТУРИ ПСЕВДОСУПУТНИКОВОЇ РАДІОНАВІГАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ НА ТОЧНІСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ ВЕКТОРА СТАНУ СПОЖИВАЧА

*В статті запропонована математична модель впливу просторової структури псевдосупутникової радіонавігаційної системи на точність визначення вектора стану споживача, яка базується на обчисленні геометричного фактора погіршення точності (geometric dilution of precision – GDOP). Особливістю моделі є практична зручність завдяки використанню для розрахунків кутів напрямку з точки споживача на опорні радіонавігаційні точки (псевдосупутники) по азимуту та куту місця.*

**Ключові слова:** псевдосупутникова радіонавігаційна система, точність, геометричний фактор

### Вступ

Радіонавігаційна та координатно-часова техніка забезпечує вирішення багатьох народногосподарських, оборонних і наукових завдань, тому її створенню, застосуванню і розвитку приділяється значна увага у всіх розвинених країнах світу. Як свідчить досвід останніх локальних війн і збройних конфліктів, для вирішення завдань навігаційного забезпечення військ найбільш широко використовувались супутникові радіонавігаційні системи (СРНС) [1]. Стрімкий розвиток високоточної зброї (ВТЗ) з застосуванням СРНС-навігації значно підвищив вимоги щодо стійкості навігаційного забезпечення таких засобів ураження.

З 1998 р. компанією “Rockwell Collins” (США) проводяться дослідження та випробування комбінованої супутниково-псевдосупутникової радіонавігаційної системи (РНС) з метою створення локального радіонавігаційного поля для забезпечення тактичних та оперативних ракет, обладнаних приймачами GPS-сигналів [2, 3].

Оскільки псевдосупутникові радіонавігаційні системи є досить новим та недостатньо дослідженим об'єктом, виникає необхідність їх детального вивчен-

ня. ПСРНС відносяться до класу багатопозиційних систем радіонавігації, тобто таких, які складаються з сукупності рознесених у просторі та функціонально пов'язаних між собою радіонавігаційних точок (РНТ). Ефективність та якість функціонування ПСРНС, як і будь-яких інших РНС, оцінюється за наступними основними показниками: точність визначення вектора стану споживача та надійність його навігації (доступність). Однак, умови функціонування ПСРНС значно відрізняються від умов застосування інших багатопозиційних РНС, тому способи побудови просторових структур багатопозиційних РНС для псевдосупутникової системи є неприйнятними.

Аналіз факторів, що впливають на функціонування ПСРНС і визначають конфігурацію її структури, дає можливість зробити висновок про те, що структура ПСРНС повинна формуватися з урахуванням наявної конкретної обстановки та з урахуванням очікуваних зовнішніх впливів. При цьому необхідно враховувати загальну геометрію взаємного розташування елементів структури, оскільки точність навігації безпосередньо залежить від відносного положення передавачів (РНТ) і приймача споживача.

Дослідження впливу геометрії взаємного розташування елементів РНС на точність визначення вектора стану споживача для РНС різних типів досить добре висвітлене у численній літературі [4 - 8], тому доцільно використати його і для дослідження точнісних характеристик ПСРНС.

Виходячи з вищесказаного, **метою статті** є розробка математичної моделі впливу просторової структури ПСРНС на точність визначення вектора стану споживача.

## Основний матеріал

У будь-якій багатопозиційній радіонавігаційній системі найкращої точності визначення координат споживача можна досягти при використанні вимірювань відносно радіонавігаційних точок, що значно рознесені у просторі. Так, наприклад, вимірювання дальності, здійснене по чотирьох контрольних РНТ, розміщених поряд, дасть майже рівні значення. Оскільки розрахунок місцеположення засновується на відмінностях (різницях) дальності, то там, де ці дальності майже однакові, невелика відносна похибка вимірювання значно впливає на їх розрізнення. Цей ефект, викликаний взаємним просторовим (геометричним) положенням РНТ, відомий як геометричний фактор погіршення точності (в зарубіжній літературі використовується позначення *geometric dilution of precision* – GDOP), який в подальшому скорочено будемо називати геометричним фактором (ГФ). Це означає, що похибки вимірювання дальності, які обумовлені іншими факторами, також зростають через геометричний ефект погіршення точності. Таким чином, геометричним фактором називається коефіцієнт погіршення точності визначення місцеположення об'єкта відносно точності визначення навігаційних параметрів. Формально – це коефіцієнт  $K_r$  у співвідношенні [5, 9, 10]

$$\sigma_{\text{нав}} = K_r \sigma_{\text{дал}} \quad (1)$$

де  $\sigma_{\text{нав}}$ ,  $\sigma_{\text{дал}}$  – середньоквадратичні похибки визначення координат та псевдодальностей відповідно.

