

УДК 629.7.015.7

С.М. Еременко<sup>1</sup>, О.В. Соловьев<sup>2</sup>, П.В. Прусак<sup>1</sup>, Н.В. Кобрина<sup>1</sup><sup>1</sup> *Национальный аэрокосмический университет имени Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков*<sup>2</sup> *ГП «Чугуевский авиационный ремонтный завод», Чугуев*

## ОСОБЕННОСТИ МЕТОДИКИ РАСЧЁТА ТУРБУЛЕНТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИХРЕВЫХ СЛЕДОВ

*В статье рассматриваются особенности методики расчёта характеристик вихревых следов, полученных за телами произвольной формы в нестационарной нелинейной постановке задачи для случая двумерного течения жидкости.*

**Ключевые слова:** *турбулентные характеристики, вихревой след, летательный аппарат, методика расчета, сглаживание на базе метода наименьших квадратов.*

### Введение

Отрывной режим обтекания является наиболее распространённым в природе и технике. Интерес к изучению отрывных течений обеспечен потребностями практических задач и стал возможен с развитием численных методов и увеличением производительности современных ЭВМ.

Особенностью отрывного обтекания тел является нестационарность течения в аэродинамическом следе. Практический интерес представляет плоскопараллельное обтекание произвольного тела. Моделирование такого рода обтекания произвольных тел не вызывает затруднений и позволяет получать широкий круг практических результатов.

**Постановка задачи исследования.** Анализ работ, например, [1 – 3] позволяет утверждать, что при отрывном обтекании тел течение в вихревом следе нестационарное.

Известны подходы к изучению турбулентных течений. Наиболее полное описание современных моделей турбулентности рассмотрено в [4]. Однако недостатком таких моделей является полумпирический подход для замыкания осредненных по времени уравнений Навье-Стокса. Осредненные уравнения (уравнения Рейнольдса) включают в себя квад-

раты и произведения пульсационных составляющих турбулентного движения:  $\overline{W_y'^2}$ ;  $\overline{W_z'^2}$ ;  $\overline{W_y'}$ ;  $\overline{W_z'}$  и другие. При этом количество неизвестных превышает количество уравнений и для постановки задачи необходима дополнительная информация. Получение такой информации связано с определенными трудностями, и она не всегда удовлетворяет в практических расчётах.

### Характеристики вихревого следа

Практический интерес в изучении вихревого следа представляют его осредненные характеристики, которые определяются интегралом:

$$\overline{W}_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\tau_n - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_n} W_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) d\tau, \quad (1)$$

где  $\tau_0$  – момент безразмерного времени, соответствующий началу осреднения;  $\tau_n$  – момент безразмерного времени, соответствующий концу осреднения.

Пульсационные составляющие возмущённой скорости определяются с помощью выражений:

$$W'_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) = W_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) - \overline{W}_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}), \quad (2)$$

а их среднеквадратичные величины – через интегралы:

$$\bar{W}'_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\tau_n - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_n} W'_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) d\tau, \quad (3)$$

представляющие собой нормальные рейнольдсовы напряжения.

Важной характеристикой вихревого следа является интенсивность турбулентности:

$$\bar{\sigma}_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}) = \sqrt{\frac{1}{\tau_n - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_n} [W_{y,z}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) - \bar{W}_{y,z}(\bar{y}, \bar{z})]^2 d\tau}. \quad (4)$$

Интенсивность турбулентности характеризует величину среднеквадратичного отклонения от математического ожидания, в роли которого выступает возмущённая средняя скорость  $\bar{W}_{y,z}(\bar{y}, \bar{z})$ . Важное практическое значение в определении зон, опасных для ЛА, следующих за самолётом-генератором, имеет значение среднеквадратичной величины приращения угла скоса потока и его пульсации, которые можно определить с помощью выражений:

$$\Delta\varepsilon = \arctg \frac{\bar{W}_y}{V_0} = \frac{1}{\tau_n - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_n} \arctg \frac{W_y}{V_0}(\bar{y}, \bar{z}, \tau) d\tau, \quad (5)$$

$$\bar{\sigma}_\varepsilon(\bar{y}, \bar{z}) = \sqrt{\frac{1}{\tau_n - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_n} [\Delta\varepsilon - \bar{\Delta\varepsilon}]^2 d\tau}, \quad (6)$$

где  $\Delta\varepsilon = \arctg \frac{W_y}{V_0}(\bar{y}, \bar{z}, \tau)$ ,  $\bar{\Delta\varepsilon} = \arctg \frac{\bar{W}_y}{V_0}(\bar{y}, \bar{z})$ .

