УДК 623.4.017

В.В. Лукьянчук, Б.Н. Ланецкий

Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков

ОБОСНОВАНИЕ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МНОГОУРОВНЕВОЙ РАБОТОСПОСОБНОСТЬЮ

Приводятся аналитические соотношения для погрешностей расчетов показателей надежности и эффективности функционирования сложных технических систем (СТС) с трехуровневой и двухуровневой работоспособностью как функции от погрешностей исходных данных, укрупнения состояний многоуровневой работоспособности, позволяющих проводить соответствующие исследования конкретных СТС и устанавливать области их применения. Приводятся общие результаты исследования погрешностей расчета показателей надежности СТС при аппроксимации их многоуровневой работоспособности одноуровневой.

Ключевые слова: *сложная техническая система, многоуровневая работоспособность, модель надежности.*

Введение

Постановка проблемы. Эффективное управление техническим состоянием (ТС) и надежностью (Н) сложных технических систем (СТС) предполагает ее исследование как системы с многоуровневой работоспособностью (МУРС) [1]. Оценка (расчет) показателей надежности СТС с МУРС требует большего количества исходных данных, учета их точности. При этом вопросы точности оценок показателей надежности (ПН) СТС с МУРС не исследованы достаточно полно. В частности, для упрощения анализа надежности таких систем, как правило, проводять укрупнение состояний СТС с МУРС до классического бинарного множества состояний, т.е. в подмножества неработоспособных (НРС) и работоспособных (РС) состояний. Это, в свою очередь, приводит к возникновению дополнительных ошибок в оценке показателей надежности таких систем.

В связи с этим, исследование погрешностей расчетов ПН СТС с МУРС при аппроксимации многоуровневой работоспособности бинарной и определение областей применения их моделей надежности (МН) является актуальным.

Анализ литературы. Вопросам практического применения соответствующих результатов при оценке надежности систем с МУРС не уделялось должного внимания. Так, до настоящего времени не определены четко погрешности расчетов ПН, возникающих при использовании моделей надежности (МН) с двухуровневой РС вместо МН с МУРС, не определена также и область их целесообразного применения.

В работах, посвященных анализу многоуровневых систем [2 – 5], как правило, исследуются только их определенные фундаментальные свойства.

Цель статьи. Исследование погрешностей расчета показателей надежности многоуровневых и двухуровневых моделей и обоснование областей их целесообразного применения.

Основная часть

Рассмотрим задачи исследования погрешностей расчета ПН на примере МН СТС минимальной сложности, т.е. нерезервированных невосстанавливаемых систем с трехуровневой и двухуровневой РС.

Будем считать известными погрешности задания характеристик безотказности (интенсивностей отказов)

$$\lambda_i(x_i(t)) \pm \Delta\lambda_i(x_i(t))$$

и показателей эффективности функционирования (ПЭФ)

$$\Phi_i(x_i(t)) \pm \Delta\Phi_i(x_i(t))$$

элементов такой СТС.

Рассмотрим систему с последовательной структурной схемой надежности и монотонно деградирующими независимыми элементами. Состояние i-го элемента системы в момент t будем задавать функцией $x_i(t)$, которая может принимать следующие значения: (2) – если i-й элемент находится в полностью работоспособном состоянии (ПРС); (1) – если i-й элемент находится в частично неработоспособном состоянии (ЧНРС); (0) – если i-й элемент находится в полностью неработоспособном состоянии (ПНРС).

Каждому состоянию $x_i(t)$ элемента соответствует ПЭФ (коэффициент качества функционирования) $\Phi_i(x_i(t))$, причем

$$\Phi_i(2) > \Phi_i(1) > \Phi_i(0) = 0 .$$

Состояние системы в момент t будем задавать функцией X(t), которая может принимать следующие значения: (2) – если система находится в ПРС; (1) – в ЧНРС; (0) – в ПНРС.

Предположим, что состояние элементов системы в каждый момент времени однозначно определяет состояние системы. Тогда

$$X(t) = F\left\{\vec{X}(t) = \left\{x_i(t), i = \overline{1,m}\right\}\right\},$$

где m – количество элементов СТС.

Предположим также, что функция $\vec{X}(t)$ – монотонна по всем своим аргументам [2], и система в состояниях $\vec{X}(t)$ характеризуется эффективностью функционирования $\Phi(\vec{X}(t))$ с ПЭФ $\Phi(X(t))$, причем $\Phi(2) > \Phi(1) > \Phi(0) = 0$.

