

УДК 623.546

В.І. Грабчак, С.В. Бондаренко, С.В. Стеців

Академія сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ СНАРЯДІВ З ГІРОСКОПІЧНОЮ СТАБІЛІЗАЦІЄЮ

*В статті досліджується характер впливу основних складових головного моменту кількості руху снаряда, на його просторовий обертальний рух в повітрі. Проводиться узагальнення диференціальних рівнянь математичної моделі просторового обертального руху снарядів з гіроскопічною стабілізацією, за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду. Визначаються аналітичні залежності для узагальнених сил та кінетичної енергії обертального руху снаряда.*

**Ключові слова:** математична модель, обертальний рух снаряда, перекидаючий момент, полярний та екваторіальний демпфуючі моменти, момент Магнуса, рівняння Лагранжа другого роду.

### Вступ

**Постановка проблеми в загальному вигляді та аналіз літератури.** Важливим питанням дослідження поведінки просторового руху снарядів є побудова їх математичних моделей. Математичною моделлю руху снаряда будемо називати опис його поведінки на формальній мові (як правило, математичні моделі польоту снарядів використовують мову диференціальних рівнянь), яка дозволяє проводити різні теоретичні дослідження в залежності від поставленої задачі і припущень, які приймаються [1, 2]. При цьому процес функціонування снаряда розглядається у деякому інтервалі часу, а його стан у кожний момент часу задається набором параметрів, які характеризують його поведінку. На різних етапах дослідження снаряда математична модель може змінюватися залежно від урахування параметрів, які впливають на його поведінку. Дослідник складає моделі, спочатку прості, потім більш складні так, щоб у підсумку побудувати прийнятну модель, яка відповідає поставленому завданню дослідження [2, 3]. Складання моделей, які характеризують рух снаряда в просторі, базується на відомих методах класичної механіки [1, 4]. Характер надання математичних моделей різниться в залежності від рівня інформації про зовнішні умови польоту і необхідної степені достовірності відображення математичною моделлю реального фізичного процесу польоту снаряда, адекватному врахуванню тих, чи інших сил і моментів, які діють на снаряд. Кількість сил та моментів, які діють на снаряд в польоті, характер їх змін у процесі руху, а також кількість рівнянь, що описують рух снаряда, залежить від призначення снаряду, конструкційних особливостей та способу стабілізації його у польоті. На сьогоднішній день найпоширенішим способом стабілізації снаряда в польоті, є стабілізація обертанням; так, снаряду надається швидке обертання навколо його вісі за до-

помогою нарізів в стволі гармати, в результаті якого снаряд отримує головну властивість гіроскопа – опір перевертання.

Найбільш важливою і складною силою, яка використовується для опису просторового руху снаряда в повітрі, є аеродинамічна сила [1, 3]. Від того, наскільки успішно буде вирішена задача забезпечення розрахункового руху снарядів при умові впливу аеродинамічної сили, залежить, як характеристики точності стрільби, так і загальна ефективність артилерійських систем.

Перспективним напрямком визначення аеродинамічної сили снаряда є науковий підхід, заснований на апроксимації аеродинамічної сили аналітичними функціями з використанням експериментальних даних балістичних стрільб, який полягає в тому, що значення аеродинамічної сили снаряда апроксимуються неперервно-диференційованими на відрізок зміни швидкості польоту снаряда аналітичними функціями, які обчислюються по розузгодженню експериментальних даних (значення опорної дальності, які визначаються на основі точок розривів снарядів) та даних, що визначаються на основі рішення системи рівнянь, які описують просторовий рух снаряда в повітрі [5]. Вимоги до точності визначення опорної дальності, визначаються точністю Таблиць стрільби та складають  $0,4 \div 0,5\%$  дальності стрільби артилерійської системи [6, 7].