Рейнольдсовы напряжения сдвига возмущённых скоростей определяются интегралом

$$\bar{W}'_x \bar{W}'_y(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\tau_n - \tau_0} \times \int_{\tau_0}^{\tau_n} W'_x(\bar{x}, \bar{y}, \tau) W'_y(\bar{x}, \bar{y}, \tau) d\tau. \quad (7)$$

Зная среднеквадратичную величину давления

$$\bar{p}'^2(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{\tau_n - \tau_0} \int_{\tau_0}^{\tau_n} p'(\bar{x}, \bar{y}, \tau) d\tau \quad (8)$$

и рейнольдсовы напряжения сдвига возмущённых скоростей (7), есть возможность определить коэффициент корреляции:

$$R_{W_x W_y}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{W}'_x \bar{W}'_y(\bar{x}, \bar{y})}{\sqrt{\bar{W}'^2_x(\bar{x}, \bar{y}) \bar{W}'^2_y(\bar{x}, \bar{y})}}, \quad (9)$$

выражающий статистическую связь пульсации возмущённых скоростей  $W'_x$  и  $W'_y$  в рассматриваемой точке пространства с координатами  $\bar{x}, \bar{y}$ .

Корреляционная функция для сечения  $\bar{y} = \text{const}$  определяется выражением:

$$R_{W_z W_y}^{(y)}(\bar{x} + \Delta\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{W}'_y(\bar{x}, \bar{y}) \bar{W}'_y(\bar{x} + \Delta\bar{x}, \bar{y})}{\sqrt{\bar{W}'^2_y(\bar{x}, \bar{y}) \bar{W}'^2_y(\bar{x} + \Delta\bar{x}, \bar{y})}}, \quad (10)$$

аналогично для сечения  $\bar{x} = \text{const}$ :

$$R_{W_x W_y}^{(x)}(\bar{x}, \bar{y} + \Delta\bar{y}) = \frac{\bar{W}'_x(\bar{x}, \bar{y}) \bar{W}'_x(\bar{x}, \bar{y} + \Delta\bar{y})}{\sqrt{\bar{W}'^2_x(\bar{x}, \bar{y}) \bar{W}'^2_x(\bar{x}, \bar{y} + \Delta\bar{y})}}. \quad (11)$$

Характеристики вихревых следов представляют большой практический интерес. Их достоверность и точность в значительной степени зависят от пределов интегрирования  $[\tau_0, \tau_T]$ . При отрывном обтекании тел течение в вихревом следе нестационарное. Так при  $\tau \geq 10$  структура возмущённого потока принимает вид “шахматной дорожки” (дорожка Кармана). Кроме того, при  $\tau \geq 10$  “разгонный вихрь” (вихрь Прандтля) к этому моменту безразмерного времени  $\tau$  сносится вниз по потоку, что не оказывает влияния на аэродинамические характеристики тела. Из этого следует, что в расчётах рекомендуется принимать значение  $\tau_0 = 10$ .

Верхний предел интегрирования  $\tau_T$  определён результатами исследований по методике расчёта. Некоторые результаты исследований обтекания тонкой пластины ( $\alpha = 90^\circ$ ) представлены на рис. 1, 2.

Анализ зависимостей (рис. 1, 2) определяет верхний предел интегрирования. Видно, что при  $\tau \geq 50$  зависимость  $\bar{W}'_x(\tau)$  “выходит на полку” и при дальнейшем увеличении безразмерного времени  $\tau$  практически не изменяется.

Таким образом, верхний предел интегрирования рекомендуется принимать  $\tau_T \geq 50$ .