Будем считать, что элементы СТС функционируют статистически независимо, а состояние системы и соответствующая ему эффективность функционирования определяется состоянием и эффективностью худшего элемента. Тогда система находится в состоянии (2), если все элементы находятся в состоянии (2); в состоянии (1), если хотя бы один элемент находится в состоянии (1) и отсутствуют элементы, находящиеся в состоянии (0); в состоянии (0), если хотя бы один элемент системы находится в состоянии (0), а ПЭФ системы в выделенных состояниях вычисляются по формулам $\Phi(2) = \min_i \Phi_i(2)$, $\Phi(1) = \min_i \Phi_i(1)$. Возможны и другие варианты задания зависимости ПЭФ системы от ПЭФ элементов.

Обозначим $P_i(x_i(t))$ $(i = 1...m)$ – вероятность нахождения i-го элемента СТС в состоянии $x_i(t)$, при условии, что в момент t = 0 он находился в состоянии (2). Аналогичный показатель P(X(t)) введем для системы. В соответствии с изложенным:

$$P(2,t) = \prod_{i=1}^{m} P_i(2,t), \tag{1}$$

$$P(0,t) = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - P_i(0,t)), \tag{2}$$

$$P(1,t) = 1 - P(0,t) - P(2,t). \tag{3}$$

Можно уточнить модель (1) – (3), увеличив, например, число уровней РС системы, или увеличив число состояний элементов системы, но тогда пространство возможных состояний МН будет иметь большую размерность, что усложнит МН и ее описание, и улучшит условия сравнения погрешностей расчета ПН в пользу МН с МУРС.

ПЭФ системы можно вычислить по формуле

$$M\left[\Phi\left(\vec{X}(t)\right)\right] = \Phi(2)P(2,t) + \Phi(1)P(1,t). \tag{4}$$

Рассмотрим модель функционирования монотонно деградирующего i-го элемента системы. В соответствии с приведенным выше описанием i-й элемент системы в момент времени t = 0 находится в состоянии $x_i(0) = 2$, далее он из состояния (2) может попасть только в состояние (1), из которого только в состояние (0) (рис. 1).

Пусть функции распределения продолжительности пребывания элемента в соответствующих состояниях $x_i(t)$ до перехода в состояние $(x_i(t) - 1)$ есть непрерывные функции $F_{i21}(t)$, $F_{i10}(t)$, тогда

$$P_i(2,t) = 1 - F_{i21}(t), \tag{5}$$

$$P_i(0,t) = F_{i21}(t) * F_{i10}(t), \tag{6}$$

$$P_i(1,t) = 1 - P_i(2,t) - P_i(0,t), \tag{7}$$

где * – операция свертки.

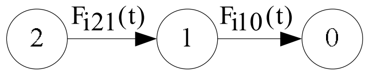

Рис. 1. Граф переходов монотонно деградирующего i-го элемента системы с тремя состояниями

Для Марковской МН i-го элемента системы $F_{i21}(t) = 1 - e^{-\lambda_{i2} t}$, $F_{i10}(t) = 1 - e^{-\lambda_{i1} t}$ и при $\lambda_{i2} \neq \lambda_{i1}$

$$F_{i21}(t) * F_{i10}(t) = 1 - \left(\frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i1} - \lambda_{i2}} e^{-\lambda_{i2} t} - \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1} - \lambda_{i2}} e^{-\lambda_{i1} t} \right), \tag{8}$$

и в соответствии с (5) – (7) получим вероятности нахождения i-го элемента системы в состояниях (2), (1), (0):

$$P_i(2,t) = e^{-\lambda_{i2} t}, \tag{9}$$

$$P_i(1,t) = \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1} - \lambda_{i2}} \left(e^{-\lambda_{i2} t} - e^{-\lambda_{i1} t} \right), \tag{10}$$

$$P_i(0,t) = 1 - \left(\frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{i1} - \lambda_{i2}} e^{-\lambda_{i2} t} - \frac{\lambda_{i2}}{\lambda_{i1} - \lambda_{i2}} e^{-\lambda_{i1} t} \right). \tag{11}$$

Для полученной трехуровневой МН i-го элемента СТС разработаем соответствующие двухуровневые МН. На рис. 2 а, б приведены графы переходов двухуровневых МН элемента, полученных из графа переходов трехуровневой МН (рис. 1) путем:

а) объединения состояний (2) и (1) в состояние (1'), при этом состояние (0') соответствует состоянию (0), а $F'_{i10}(t) = F_{i21}(t) * F_{i10}(t)$;

б) объединения состояний (1) и (0) в состояние (0'') при этом состояние (1'') соответствует состоянию (2), а $F''_{i10}(t) = F_{i21}(t)$.