Беручи до уваги (1), при синтезі просторової структури ПСРНС, а також при виборі оптимального робочого сузір'я РНТ, які будуть використовуватись при визначенні місцеположення та швидкості споживача, ГФ буде основним критерієм.

Для обґрунтування математичної моделі впливу просторової структури ПСРНС на точність визначення вектора стану споживача розглянемо основні співвідношення, що характеризують вплив взаємного розташування РНТ ПСРНС та споживача на точність навігаційних визначень.

Вплив відносного взаємного розташування мережі РНТ та споживача на точність навігаційних визначень у ПСРНС доцільно розглядати на основі аналізу рівнянь спостережень в трьох вимірах для

кожної РНТ з відомими координатами  $(x_i, y_i, z_i)$  та невідомими координатами споживача  $(X, Y, Z)$ , які мають вигляд [5, 10, 11]

$$Z_{p_i} = \sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2 + (z_i - Z)^2} \quad (2)$$

Рівняння (2) є нелінійними і лінеаризувати їх можна шляхом розкладання в ряд Тейлора.

Позначимо вектор дальностей  $Z_p = h(x)$ , тоді нелінійна функція  $h(x)$  чотирьохвимірною вектора являє собою позицію споживача та похибку (відхилення) годинника його приймача. Розклавши ліву частину рівняння (2) в ряд Тейлора, отримаємо приблизне номінальне рішення для невідомого вектора стану споживача [10, 11]

$$x = [x^1 x^2 x^3 x^4]^T, \quad (3)$$

складовими якого є:  $x^1$  – складова довготи місцеположення споживача;  $x^2$  – складова широти місцеположення споживача;  $x^3$  – складова висоти місцеположення споживача;  $x^4$  – похибка часу приймача споживача ( $C_b$ ) і для якого

$$Z_p = h(x) = h(x^{\text{ном}}) + \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{\text{ном}}} \delta x + \text{Н.О.Т.}; \quad (4)$$

$$\delta x = x - x^{\text{ном}};$$

$$\delta Z_p = h(x) - h(x^{\text{ном}}),$$

де Н.О.Т. – елементи вищого порядку розкладу в ряд Тейлора.

Приведемо рівняння (4) до наступного вигляду:

$$\delta Z_p = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=x^{\text{ном}}} \delta x = H^{[1]} \delta x; \quad (5)$$

$$\delta x = X - X^{\text{ном}}; \quad \delta Y = Y - Y^{\text{ном}}; \quad \delta Z = Z - Z^{\text{ном}},$$

де  $H^{[1]}$  – елемент першого порядку розкладу в ряд Тейлора.

$$\delta Z_p = \rho(X, Y, Z) - \rho(X_{\text{ном}}, Y_{\text{ном}}, Z_{\text{ном}}) \approx$$

$$\approx \underbrace{\left. \frac{\partial \rho}{\partial X} \right|_{X_{\text{ном}}, Y_{\text{ном}}, Z_{\text{ном}}}}_{H^{[1]}} \delta x + v_p, \quad (6)$$

де  $v_p$  – шуми приймача.

Це векторне рівняння можна записати в скалярній формі, де  $i$  – номер РНТ, у вигляді [5, 10, 11]

$$\frac{\partial \rho_r^i}{\partial X} = \frac{-(x_i - X)}{\sqrt{(x_i - X)^2 + (y_i - Y)^2 + (z_i - Z)^2}} \Big|_{X=X_{\text{ном}}, Y=Y_{\text{ном}}, Z=Z_{\text{ном}}} =$$

$$= \frac{-(x_i - X_{\text{ном}})}{\sqrt{(x_i - X_{\text{ном}})^2 + (y_i - Y_{\text{ном}})^2 + (z_i - Z_{\text{ном}})^2}};$$

$$\frac{\partial \rho_r^i}{\partial Y} = \frac{-(y_i - Y_{\text{ном}})}{\sqrt{(x_i - X_{\text{ном}})^2 + (y_i - Y_{\text{ном}})^2 + (z_i - Z_{\text{ном}})^2}}; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho_r^i}{\partial Z} = \frac{-(Z_i - Z_{\text{ном}})}{\sqrt{(x_i - X_{\text{ном}})^2 + (y_i - Y_{\text{ном}})^2 + (z_i - Z_{\text{ном}})^2}}$$