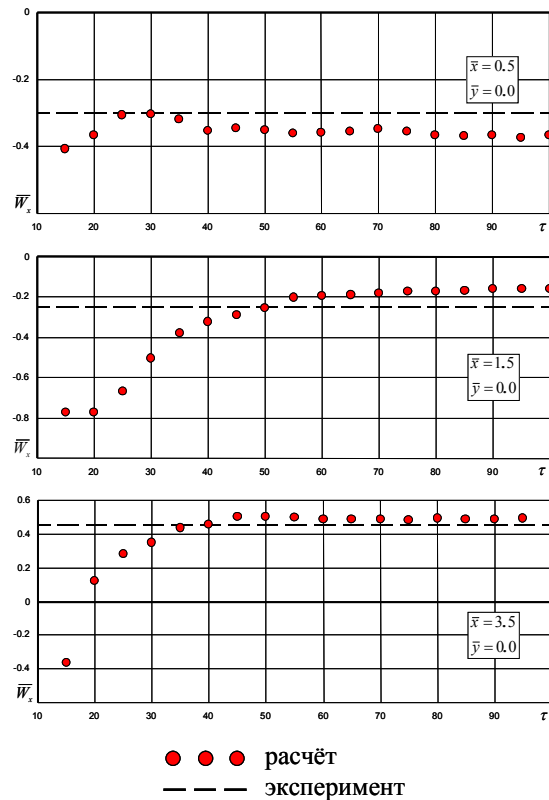


Рис. 1. К определению пределов интегрирования, экспериментальные результаты взяты из [5]

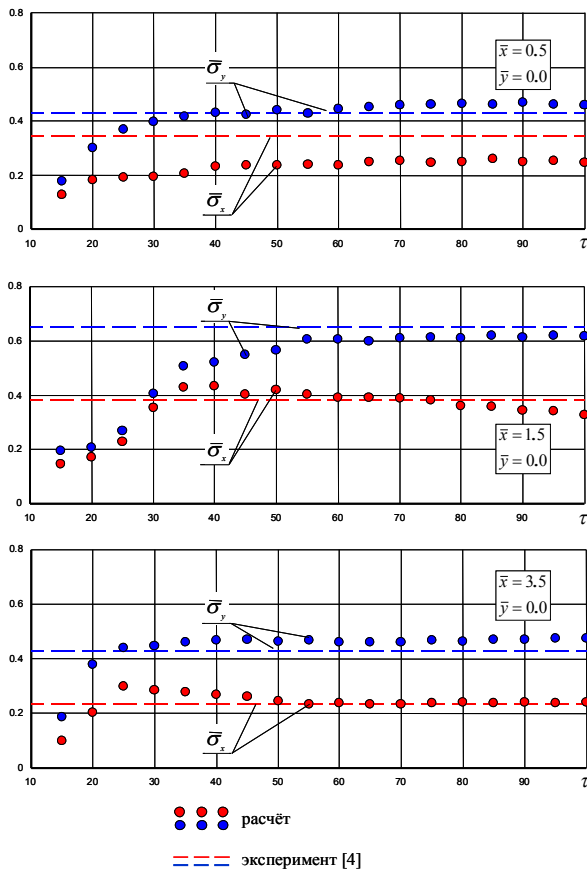


Рис. 2. К определению пределов интегрирования

### Сглаживание характеристик вихревого следа

Получаемые из расчёта турбулентные характеристики вихревых следов, в силу их пульсационного характера протекания с течением времени, неудобно, а в большинстве случаев невозможно использовать для анализа при решении практических научных задач. Более удобно их анализировать и использовать в сглаженном виде. Анализ существующих методов сглаживания функций и требований, предъявляемых к ним, показал, что наиболее целесообразным методом сглаживания турбулентных характеристик вихревого следа является локально - индивидуальное сглаживание на базе метода наименьших квадратов (МНК) [6].

Пусть даны функции  $f_i(x)$ , являющиеся пульсационными, которые необходимо сгладить. Интервал аргументов  $x_0 - x_n$  каждой функции разбивается на участки  $x_0 - x_1, x_1 - x_2, \dots, x_{i-1} - x_i, \dots, x_{n-1} - x_n$ , таким образом, чтобы на каждом участке было  $\tau$  аргументов. Сглаживание выполняется как локально на каждом участке, так и индивидуально для каждой функции  $f_i(x)$ .

Рассматриваемый способ сглаживания обладает рядом преимуществ: сглаженные характеристики близки к исходным, а сам способ удобен для реализации на ЭВМ.