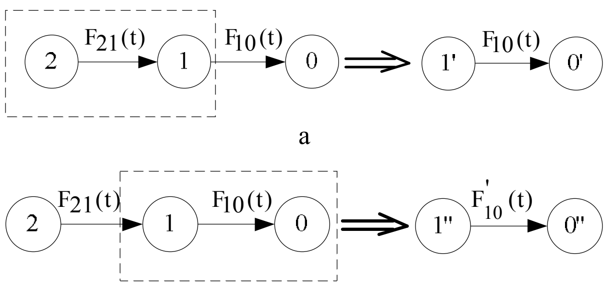

Рис. 2. Графы переходов элемента СТС при различных вариантах укрупнения состояний

Тогда вероятности пребывания элемента в соответствующих состояниях и ПЭФ можно рассчитать по соотношениям двухуровневой МН, полученной в результате укрупнения по первому варианту (рис. 2а):

$$P(0',t) = P(0,t), \tag{12}$$

$$P(1',t) = P(1,t) + P(2,t), \tag{13}$$

$$M\left[\Phi\left(\vec{X}(t)\right)\right] = \Phi(1')P(1',t), \tag{14}$$

или по соотношениям двухуровневой МН при втором варианте укрупнения (рис. 2б)

$$P(0'',t)=P(0,t)+P(1,t)\,, \tag{15}$$

$$P(1'',t)=P(2,t)\,, \tag{16}$$

$$M\left[\Phi\left(\vec{X}(t)\right)\right]=\Phi(1'')P(1'',t)\,, \tag{17}$$

где $\Phi(1'')=\Phi(2)$.

Получим теперь соотношения для погрешностей вычисления ПЭФ одноэлементной системы и системы, состоящей из двух элементов для случая незначительных погрешностей задания исходных данных, то есть когда их можно положить равными 0: $\Delta\lambda_i=\Delta\Phi_i=0$.

Относительная погрешность вычисления ПЭФ одноэлементной системы для первого варианта укрупнения состояний равна

$$\delta_a^{(1)}(t)=\frac{\Phi(2)P(2,t)+\Phi(1)P(1,t)-\Phi(1')P(1',t)}{\Phi(2)P(2,t)+\Phi(1)P(1,t)}\,. \tag{18}$$

Если в формуле (18) положить Ф(1') = Ф(2), то величина погрешности $\delta_a^{(1)}(t)$ будет отрицательной, то есть пренебрежение частичными отказами и завышение эффективности эквивалентной двухуровневой системы (Ф(2)=Ф(1)=2), при данном варианте укрупнения, завышает оценку ПН системы. Если в соотношении (18) положить $\Phi(1')=\Phi(1)$, то величина погрешности $\delta_a^{(1)}(t)$ будет положительной, то есть пренебрежение частичными отказами и занижение эффективности эквивалентной двухуровневой системы $\Phi(2)=\Phi(1)=1$, при данном варианте укрупнения, занижает оценку ПН системы. Меньшая погрешность вычисления ПЭФ по эквивалентной МН с двухуровневой РС достигается при других вариантах вычисления ПЭФ укрупненной системы, например $\Phi(1')=0,5\left(\Phi(2)+\Phi(1)\right)$.

Относительная погрешность вычисления ПЭФ одноэлементной системы для второго варианта укрупнения состояний равна

$$\delta_б^{(1)}(t)=\frac{\Phi(1)P(1,t)}{\Phi(2)P(2,t)+\Phi(1)P(1,t)}\,. \tag{19}$$

Для второго варианта укрупнения частичные отказы считаются полными и тогда

$$\Phi(0'')=\Phi(1)=0\,,$$

поэтому величина $\delta_б^{(1)}(t)$ будет положительной, а оценки ПН системы всегда заниженными.

Для Марковской МН относительные погрешности вычисления ПЭФ одноэлементной системы для рассмотренных двух вариантов укрупнения равны

$$\delta_a^{(1)}(t)=$$

$$=1-\frac{\Phi(1')\left(\dfrac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_2 t}-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}e^{-\lambda_1 t}\right)}{\Phi(2)e^{-\lambda_2 t}+\Phi(1)\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 t}-e^{-\lambda_1 t}\right)}, \tag{20}$$

$$\delta_б^{(1)}(t)=\frac{\Phi(2)e^{-\lambda_2 t}}{\Phi(2)e^{-\lambda_2 t}+\Phi(1)\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 t}-e^{-\lambda_1 t}\right)}\,. \tag{21}$$

Для системы, состоящей из двух элементов, вероятности нахождения в состояниях X(t) вычисляются в соответствии с (1) – (3), а ПЄФ в состоянии (2) равна $\Phi(2)=\min\limits_i \Phi_i(2)=\Phi_{i^*}(2)$, в состоянии (1) – $\Phi(1)=\min\limits_i \Phi_i(1)=\Phi_{i^*}(1)$.

