УДК 004.722

Ю.В. Кравченко[1], С.А. Микусь[2]

[1] *Державний університет телекомунікацій, Київ*
[2] *Національний університет оборони України імені Івана Черняховського, Київ*

МЕТОД ПОЕТАПНОГО ЗМЕНШЕННЯ ПОТУЖНОСТІ БАЗИ МАТРОЇДА В ЗАДАЧАХ ПОБУДОВИ ТОПОЛОГІЇ СИСТЕМИ ЗВ'ЯЗКУ І АВТОМАТИЗАЦІЇ УПРАВЛІННЯ ВІЙСЬКАМИ

Запропоновано метод поетапного зменшення потужності бази к-однорідного матроїда в задачах оптимізації топології системи зв'язку і автоматизації управління військами.

Ключові слова: *база к-однорідного матроїда, топологія, система зв'язку і автоматизації управління військами.*

Вступ

Постановка завдання. При синтезі складних технічних систем, до яких повною мірою відноситься і система зв'язку і автоматизації управління військами (АУВ), виникає необхідність рішення задач дискретної оптимізації. Для цих задач, як відомо, важлива боротьба за точність. Дослідження показали, що в багатьох випадках тільки повний або направлений перебір можуть дати точне рішення. Як завжди, повний перебір не можливий через проблему великої розмірності. Відомо, що серед методів та алгоритмів направленого перебору найкращим є той, для якого до його початку або в період його виконання можливо відкинути як можна більше неперспективних варіантів (елементів множини допустимих рішень). Для складних систем множина припустимих рішень при завданні оптимізації структури є комбінаторним об'єктом, а цільова функція визначається алгоритмічно. У таких умовах актуальною є розробка найбільш ефективних методів пошуку точного рішення. Існуюча теорія дискретної оптимізації, яка досить повно описана у багатьох наукових роботах, вимагає розвитку щодо конкретних технічних завдань. Це пов'язано з тим, що основою процедури, яка дозволяє зменшити область припустимих рішень, є апріорна інформація, яка безпосередньо залежить від конкретної ситуації або технічної системи [1 – 9].

Метою даної роботи є доведення результатів досліджень щодо розробки методу поетапного зменшення потужності бази *k*-однорідного матроїда для організації направленого перебору в задачах дискретної оптимізації на прикладі оптимізації топології системи зв'язку і автоматизації управління військами.

Виклад основного матеріалу

Введемо поняття матроїда топології системи зв'язку і АУВ.

Визначення 1. Матроїд – комбінаторний об'єкт, що представляє собою пару $M=(E,\varepsilon)$, де E – кінцева непуста множина елементів матроїда, а ε – непуста множина його підмножин (назвемо їх базами), які задовольняють наступним двом умовам:

B1) ніяка з баз не міститься в іншій базі;

B2) якщо B_1 і B_2 – бази, то для будь-якого елемента $b \in B_1$ існує такий елемент $c \in B_1$, що $(B_1 \setminus b) \cup c$ – також база.

Існують інші еквівалентні визначення матроїда. Поняття матроїда відіграє важливу роль у комбінаторній теорії.

База (базіс) матроїда – максимальна за включенням незалежна множина елементів матроїда.

Незалежні множини елементів матроїда – сімейство ε підмножин елементів з E, що задовольняють наступним аксіомам:

I0) $\varnothing \in \varepsilon$;

I1) якщо $X \in \varepsilon$ й $Y \subseteq X$, то $Y \in \varepsilon$;

I2) якщо X, Y – елементи з ε такі, що |X| = |Y| + + 1, то існує $X \in X \setminus Y$ такий, що $Y \cup \{x\} \in \varepsilon$.

Підмножина із E, що не є приналежна ε, називається *залежною*. Систему аксіом доцільно обрати I1 і I2, тому що I0 витікає із I1. Крім того, існують варіанти аксіоми I'2, I"2, еквівалентні I2:

I'2) якщо X, Y $\in \varepsilon$ і |Y| < |X|, то в X \ Y існує елемент x такий, що $Y \cup \{x\} \in \varepsilon$;

I"2) якщо X, Y $\in \varepsilon$ і |Y| < |X|, то в X існує така підмножина *Z*, що $Y \cup Z \in \varepsilon$ і $|Y \cup Z| = |X|$.

Рангом M будемо називати число елементів його бази. Поняття рангу матроїда введено у зв'язку з тим, що будь-які дві бази містять однакову кількість елементів. Дана властивість є результатом багаторазового застосування B2.