Приближение функции  $f_i = f(x_i), i = 1, \dots, n$  выполняется с помощью полинома  $f_s(x)$  степени  $s < n - 1$ , который выбирается из условия минимума выражения:

$$\sum_{i=1}^n [f(x_i) - f_s(x_i)]^2, \quad (12)$$

взятого по всем полиномам степени  $s$ .

Ортогональные полиномы Чебышева  $q_l(x), l = 1, \dots, s$  должны удовлетворять условию:

$$\sum_{i=1}^n q_l(x_i) q_m(x_i) = \begin{cases} 0, \dots, l \neq m; \\ \neq 0, \dots, l = m. \end{cases} \quad (13)$$

Полином  $f_s(x)$  на котором достигается минимум (12) принимает вид:

$$\bar{f}_s(x) = \sum_{j=0}^s \left( \sum_{i=1}^n f(x_i) q_j(x_i) / \sum_{i=1}^n q_j^2(x_i) \right) q_j(x). \quad (14)$$

Для ортогональных полиномов Чебышева справедливо рекуррентное соотношение:

$$q_k(x) = (x + \alpha)q_{k-1}(x) + \beta q_{k-2}(x), \quad (15)$$

где 
$$\alpha = - \sum_{i=1}^n x_i q_{k-1}^2(x_i) / \sum_{i=1}^n q_{k-1}^2(x_i), \quad (16)$$

$$\beta = - \sum_{i=1}^n (x_i q_{k-1}^2(x_i) q_{k-2}(x_i)) / \sum_{i=1}^n q_{k-2}^2(x_i), \quad (17)$$

$$k = 2, 3, \dots, s,$$

причём  $q_0(x) = 1, q_1(x) = x - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

Для оценки погрешности можно использовать равенство:

$$\Delta_s \equiv \sum_{i=1}^n [f(x_i) - \bar{f}_s(x_i)]^2 = \sum_{i=1}^n f^2(x_i) - \sum_{j=1}^s \left[ \sum_{i=1}^n f(x_i) q_j(x_i) \right]^2 / \sum_{i=1}^n q_j^2(x_i). \quad (18)$$

В случае равноотстоящих значений  $x_i = i$  отношение (15) принимает вид:

$$q_k(x) = q_{k-1}(x) \left[ x - (n+1)/2 \right] - q_{k-2}(x) \times \times (k-1)^2 \left[ n^2 - (k-1)^2 \right] / \left( 4 \left[ 4(k-1)^2 - 1 \right] \right). \quad (19)$$

В работе [7] показано, что

$$\bar{f}_s(x) = \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2s-1)]^2 2^{2s} (2s-1)}{(s!)^2 n (n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2) \dots (n^2 - s^2)} \times \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{q_{s+1}(x) q_s(x_i) - q_{s+1}(x_i) q_s(x)}{x - x_i}. \quad (20)$$

Описанный способ сглаживания функции формально соответствует МНК, используемый в математической статистике для случая параболической регрессии [8].

Таким образом, задача заключается в определении из семейства полиномов такого, который наилучшим образом приближает заданную функцию. Результаты исследований по методике расчёта показали, что для решения практических задач удовлетворяет соотношение  $s/n = 0.6 \dots 0.8$ . Пример сглаживания характеристик вихревого следа за тонкой пластиной ( $\alpha = 90^\circ$ ) в точке  $\bar{x} = x/b = 0.5$ ,  $y = y/b = 0$  ( $b$  – хорда пластины) показан на рис. 3 – 5. На рис. 3 представлена зависимость пульсации продольной составляющей возмущённой скорости  $W_x'(\tau)$  как функция безразмерного времени  $\tau$  и её сглаженная функция  $\tilde{W}_x'(\tau)$ , на рис. 4 – зависимость поперечной составляющей возмущённой скорости  $W_y'(\tau)$  и её сглаженная функция  $\tilde{W}_y'(\tau)$ , на рис. 5 – зависимость пульсации давления  $p'(\tau)$  и её сглаженная функция  $\tilde{p}'(\tau)$ . Сглаженные функции, представленные на рис. 3 - 5 получены при соотношении  $s/n = 0.76$ .