Рассмотрим соответствующие варианты укрупнения системы, состоящей из двух элементов (рис. 2):

1) состояние (1') системы получено путем объединения состояний системы (2) и (1), состояние (0') системы соответствует состоянию системы (0);

2) состояние (1") системы соответствует состоянию системы (2), состояние (0") системы получено путем объединения состояний системы (1) и (0).

Расчетные соотношения для вероятностей пребывания системы в соответствующих состояниях и ПЭФ имеют вид (12) – (17).

Тогда относительные погрешности вычисления ПЭФ двухэлементной системы для первого и второго варианта укрупнения состояний $\delta_a^{(2)}(t)$, $\delta_б^{(2)}(t)$ вычисляются в соответствии с (18), (19).

Рассмотрим теперь вариант задания исходных данных, когда погрешностями задания характеристик элементов системы пренебречь нельзя $(\Delta\lambda_i\neq 0,\quad \Delta\Phi_i\neq 0,\quad i=1,2)$.

Соотношения для абсолютных погрешностей расчета ПН и эффективности одноэлементной системы найдем используя известное соотношение для абсолютной погрешности функции по нескольким переменным [6].

Для Марковской МН абсолютная погрешность вычисления вероятностей трехуровневой системы в состояниях (2) и (1) равна

$$\Delta P(2)=\Delta\lambda_2 te^{-\lambda_2 t}\,, \tag{22}$$

$$\Delta P(1)=\Delta\lambda_1\left|\frac{\lambda_2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\left(e^{-\lambda_2 t}-e^{-\lambda_1 t}\right)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}te^{-\lambda_1 t}\right|+$$

$$+\Delta\lambda_2\left|\frac{\lambda_1}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}\left(e^{-\lambda_2 t}-e^{-\lambda_1 t}\right)-\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}te^{-\lambda_2 t}\right|. \tag{23}$$

Абсолютные погрешности вычисления вероятностей нахождения эквивалентных двухуровневых систем в состояниях (1') и (1") в соответствии с (13), (16) равны

$$\Delta P(1')=\Delta P(1)+\Delta P(2),\quad \Delta P(1'')=\Delta P(2)\,. \tag{24}$$

Погрешности вычисления ПЭФ одноэлементной системы ΔФ(2) и ΔФ(1) определяются погрешностями задания ПЭФ элемента $\Delta\Phi_i(2)$.

Тогда абсолютная погрешность вычисления ПЭФ трехуровневой одноэлементной системы равна

$$\Delta M\left[\Phi\left(X(t)\right)\right]=\Delta\Phi(2)P(2,t)+\Delta\Phi(1)P(1,t)+$$

$$+\Phi(2)\Delta P(2)+\Phi(1)\Delta P(1), \qquad (25)$$

где $\Delta\Phi(2)=\Delta\Phi_i(2)$, $\Delta\Phi(1)=\Delta\Phi_i(1)$, $\Phi(2)=\Phi_i(2)$, $\Phi(1)=\Phi_i(1)$.

При укрупнении состояний трехуровневой одноэлементной системы погрешность определения значения ПЭФ определяется способом укрупнения.

Относительная погрешность вычисления ПЭФ одноэлементной системы для первого варианта укрупнения равна

$$\delta_{a'}^{(1)}(t)=\frac{\Delta\Phi(1')P(1',t)+\Delta P(1')\Phi(1')}{\Phi(2)P(2,t)+\Phi(1)P(1,t)}, \qquad (26)$$

где: 1) $\Delta\Phi(1')=\Delta\Phi(2)$, если $\Phi(1')=\Phi(2)$;

2) $\Delta\Phi(1')=\Delta\Phi(1)$, если $\Phi(1')=\Phi(1)$.

Относительная погрешность вычисления ПЭФ одноэлементной системы для второго варианта укрупнения равна

$$\delta_{б'}^{(1)}(t)=\frac{\Delta\Phi(2)P(1'',t)+\Delta P(1'')\Phi(2)}{\Phi(2)P(2,t)+\Phi(1)P(1,t)}, \qquad (27)$$

где $\Delta\Phi(1'')=\Delta\Phi(2)$.