Визначення 2. Матроїдом топології системи зв'язку і АУВ називається пара $M=(E,\varepsilon)$, де E – кінцева непуста множина елементів матроїда, що представляють собою зв'язки між елементами, а ε – непуста множина його підмножин (названих базами).

Матроїд топології системи зв'язку і АУВ є k-*однорідний* матроїд на E, базами якого є всі незалежні між собою підмножини множини *E*, що містять рівно *k* елементів.

Нескладно помітити, що потужність множини допустимих рішень A, елементами якого є варіанти побудови топології системи зв'язку і АУВ $|A| = 2^N$, отже, область можливих варіантів *A* – булеан. Як відомо, булеан – окремий випадок такого комбінаторного об'єкту як матроїд. У роботі [2] запропоновано комбінаторний підхід у дискретній оптимізації, що для синтезу складної технічної системи розглядається як сукупність методу часткових порядків, концепції опуклості в частково впорядкованих множинах і схеми побудови серії градієнтних алгоритмів.

Суть методу часткових порядків у тому, що з елементів припустимої множини можливих рішень задачі дискретної оптимізації формується така частково впорядкована множина (*у-множина*), для якої цільові функції є порядково-випуклими, тобто і функції й їхні градієнти монотонні уздовж ланцюгів, побудованих частковим порядком. Процедуру формування частково впорядкованої множини іноді називають зануренням допустимої множини рішень задачі дискретної оптимізації в частково впорядковану множину. У методі часткових порядків інформація про клас цільових функцій задається у вигляді часткового порядку на припустимій множині *A*.

Нехай $\prec$ – інформація про клас F, тоді при рішенні задачі дискретної оптимізації із цільовою функцією із класу F звертання до f-оракула необхідно лише в точках, що є максимальними елементами у-множини A, тому що серед них перебуває хоча б один оптимальний елемент. Тому трудомісткість будь-якого алгоритму Al, що вирішує довільну задачу дискретної оптимізації із цільовою функцією f із класу F, оцінюється потужністю максимальної бази:

$$\phi(Al, f) = \left|A^{max}\right|.$$

Нагадаємо, що елемент x з A називається максимальним елементом у-множини $(A, \prec)$, якщо не існує іншого елемента y з A**,** що $x \prec y$. Множина всіх максимальних елементів у-множини $(A, \prec)$ називаємо максимальною базою і позначаємо A_{max}. Аналогічно вводиться мінімальний елемент і максимальна база A_{min}. Надати конструктивний опис елементів максимальної бази вдається не для кожної задачі дискретної оптимізації. Особливий інтерес представляють задачі, у яких максимальний елемент єдиний. У таких задачах максимальний елемент є оптимальним, і немає необхідності обчислювати цільову функцію в яких-небудь точках.

Побудова максимальної бази A_{max} більшості у-множин $(A, \prec)$ натрапляє на істотні ускладнення. Основні з них пов'язані із проблемою конструктивного опису множини A. Звичайно добре описана тільки деяка множина H, що містить A. Такою множиною може бути булевий куб, ґрати Z^N цілих точок в R^N. Функцію g на H, що володіє властивістю $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \in A$, називають g-оракулом (g-оракул може перевірити приналежність множини A будь-якому елементу з H). Трудомісткість алгоритму Al побудови максимальної бази будемо оцінювати числом $\psi(Al, g)$ викликів g-оракула. У-множину $(H, \prec)$ зручно представляти за допомогою діаграми Хассе, у якій точки зображують елементи з H, причому якщо $a \prec b$, то a розташовують під b і з'єднують a і b відрізком. Це з'єднання роблять лише тоді, коли з того, що $z \in H$ і $a \prec z \prec b$, слідує, що $a = z$ або $z = b$. У цьому випадку говорять, що елемент b слідує за a, елемент a безпосередньо передує b. Отже, метод часткових порядків дозволяє одержати оптимальне або субоптимальне рішення задачі дискретної оптимізації без трудомісткого обчислення цільової функції за відомою апріорною інформацією про клас цільової функції через відношення часткового порядку.

Доведено, що на матроїді градієнтні алгоритми знаходять, як правило, оптимальне рішення. В основі доказу лежить ідея широко відомої для передгеометрії теореми Радо-Едмонса [3].