### Проверка достоверности получаемых результатов

Рассматриваются некоторые результаты расчётов, иллюстрирующие возможности предлагаемой методики расчёта. Для сопоставления течений идеальной и вязкой жидкости в рамках рассматриваемой математической модели (рис. 6, а) представлены вихревые структуры и поля возмущённых скоростей (рис. 6, б), полученные при обтекании тонкой пластины, поставленной к вектору скорости невозмущённого потока под углом  $\alpha = 90^\circ$  в момент безразмерного времени  $\tau = U_0 t/b = 50$ .

Большой практический интерес представляет случай расчёта вихревых структур за пластиной при  $\alpha = 90^\circ$ , соответствующих большим значениям безразмерного времени  $\tau$ .

На рис. 7 показаны вихревые структуры, сгенерированные пластиной при  $\tau = 100$ ,  $Re = 10^6$ . Видно развитие вихревого следа, образование дорожки Кармана, и его разрушение.

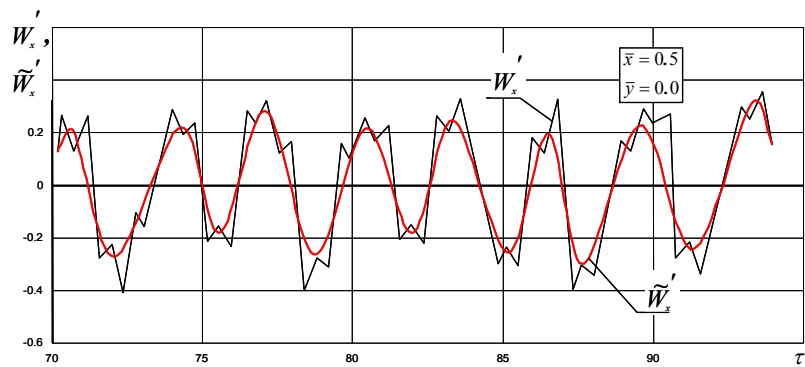


Рис. 3. Зависимость пульсации продольной составляющей скорости  $W_x'$  за тонкой пластиной ( $\alpha = 90^\circ$ );  $\tilde{W}_x'$  – сглаженная функция

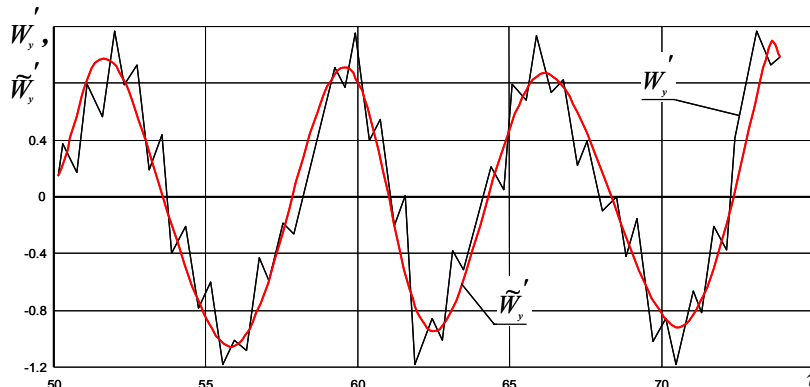


Рис. 4. Зависимость пульсации поперечной составляющей скорости  $W_y'$  за тонкой пластиной ( $\alpha = 90^\circ$ );  $\tilde{W}_y'$  – сглаженная функция

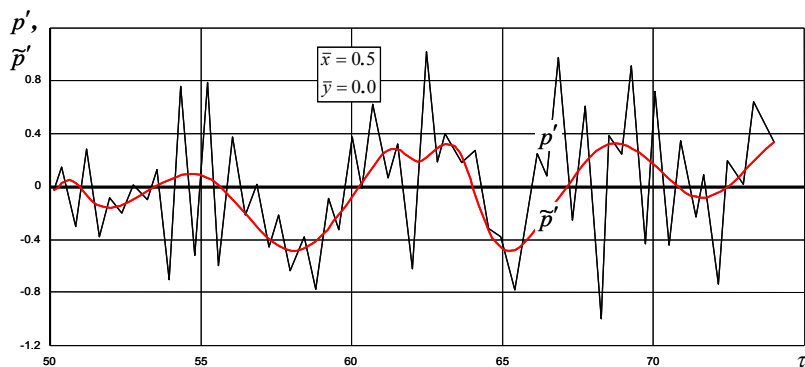


Рис. 5. Зависимость пульсации давления  $p'$  за тонкой пластиной ( $\alpha = 90^\circ$ );  $\tilde{p}'$  – сглаженная функция

Пример расчёта турбулентных характеристик вихревого следа показан для случаев бесконечного квадрата (рис. 8, а) и бесконечного цилиндра (рис. 8, б).