Погрешности вычисления ПЭФ трехуровневой системы, состоящей из двух элементов, вычисляется в соответствии с (25) ... (27), где

$$P(2,t)=f(t,\lambda_{12},\lambda_{22}),\ P(1,t)=f(t,\lambda_{ij}),$$

$$\Delta P(2)=f(\lambda_{12},\lambda_{22},\Delta\lambda_{12},\Delta\lambda_{22}),\ \Delta P(1)=f(\lambda_{ij},\Delta\lambda_{ij})$$

рассчитываются по соотношениям (1) – (3), а

$$\Delta\Phi(2)=\Delta\Phi_{i^*}(2),\ \Delta\Phi(1)=\Delta\Phi_{i^*}(1),$$

$$\Phi(2)=\Phi_{i^*}(2),\ \Phi(1)=\Phi_{i^*}(1).$$

Выводы

Результаты выполненных исследований показывают, что при незначительных погрешностях исходных данных результаты расчетов ПН по МН с двухуровневой и многоуровневой работоспособностью могут существенно отличаться, что определяется способом укрупнения и конкретными характеристиками безотказности и эффективности функционирования элементов системы.

При значительных погрешностях задания исходных данных (наиболее распространенная в инженерной практике ситуация) использование двухуровневых МН может завысить оценки позитивных ПН, если при укрупнении пренебречь частичными отказами, или занизить их, если считать все отказы полными. С увеличением числа уровней РС и (или) числа элементов в системе погрешности расчетов ПН по бинарным МН растут. Полученные аналитические соотношения позволяют исследовать погрешности расчетов показателей надежности и эффективности функционирования систем с трехуровневой и двухуровневой РС в зависимости от погрешностей исходных данных, а также от погрешностей укрупнения МН системы с МУРС и определять области их целесообразного применения.

Список литературы

1. *Ланецкий Б.Н. Адаптивное управление техническим состоянием и надежностью сложных технических систем в условиях ресурсных ограничений / Б.Н. Ланецкий, В.В. Лукьянчук // Системи озброєння і військова техніка. – Х.: ХУ ПС, 2010. – Вип. 4 (24). – С. 27-31.*
2. *Байхельт Ф. Надежность и техническое обслуживание. Математический подход / Ф. Байхельт, П. Франке.. – М.: Радио и Связь, 1988.*
3. *Барлогу Р. Математическая теория надежности / Р. Барлоу, Ф. Прошан. – М.: Сов. радио, 1969.*
4. *Райнишке К. Оценка надежности систем с использованием графов / К. Райнишке, И.А. Ушаков. – М.: Радио и свіязь, 1988.*
5. *Ланецкий Б.Н. Исследование погрешностей расчета показателей надежности объектов с многоуровневой работоспособностью / Б.Н. Ланецкий, С.В. Бондаренко // Збірник наукових праць "Системи обробки інформації". – Х.: ХВУ, 2004. – Вип. 2. – С. 89-98.*
6. *Кронштейн И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1981.*

Поступила в редколлегию 20.06.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Б.А. Демидов, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожедуба, Харьков.

ОБҐРУНТУВАННЯ ОБЛАСТІ ВИКОРИСТАННЯ МОДЕЛЕЙ НАДІЙНОСТІ СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ С БАГАТОРІВНЕВОЮ ПРАЦЕЗДАТНІСТЮ

В.В. Лук'янчук, Б.М. Ланецький

Наводяться аналітичні співвідношення для погрішностей розрахунку показників надійності та ефективності функціонування складних технічних систем (СТС) з трьохрівневою і двохрівневою працездатністю як функції від погрішностей вихідних даних, укрупнення стану багаторівневої працездатності,які дозволяють проводити відповідні дослідження конкретних СТС та встановлювати область їх використання. Наводяться загальні результати дослідження погрішностей розрахунку показників надійності СТС при апроксимації їх багаторівневої працездатності однорівневої.

***Ключеві слова:** складна технічна система, багаторівнева працездатність, модель надійності.*

APPLICABILITY GROUNDING OF RELIABILITY MODELS OF COMPLEX TECHNICAL SYSTEMS WITH LAYERED CAPACITY TO WORK

V.V. Lukjanchuk, B.N. Lanetskij

Analytical relations of inaccuracy of reliability and efficiency calculations for the complex technical systems (CTS) with three-level and two-level capacity to work as functions depending on inaccuracy of the raw data and consolidation of states in the layered capacity to work allow us to study specific CTS and single out the area of their application. General results are presented of the studying the reliability calculation inaccuracy for CTS when approximating their layered capacity to work by single-level one.

***Keywords:** adaptive management, complex technical system, layered operational capacity.*