Рівняння (6) та (7) можна об'єднати в матричне рівняння. Приведемо його запис для випадку чотирьох псевдосупутників, тобто при  $i = 4$ :

$$\begin{bmatrix} \delta z_p^1 \\ \delta z_p^2 \\ \delta z_p^3 \\ \delta z_p^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_r^1}{\partial x} & \frac{\partial \rho_r^1}{\partial y} & \frac{\partial \rho_r^1}{\partial z} & 1 \\ \frac{\partial \rho_r^2}{\partial x} & \frac{\partial \rho_r^2}{\partial y} & \frac{\partial \rho_r^2}{\partial z} & 1 \\ \frac{\partial \rho_r^3}{\partial x} & \frac{\partial \rho_r^3}{\partial y} & \frac{\partial \rho_r^3}{\partial z} & 1 \\ \frac{\partial \rho_r^4}{\partial x} & \frac{\partial \rho_r^4}{\partial y} & \frac{\partial \rho_r^4}{\partial z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ C_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_p^1 \\ v_p^2 \\ v_p^3 \\ v_p^4 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

яке в символній формі може бути записане як

$$\delta Z_p = H^{[1]} \delta x + v_k. \quad (9)$$

Для обчислення  $H^{[1]}$  необхідно знати положення псевдосупутника (РНТ) та номінальне (дійсне) значення положення споживача

$$\delta Z_p = H^{[1]} \delta x + v_p. \quad (10)$$

Приблизне значення ГФ можна розрахувати із співвідношення

$$\delta Z_p = H^{[1]} \delta x. \quad (11)$$

де  $\delta Z_p$  та  $H^{[1]}$  будуть відомі з вимірної псевдодальності, відомого положення РНТ та номінального значення місцеположення споживача. Похибка  $\delta x$  – невідомий вектор. Провівши ряд перетворень, отримаємо коваріаційну матрицю вимірювань псевдодальності [5, 7, 11]:

$$E(\delta x (\delta x)^T) = \sigma^2 (H^{[1]T} H^{[1]})^{-1} (H^{[1]T} H^{[1]}) (H^{[1]T} H^{[1]}) = \sigma^2 (H^{[1]T} H^{[1]})^{-1}. \quad (12)$$

Для визначення геометричного фактора принципово цікаві діагональні елементи матриці [5, 11]:

$$(H^{[1]T} H^{[1]})^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

де  $GDOP = \sqrt{A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}}$  – геометричний фактор погіршення точності місцевизначення.

Використовуючи кути напрямків з точки розташування споживача на опорні радіонавігаційні точки (псевдосупутники) по азимуту  $\alpha$  та куту місця  $\beta$ , матрицю  $H^{[1]}$  можна записати у вигляді, зручному для практичних розрахунків:

$$H^{[1]} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 \sin \alpha_1 & \cos \beta_1 \cos \alpha_1 & \sin \beta_1 \cos \alpha_4 & 1 \\ \cos \beta_2 \sin \alpha_2 & \cos \beta_2 \cos \alpha_2 & \sin \beta_2 \cos \alpha_4 & 1 \\ \cos \beta_3 \sin \alpha_3 & \cos \beta_3 \cos \alpha_3 & \sin \beta_3 \cos \alpha_4 & 1 \\ \cos \beta_4 \sin \alpha_4 & \cos \beta_4 \cos \alpha_4 & \sin \beta_4 \cos \alpha_4 & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Проведемо розрахунки для випадку використання чотирьох псевдосупутників, коли три з них рівномірно рознесені по горизонту з мінімальним кутом узвишся, а четвертий знаходиться в зеніті для споживача (табл. 1)

Таблиця 1

Положення псевдосупутників

Параметр	ПС 1	ПС 2	ПС 3	ПС 4
Азимут	0	120	240	0
Кут місця	5	5	5	90

Розраховані для даного випадку елементи матриць (14) та (13):

$$H^{[1]} = \begin{bmatrix} 0 & 0,996 & 0,087 & 1 \\ 0,863 & -0,498 & 0,087 & 1 \\ -0,863 & -0,498 & 0,087 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (15)$$

$$(H^{[1]T} H^{[1]})^{-1} = \begin{bmatrix} 0,672 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,672 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,6 & -0,505 \\ 0 & 0 & -0,505 & 0,409 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Геометричний фактор погіршення точності місцевизначення для даного випадку складатиме

$$GDOP = \sqrt{A_{11} + A_{12} + A_{13} + A_{14}} = \sqrt{0,672 + 0,672 + 1,6 + 0,409} = 1,83.$$

Таким чином, можна проводити розрахунки геометричних факторів погіршення точності місцевизначення для будь-яких конфігурацій псевдосупутникової радіонавігаційної системи на етапі її проектування з метою виключення конфігурацій з завідомо несприятливими значеннями геометричного фактора.