Распределение среднего давления  $\bar{p}$  в вихревом следе при  $\bar{y} = 0$  за тонкой бесконечной пластиной представлено на рис. 9, а; за бесконечным квадратом – на рис. 9, б.

Результаты расчёта интенсивности турбулентности  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  в вихревом следе при  $\bar{y} = 0$  за тонкой бесконечной пластиной представлены на рис. 10, а; за бесконечным квадратом – на рис. 10, б.

Среднеквадратичные величины пульсационных составляющих возмущённой скорости  $\bar{W}_x'^2$ ,  $\bar{W}_y'^2$  и давления  $\bar{p}'$  в вихревом следе представлены на рис. 11, 12.

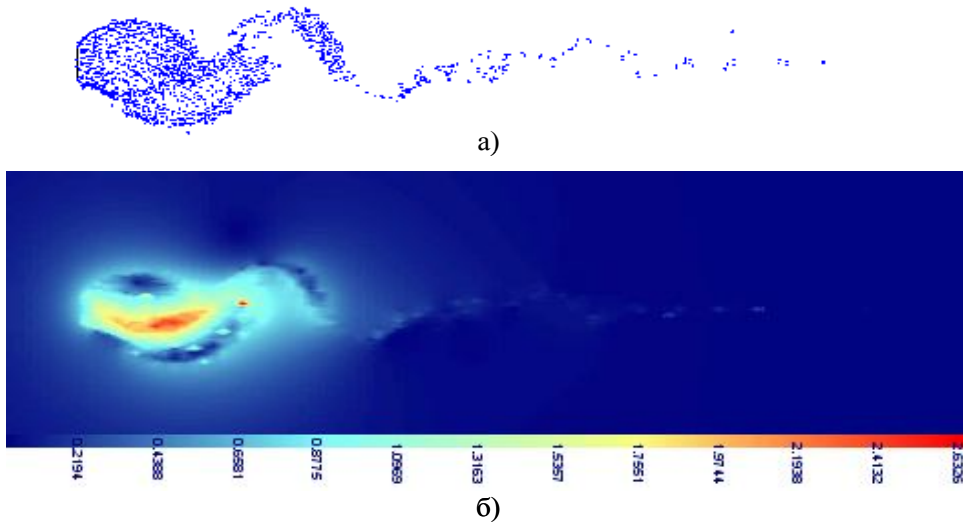


Рис. 6. Вихревая пелена и линии равных возмущённых скоростей за бесконечно тонкой пластиной ( $\alpha = 90^\circ$ ,  $Re \rightarrow \infty$ ,  $\tau = 50$ )

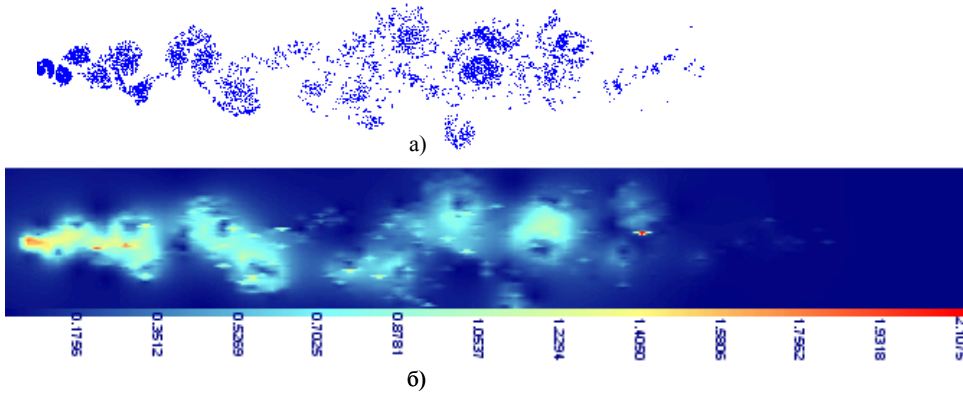


Рис. 7. Вихревая пелена и линии равных возмущённых скоростей за бесконечно тонкой пластиной ( $\alpha = 90^\circ$ ,  $Re = 10^6$ ,  $\tau = 100$ )