Теорема 1. Якщо $M = \langle E, \varepsilon \rangle$ – матроїд, то для будь-якої вагової функції ω жадібний алгоритм знаходить незалежну множину X з найбільшою вагою; якщо ж $M = \langle E, \varepsilon \rangle$ – не є матроїдом, то існує така вагова функція ω, що множина X, знайдена жадібним алгоритмом, не буде максимальною.

Доведення. Нехай $M = \langle E, \varepsilon \rangle$ перестановочний багатогранник, а $X = \{x_1, ..., x_k\}$ – множина, побудована жадібним алгоритмом, тоді $\omega(x_1) \geq ... \geq \omega(x_k) > 0$. Відповідно до визначення бази, X – база M. Нехай $Y = \{y_1, ..., y_m\} \in \varepsilon$ – деяка незалежна множина. Маємо $m \leq k$, тому що X – база. Покажемо, що $\omega(y_i) \leq \omega(x_i)$.

Від противного. Нехай $\omega(y_i) > \omega(x_i)$. Розглянемо незалежну множину $A = \{x_1, ..., x_{i-1}\}$ і $B = \{y_1, ..., y_i\}$. Маємо $\exists\, j \leq i\ \{x_1, ..., x_{i-1}, y_j\}$ – незалежна множина. Тоді

$$\omega(y_j) \geq \omega(y_i) > \omega(x_i) \Rightarrow \exists\, p \leq i\ \omega(x_i) \geq ...$$
$$\geq \omega(x_{p-1}) \geq \omega(y_j) \geq \omega(x_p),$$

що суперечить тому, що x_p – елемент із найбільшою вагою, додавання якого до $\{x_1, ..., x_{p-1}\}$ не порушує незалежності. Отже,

$$\forall i\ \omega(y_i) \leq \omega(x_i) \Rightarrow \omega(Y) \leq \omega(X).$$

Обернено. Нехай $M = \langle E, \varepsilon \rangle$ не є матроїдом. Якщо порушено умову (I2), тобто $\exists\, A, B\quad A \subset B \in \varepsilon$, але $A \notin \varepsilon$, тоді визначимо функцію ω у такий спосіб:

$$\omega(e) := \begin{cases} 1, & : e \in A; \\ 0, & : e \in E \setminus A. \end{cases} \quad (1)$$

Тоді $A \notin \varepsilon \Rightarrow A \not\subset X \Rightarrow |X| < |A|$.

Якщо ж умова (I2) дотримується, але порушена умова (I3), то

$$\exists\, A, B\; |A| = k \;\&\; |B| = k+1$$

і $\forall\, e \in B \setminus A\;\; A \cup \{e\}$ – залежне.

Нехай $p := |A \cap B|$, тоді $p < k$.

Виберемо число ε так, що $0 < \varepsilon < 1/(k-p)$.

Визначимо функцію ω в такий спосіб:

$$\omega(e) = \begin{cases} 1+\varepsilon, & \text{якщо } e \in A, \\ 1, & \text{якщо } e \in B \setminus A, \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (2)$$

Відмітимо, що при таких вагах жадібний алгоритм вибере спочатку всі елементи з A і відкине елементи B/A.

У результаті буде обрана множина X, вага якого менше ваги множини B. Дійсно,

$$\omega(X) = \omega(A) = k(1+\varepsilon) = (k-p)(1+\varepsilon) + p(1+\varepsilon) \le$$
$$\le (k-p)(1+1/(k-p)) + p(1+\varepsilon) = (k-p+1) +$$
$$+p(1+\varepsilon) = \omega(B).$$

Що й було потрібно довести.

Той факт, що множина допустимих рішень ототожнюється з матроїдом, означає, що для рішення поставленої задачі можна застосовувати жадібний алгоритм, однак із цього не слідує, що не може існувати ще більш ефективного алгоритму. З іншого боку, якщо (E, ε) не є матроїдом, то це ще не означає, що жадібний алгоритм не знайде правильного рішення, все залежить від властивості конкретної функції ω [3]. Жадібні алгоритми і їхні властивості досліджено досить добре, та їхнє знання при рішенні оптимізаційних задач є важливим. Якщо вдається звести подібну задачу до того, що множина допустимих рішень є матроїдом, то в більшості випадків варто застосовувати жадібний алгоритм, оскільки він досить ефективний у практичному змісті. Якщо ж виявиться навпаки, і множина можливих варіантів не утворить матроїд, тоді, швидше за все, градієнтний алгоритм не буде ефективний.