При рішенні задачі руху снаряда, як правило приймають припущення, що вісь снаряда співпадає з напрямком руху (напрямок вектора швидкості) снаряда [1]. В цьому випадку для опису польоту снаряда в рівняннях математичної моделі, достатньо врахувати тільки рівняння поступального руху, тобто рівняння руху центру мас (ц.м.) снаряда і прийняти, що обертальний рух снаряда практично не впливає на рух його ц.м. В дійсності, рух снаряда навколо ц.м., уявляє собою складний рух [1, 2, 8, 9], який складається з:

– обертання снаряда навколо повздовжньої вісі;

– прецесійного руху (руху снаряда навколо його вектора швидкості);

– нутаційних коливань (коливань вісі снаряда відносно вектора швидкості).

В результаті вісь снаряда здійснює гармонічні коливання в площині його опору, а сама площина обертається з практично постійною швидкістю навколо вектора швидкості снаряда. Нутаційні коливання осі снаряда в площині опору відбуваються так, що кут нутації безперервно коливається навколо деякого середнього положення.

Таким чином, для отримання необхідної точності визначення значень опорної дальності, які розраховуються на основі рішення системи рівнянь, які описують рух снаряда в повітрі, необхідно враховувати рівняння, які описують рух снаряда навколо ц.м. При цьому важливим завданням є повне та точне врахування складових головного моменту кількості руху снаряда, в проєкціях на осі вибраної системи координат (СК), що дозволяє підвищити точність розрахунків елементів траєкторії польоту снаряда.

**Метою статті** є розробка системи рівнянь руху снаряда з гіроскопічною стабілізацією навколо ц.м.

### Основна частина

Рівняння руху снаряда навколо ц.м. отримаємо за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду [1, 4]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i^j, \quad (1)$$

де  $T$  – кінетична енергія обертального руху снаряда;  $\dot{q}_i$  – узагальнені координати, які застосовуються для опису кутового положення снаряда в просторі;  $Q_i^j$  – узагальнені сили, які діють на снаряд;  $i = \overline{1, n}$  –

кількість узагальнених сил, які діють на снаряд;  $j = \overline{1, k}$  – кількість ступенів свободи обертального руху снаряда (узагальнених координат).

Обертальний рух снаряда характеризується трьома ступенями свободи, тобто для однозначного визначення положення снаряда відносно ц.м. необхідно мати три узагальнені координати, в якості яких використовуються:  $\delta$  – кут нутації, який вимірюється між повздовжньою віссю снаряда і вектором швидкості польоту снаряда, які утворюють площинну опору снаряда;  $\phi$  – кут повороту снаряда навколо повздовжньої осі снаряда;  $\nu$  – кут прецесії снаряда, який визначає поворот площини кута  $\delta$  (площини опору) відносно вектора швидкості.

Відповідно узагальненими швидкостями будуть похідні від цих кутів за часом –  $\dot{\delta}$ ,  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\nu}$ .

*Моменти, які діють на снаряд в польоті.* Рух снаряда навколо ц.м. розглянемо при малому куті  $\delta$ , що відповідає незначному зносу каналу ствола гармати та незначному його розігріву [8, 9]. В якості складових головного моменту кількості руху приймемо перекидаючий момент ( $M$ ); полярний та екваторіальний демпфуючі моменти ( $M_\Gamma$  та  $M_D$ ); момент Магнуса ( $M_L$ ), розташування яких схематично представлено на рис. 1.

Перекидаючий момент  $M$  утворюється дією сили опору повітря, яка прикладена в центрі тиску (ц.т.), він прагне перевернути снаряд, тобто збільшити кут нутації  $\delta$  між повздовжньою віссю снаряда і дотичної до траєкторії його руху (вектора швидкості  $V$ ) та має напрямок перпендикулярно площині кута між вектором швидкості і повздовжньою віссю снаряда.