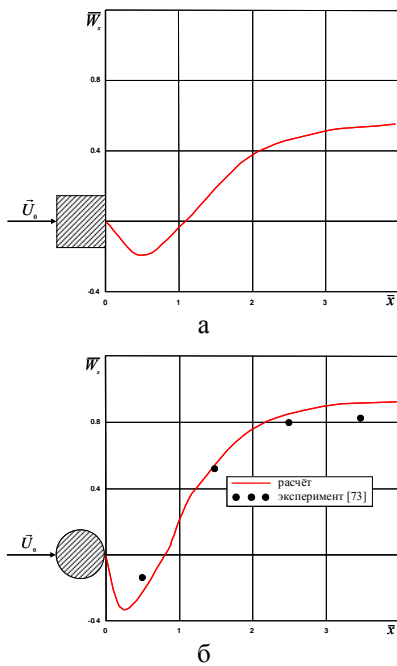


Рис. 8. Средняя возмущённая осевая составляющая скорости ( $\bar{v} = 0$ )

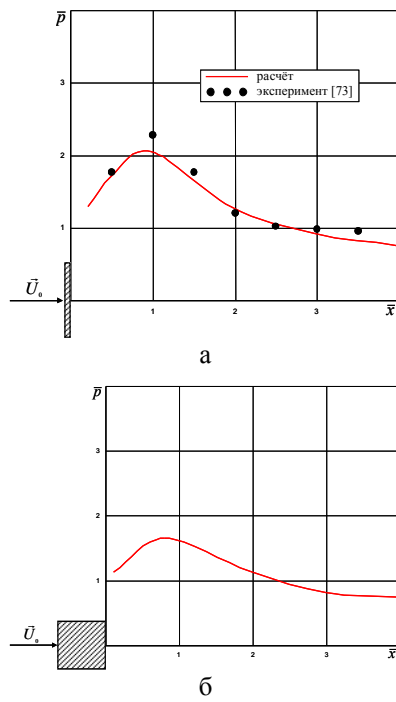


Рис. 9. Распределение среднего давления  $\bar{p}$  в вихревом следе

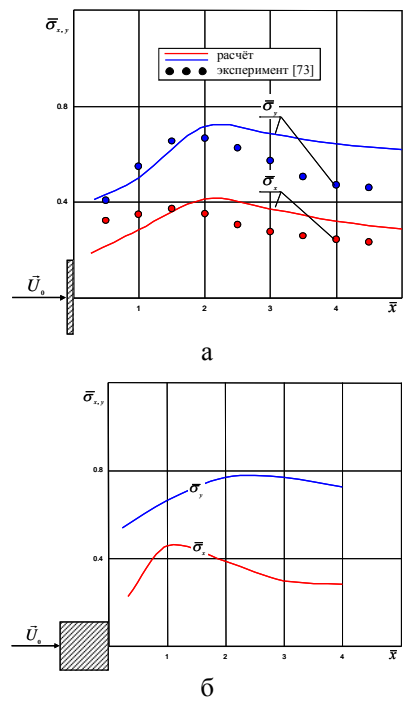


Рис. 10. Интенсивность турбулентности в вихревом следе

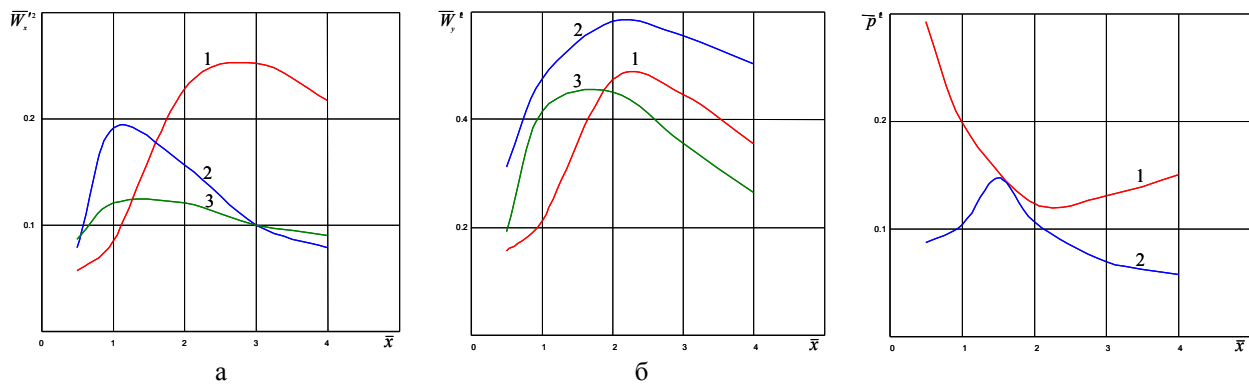


Рис. 11. Среднеквадратичные пульсации осевой (а) и поперечной (б) составляющей возмущённой скорости (1 – пластина; 2 – квадрат; 3 – цилиндр)

Рис. 12. Среднеквадратичные пульсации давления (1 – пластина; 2 – квадрат)

Сопоставление расчётных и экспериментальных данных, представленных на рис. 6 – 12 дают возможность утверждать о работоспособности рассмотренной методики расчёта характеристик вихревого следа и достоверности получаемых по ней результатов.

## Выводы

Показано, что наиболее целесообразным методом сглаживания турбулентных характеристик вихревого следа является локально-индивидуальное сглаживание на базе метода наименьших квадратов.

## Список литературы

1. Нелинейная теория крыла и ее приложения [Текст] / Т.О. Аубакиров, С.М. Белоцерковский, А.И. Желанников, М.И. Ништ. – Алматы : Гылым, 1997. – 448 с.
2. Белоцерковский С.М. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью [Текст] / С.М. Белоцерковский, М.И. Ништ. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
3. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел [Текст] / С.М. Бе-

лоцерковский, В.Н. Котовский, М.И. Ништ, Р.М. Федоров. – М. : Наука, 1988. – 231 с.

4. Белов И.А. Модели турбулентности [Текст] / А. И. Белов. – Л. : ЛМИ, 1982. – 87 с.

5. Widnall, Sh. E. The structure and dynamics of vortex filament [Text] / Sh. E. Widnall // Annual Rev. Fluid Mech. – 1975. – V. 7. – P. 45-53.