Нехай є кінцева множина $У = E, |E| = n$, вагова функція $\omega : E \to R_+$ і сімейство $\varepsilon \subset 2^E$.

Розглянемо задачу: знайти $X \in \varepsilon$, за умови

$$\omega(X) = \max_{Y \in t} \omega(Y),$$

де $\omega(Z) := \sum_{e \in Z \subset E} \omega(e)$. Інакше кажучи, необхідно відшукати в зазначеному сімействі підмножину найбільшої ваги.

Нехай $\omega(e_1) \ge \ldots \ge \omega(e_n) > 0$, тоді жадібний алгоритм має вигляд:

вхід: множина $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, сімейство його підмножин ε і вагова функція ω. Множина E впорядкована в порядку убування ваги елементів.

Вхід: множина X.

X: = $\varnothing$ {початкова множина X пуста}.

for i from 1 to n do.

if $X \cup \{e_i\} \in \varepsilon$ then.

$X := X \cup \{e_i\}$ {додаємо в X перший підходящий елемент}.

end if end for.

Очевидно, що при побудові остаточна множина $X \in \varepsilon$. Також очевидно, що жадібний алгоритм є надзвичайно ефективним і лінійним, не враховуючи витрат на сортування множини E і перевірку незалежності $X \cup \{e_i\} \in \varepsilon$. Основне питання полягає у визначенні випадків, коли жадібний алгоритм дійсно вирішує поставлену задачу [3].

Ідея застосування градієнтних алгоритмів при оптимізації топології системи зв’язку і АУВ заснована на особливостях функціонування системи. Тому як градієнтом виступає відношення мажоризації. Дійсно, для такої системи збільшення кількості елементів (зв'язків між елементами) однозначно веде до росту (або не до зниження) значення показників ефективності її функціонування.

Пропонується здійснювати пошук рішення за принципом послідовного зменшення кількості надлишкових елементів і зв'язків структури для забезпечення відновлення максимальних функціональних можливостей при мінімальному використанні ресурсу (надмірності) (рис. 1). На всіх етапах занурення множини допустимих рішень в частково впорядковану множину здійснюється на основі відношення мажоризації. Спочатку формується k-однорідна топологія системи зв’язку і АУВ з елементів і зв'язків, множина баз яких є множиною всіх можливих структур з максимальної кількості елементів і зв'язків $M = (E, \varepsilon);\ A \subseteq \varepsilon;\ \rho(A) = |A|$. Далі застосування жадібного алгоритму дозволяє знайти найкраще рішення, для якого розраховується значення показника ефективності. Слід зазначити, що перебір варіантів здійснюється за всіма видами надмірності $\alpha^* = \arg\max P(\alpha)\ \forall \alpha \in A_1$ при $P(\alpha^*) \ge P_{ЗАД}$.

На наступному етапі відбувається зменшення потужності бази матроїда на одиницю

$$M_{-1} = (E \backslash e, \varepsilon_{-1});\ A_{-1} \subseteq \varepsilon_{-1};\ \rho(A_{-1}) = |A_{-1}|;$$
$$\rho(A)\text{-}\rho(A_{-1}) = 1,$$

і попередня процедура повторюється із застосуванням градієнтного алгоритму і розрахунком значення показника функціональної стійкості. Далі за показником функціональної стійкості виконується порівняння знайденого рішення із заданим рівнем функціональної стійкості.