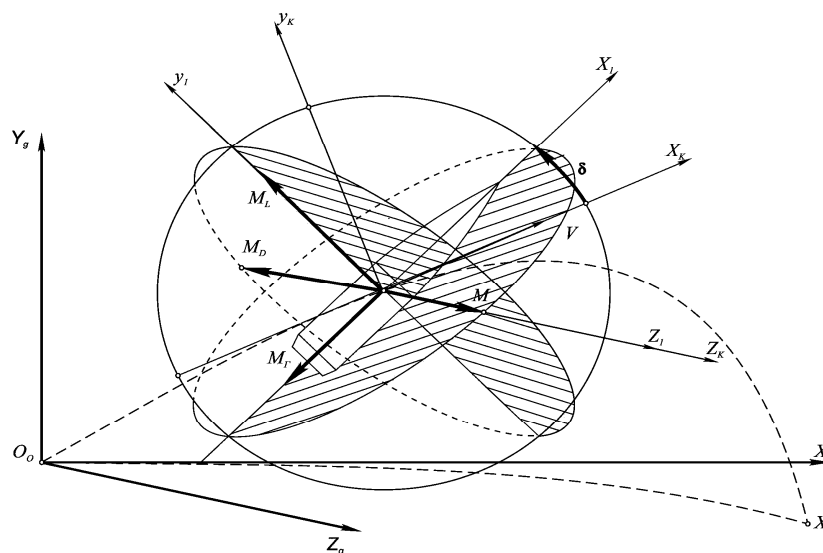


Рис. 1. Взаємна орієнтація векторів діючих на снаряд моментів

Величина перекидаючого моменту пропорційна куту відхилення осі снаряда – куту нутації  $\delta$  і визначається як [8, 10]

$$M = (d^2 h \cdot 10^3 / g) \cdot N(y) V^2 K_M \cdot \delta, \quad (2)$$

де  $d$  – діаметр (калібр) снаряда;  $h$  – відстань між

ц.т. та ц.м. снаряда;  $g$  – прискорення сили тяжіння;  $H(y) = \Pi/\Pi_{ON}$  – функція зміни щільності повітря за висотою;  $\Pi$  – значення вагової щільності повітря;  $\Pi_{ON}$  – значення вагової щільності повітря на поверхні землі;  $V$  – швидкість польоту снаряда;  $K_M$  – коефіцієнт перекидаючого моменту.

Вектор полярного демпфуючого моменту  $M_\Gamma$ , виникає в наслідок в'язких властивостей повітря і тертя його о поверхню снаряда, який обертається, він співпадає з віссю симетрії снаряда та має напрямок протилежний кутовій швидкості власного обертання снаряда  $\dot{\phi}$ , має значення [8, 9]

$$M_\Gamma = -\frac{d^3l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) V K_{M_\Gamma}, \quad (3)$$

де  $l$  – довжина снаряда;  $K_{M_\Gamma}$  – коефіцієнт полярного демпфуючого моменту.

Оскільки нутаційні коливання вісі снаряда навколо дотичної здійснюються в повітрі, яке чинить опір, виникає екваторіальний демпфуючий момент  $M_D$ , який гасить нутаційні коливання, тобто зменшує їх кутову швидкість. Момент  $M_D$  розташований у екваторіальній площині снаряда, направлений в сторону протилежну кутовій швидкості нутаційних коливань  $\delta$ , та визначається [8, 9]

$$M_D = -\left(dl^3 \cdot 10^3/g\right) \cdot H(y) V K_{M_D} \cdot \delta, \quad (4)$$

де  $K_{M_D}$  – коефіцієнт екваторіального демпфуючого моменту.

Момент Магнуса  $M_L$ , обумовлений дією сили Магнуса [8, 9], точка прикладення якої як правило, не співпадає з ц.м. снаряда, та залежить від кута  $\delta$ , лежить в його площині і має напрямок перпендикулярно повздовжній вісі снаряда, розраховується як

$$M_L = -\left(dl^3 \cdot 10^3/g\right) \cdot \dot{\phi} H(y) V K_{M_L} \cdot \delta, \quad (5)$$

де  $K_{M_L}$  – коефіцієнт моменту Магнуса.