6. Ивченко Г.И. Математическая статистика [Текст] / Г.И. Ивченко, Ю.В. Медведев. – М. : Высшая школа, 1984. – 286 с.

7. Смирнов, Н.В. Теория вероятностей и математическая статистика [Текст] / Н.В. Смирнов. – М. : Наука, 1970. – 348 с.

8. Хотимский, В.С. Выравнивание статистических рядов по методу наименьших квадратов (способ Чебышева). [Текст] / В.С. Хотимский. – М. : Государственное статистическое издательство, 1959. – 122 с.

Поступила в редколлегию 12.11.2014

**Рецензент:** канд. техн. наук, проф. Ю.И. Миргород, Харьковский университет Воздушных Сил им. И. Кожуба, Харьков.

## ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДИКИ РОЗРАХУНКУ ТУРБУЛЕНТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИХРОВИХ СЛІДІВ

С.М. Єрьоменко, О.В. Соловйов, П.В. Прусак, Н.В. Кобріна

В статті розглядаються особливості методики розрахунку характеристик вихрових слідів, які отримані за тілами довільної форми у нестационарній нелінійній постановці завдання для випадку двомірної течії рідини.

**Ключові слова:** турбулентні характеристики, вихровий слід, літальний апарат, методика розрахунку, згладжування на базі метода найменших квадратів.

## CALCULATION METHOD FEATURES OF VORTEX WAKE TURBULENT CHARACTERISTICS

S.M. Eryomenko, O.V. Solovyov, P.V. Prusak, N.V. Kobrina

The article discusses the calculation methodology features of the wake vortices characteristics obtained by arbitrary bodies in transient nonlinear air operation formulation for the case of two-dimensional fluid flow.

**Keywords:** turbulent characteristics, vortex wake, aircraft, calculation method, smoothing based on least square method.