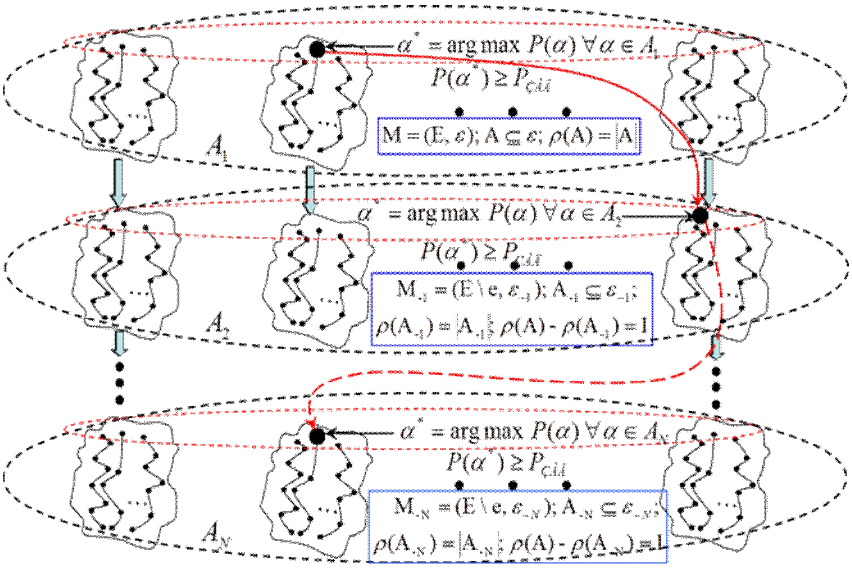

Рис.1. Схема пошуку рішення за методом поетапного зменшення потужності бази (базису) матроїда

Для рішення, що задовольняє за показником ефективності, послідовно перевіряються варіанти, включені за допомогою відношень часткового порядку в даний варіант, із метою пошуку рішення з мінімальним застосуванням надмірності і заданим рівнем функціональної стійкості. Процедура поетапного зменшення потужності бази матроїда буде тривати доти, поки рішення не вийде за межі потрібної ефективності. У цьому випадку оптимальним буде рішення, отримане на попередньому етапі

$$\alpha^* = \arg\max P(\alpha)\ \forall\alpha \in A .$$

Даний метод класифікується як точний метод дискретної оптимізації, а саме градієнтний метод направленого перебору.

Ефективність розробленого методу оцінимо за кількістю звернень до f-оракула і визначимо виграш у порівнянні з повним перебором.

Так як при повному переборі число звернень до цільової функції для алгоритму B_Π дорівнює потужності множини можливих рішень $\phi(B_\Pi, F) = |A|$, то при булевих змінних $\phi(B_\Pi, F) = 2^N$, де N − кількість можливих елементів у топології системи зв'язку і АУВ.

Нескладно помітити, що виграш Δ при застосуванні розробленого алгоритму B_P у зверненні до f-оракула в порівнянні з алгоритмом B_Π повного перебору дорівнює

$$\Delta = \phi(B_\Pi, F) - \phi(B_P, F) \approx k(2^N - \frac{N!}{m!(N-m)!}),$$

де k − коефіцієнт пропорційності; m – кількість типів надмірності в структурі системи.

Результати моделювання виграшу при різних варіаціях N, m показані на графіках (рис. 2, 3). Вони підтверджують ефективність розробленого методу, а також збіжність отриманих результатів з відповідними, відомими раніше, результатами дискретної оптимізації.

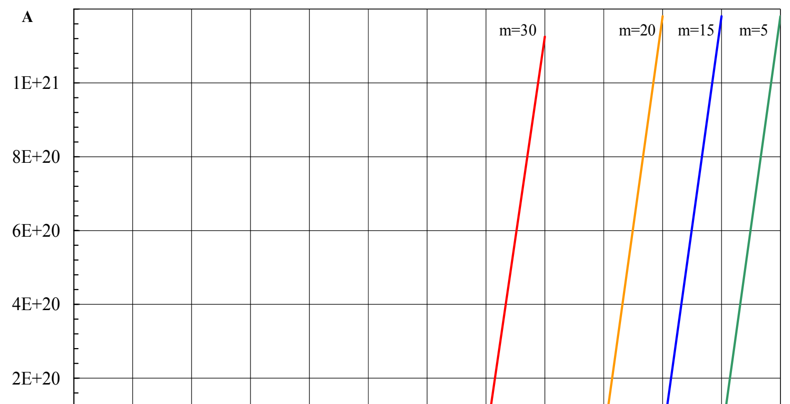

Рис. 2. Залежність виграшу від максимально можливої кількості елементів у топології системи зв'язку і АУВ