## Висновки

У статті запропонована математична модель впливу просторової структури псевдосупутникової радіонавігаційної системи на точність визначення вектора стану споживача, що характеризується зручністю розрахунків, у яких використовуються кути напрямків з точки споживача на опорні радіонавігаційні точки (псевдосупутники) по азимуту  $\alpha$  та куту місця  $\beta$ .

Запропоновану модель можна використовувати для довільної кількості псевдосупутників.

Напрямок подальших досліджень доцільно визначити розробку комплексної моделі функціонування псевдосупутникової радіонавігаційної системи в умовах бойової обстановки з урахуванням радіоелектронного подавлення та вогневого ураження противника.

## Список літератури

1. Застосування космічних систем для забезпечення дій збройних сил: навч. посіб. / [М.С. Пастушенко, В.І. Присяжний, В.О. Яновський та ін.] / за ред. В.І. Ткаченка. – Х.: ХВУ, 2003. – 192 с.

2. GPS Pseudolites ensure accurate positioning despite heavy theater jamming [Електрон. ресурс]. – Режим доступу: [www.army-technology.com](http://www.army-technology.com).

3. Кравченко Ю.В. Теория синтеза псевдоспутниковых радионавигационных систем / Ю.В. Кравченко – К.: НАОУ, 2007. – 210 с.

4. Владинов В.Л. Средства и системы радионавигационного обеспечения летательных аппаратов / В.Л. Владинов, В.В. Ковалев, Н.Н. Хмуров. – М.: Воениздат, 1990. – 472 с.

5. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / [В.С. Шебшаевич, П.П. Дмитриев, Н.В. Иванцевич и др.]; под ред. В.С. Шебшаевича. – [2-е изд.]. – М.: Радио и связь, 1993. – 408 с.

6. Яценков В.С. Основы спутниковой навигации / В.С. Яценков. – М.: Горячая линия-Телеком, 2005. – 272 с.

7. Бабак В.П. Супутникова радіонавігація / В.П. Бабак, В.В. Конін, В.П. Харченко. – К.: Техніка, 2004. – 328 с.

8. Слепченко А.П. Повышение точности определения координат воздушного судна при оптимизации размещения посадочных навигационных опорных точек / А.П. Слепченко // Вестник ИргТУ. – 2009. – № 4(40). – С. 205-207.

9. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии / [Б.С.Алешин, А.А.Афонин, К.К.Веремеенко и др.]; под ред. Б.С.Алешина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 424 с.

10. ГЛОНАСС. Принципы построения и функционирования / [Р.В. Бакитько, Е.Н. Болденков, Н.Т. Булавский и др.]. – М.: Радиотехника, 2010. – 800 с.

11. Grewal M.S. Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration / M.S. Grewal, L.R. Weill, A.P. Andrews. – New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001. – 392 p.

Надійшла до редколегії 22.06.2012

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Ю.В. Кравченко, Національний університет оборони України, Київ.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЛИЯНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТРУКТУРЫ ПСЕВДОСПУТНИКОВОЙ РАДИОНАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ НА ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ ПОТРЕБИТЕЛЯ

А.В. Лавринчук

В статье предложена математическая модель влияния пространственной структуры псевдоспутниковой радионавигационной системы на точность определения вектора состояния потребителя, которая основана на вычислении геометрического фактора ухудшения точности (*geometric dilution of precision – GDOP*). Особенностью модели есть практическое удобство благодаря использованию для расчетов углов направления из точки потребителя на опорные радионавигационные точки (псевдоспутники) по азимуту и углу места.

**Ключевые слова:** псевдоспутниковая радионавигационная система, точность, геометрический фактор

## MATHEMATICAL MODEL OF INFLUENCING OF PSEUDOSATELLITE RADIONAVIGATION SYSTEM SPATIAL STRUCTURE ON ACCURACY OF VECTOR OF THE USER'S STATE DETERMINATION

O.V. Lavrinchuk

The mathematical model of influencing of spatial structure of the pseudosatellite radionavigation system on accuracy of determination of vector of the state of user, which is based on the calculation of geometric dilution of precision – GDOP, is offered in the article (*geometric dilution of precision – GDOP*). The practical comfort due to the use for the calculations of corners of direction from the point of user on supporting radionavigations points (pseudosatellites) on an azimuth and elevation is a model feature.

**Keywords:** pseudosatellite radionavigation system, accuracy, geometric dilution of precision.