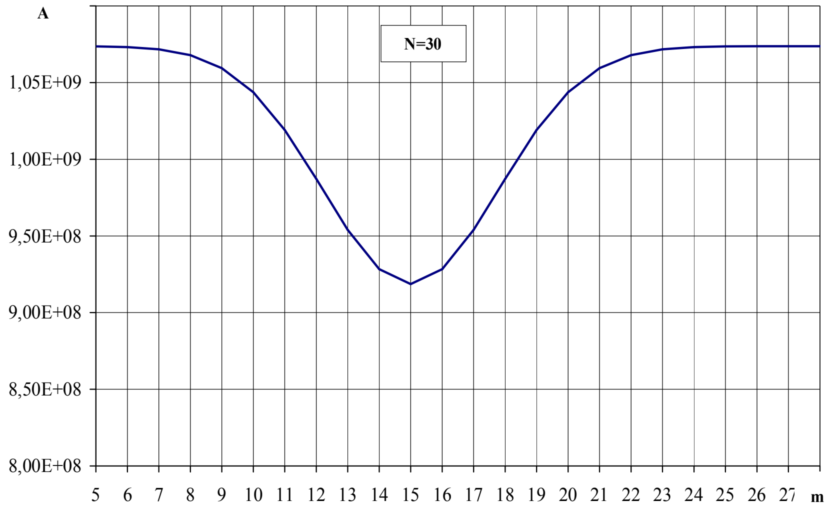

Рис. 3. Залежність виграшу від кількості типів надмірності в топології системи зв'язку і АУВ при N=30

Висновки

В статті запропоновано метод поетапного зменшення потужності бази (базиса) матроїда, який класифікується як точний метод дискретної оптимізації, побудований за принципом направленого або неявного перебору.

В основі методу є науково-обґрунтоване положення про те, що область допустимих рішень асоціюється з таким комбінаторним об'єктом, як матроїд, та про те, що максимальна за включенням незалежна підмножина множини допустимих рішень, тобто база (базис) матроїда, відображає мінімально-необхідний склад топології системи. Запропонований метод є основою методики оптимізації топології системи зв'язку і АУВ.

Список літератури

1. *Емеличев В.А. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников / В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.А. Кравцов. – М.: Наука, 1981. – 344 с.*

2. *Ковалев М.М. Матроиды в дискретной оптимизации / М.М. Ковалев. – Минск : Университетское, 1987.– 222 с.*

3. *Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – 2-е изд. / Ф.А. Новиков // – СПб.: «Питер», 2005. – 364 с.*

4. *Баранов Г. Л. Структурное моделирование сложных динамических систем / Г. Л. Баранов, А. В. Макаров. – К. : Наукова думка, 1986. – 272 с.*

5. *Большие технические системы: проектирование и управление / Л.М. Артюшин, Ю.К. Зиатдинов, И.А. Попов, А.В. Харченко. Под ред. И.А. Попова. – Х.: Факт, 1997. – 284 с.*

6. *Ковалев М.М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование) / М.М. Ковалев. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 192 с.*

7. *Кравченко Ю.В. Методология многокритериальной дискретной оптимизации сложных технических систем на матроидных структурах / Ю.В. Кравченко, В.В. Афанасьев // Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г.Є. Пухова. – Вип. 22 – 1. – К. : ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова – 2003. – С. 73 – 78.*

8. *Кравченко Ю.В. Применение метода последовательного увеличения ранга k-однородного матроида в задаче синтеза структуры псевдоспутниковой радионавигационной системы / Ю.В. Кравченко // Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. – 2008. – №2(2). – С. 19 – 22.*

9. *Неділько С.М. Основи теорії функціональної стійкості автоматизованої системи управління повітряним рухом / С.М. Неділько. – Кіровоград: ДЛАУ, 2011. – 220 с.*

Надійшла до редколегії 10.10.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф. М.Д. Огороднійчук, Національний університет оборони України імені Івана Черняховського, Київ.

МЕТОД ПОЭТАПНОГО УМЕНЬШЕНИЯ МОЩНОСТИ БАЗЫ МАТРОИДА В ЗАДАЧАХ ПОСТРОЕНИЯ ТОПОЛОГИИ СИСТЕМЫ СВЯЗИ И АВТОМАТИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ВОЙСКАМИ

Ю.В. Кравченко, С.А. Мыкусь

Предложено метод поэтапного уменьшения мощности базы к-однородного матроида в задачах оптимизации топологии системы связи и автоматизации управления войсками.

***Ключевые слова**: база к-однородного матроида, топология, система связи и автоматизации управления войсками.*

METHOD OF STAGE-BY-STAGE POWER REDUCTION OF THE MATROID BASIS IN PROBLEMS OF TOPOLOGY BUILDING FOR THE SYSTEM OF COMMUNICATION AND AUTOMATION OF TROOP COMMAND AND CONTROL

Yu.V. Kravchenko, S.A. Mykus

A method of stage-by-stage power reduction of basis of k-uniform matroid in problems of optimization of topology of the system of communication and automation of troop command and control is offered.

***Keywords:** k-uniform matroid basis, topology, a system of communication and automation of troop command and control.*