*Системи координат, які використовуються для опису обертального руху снаряда.* Для опису обертального руху снаряда використаємо нерухому нормальну земну СК  $OX_g Y_g Z_g$ , траєкторну та зв'язану СК, відповідно  $OX_k Y_k Z_k$  та  $OX_1 Y_1 Z_1$  [1, 3].

Осі нормальної земної СК  $OX_g Y_g Z_g$  жорстко зв'язані з Землею та обертаються разом з нею. Початок цієї системи, точка  $O$ , співпадає з точкою стрільби снаряда. Вісь  $OY_g$  направлена вертикально вгору від точки стрільби по лінії дії сили тяжіння. Вісь  $OX_g$  орієнтована по дотичній до поверхні Землі в точці стрільби снаряда у напрямку цілі та утворює з віссю  $OY_g$  площину стрільби. Вісь  $OZ_g$  перпендикулярна до площини пуску та доповнює осі

$OY_g$  і  $OX_g$  до правої СК. Вісі  $OY_g$  та  $OZ_g$  утворюють площиною горизонту.

Траєкторна СК відноситься до напівзв'язаних, являє собою прямокутну праву систему відліку, за допомогою якої визначають траєкторію руху снаряда, при дії на нього аеродинамічних сил та моментів.

Розкладення повної аеродинамічної сили та моментів на складові за допомогою траєкторної СК є дуже зручним щодо розуміння механіки руху снаряда. Проекція основних сил, що діють на снаряд в польоті на вісь  $OX_k$ , визначає саме ті сили, що впливають на величину швидкості снаряда, а проекція визначених сил на вісь  $OY_k$  та на вісь  $OZ_k$  – визначає їх вплив на швидкість снаряда у двох взаємно перпендикулярних площинах, що утворюються цими осями.

СК  $OX_1 Y_1 Z_1$  жорстко зв'язана з характерними елементами конструкції снаряда і переміщується разом з ним; це прямокутна права СК, нерухома відносно снаряда.

Початок зв'язаної СК співпадає з ц.м. снаряда, а осі направлені вздовж характерних елементів її конструкції, вісь  $OX_1$  направлена вздовж повздовжньої осі снаряда у бік його головної частини, вісі  $OY_1$  та  $OZ_1$  лежать в екваторіальній площині, перпендикулярній повздовжній вісі снаряда.

*Кінетична енергія обертального руху снаряда.* Кінетичну енергію снаряда у його обертальному русі відносно ц.м. виразимо через моменти інерції снаряда та проекції миттєвої кутової швидкості снаряда на відповідні вісі.

Вираз для кінетичної енергії снаряда можна записати у вигляді [1, 4, 8]

$$T = \frac{1}{2} \left( J_{Z_1} \Omega_{Z_1}^2 + J_{Y_1} \Omega_{Y_1}^2 + J_{X_1} \Omega_{X_1}^2 \right), \quad (6)$$

де  $\Omega_{Z_1}, \Omega_{Y_1}, \Omega_{X_1}$  – відповідно проекції миттєвої кутової швидкості снаряда, на вісі зв'язаної СК;  $J_{Z_1}, J_{Y_1}, J_{X_1}$  – моменти інерції відносно відповідних осей снаряда.

Враховуючи, що для снаряда  $J_{Y_1} = J_{Z_1}$ , отримаємо

$$T = \frac{1}{2} \left[ J_{Z_1} \left( \Omega_{Y_1}^2 + \Omega_{Z_1}^2 \right) + J_{X_1} \Omega_{X_1}^2 \right]. \quad (7)$$

Спроекуємо складові миттєвих кутових швидкостей  $\Omega_{Z_1}, \Omega_{Y_1}, \Omega_{X_1}$  на вісі зв'язаної СК  $OX_1 Y_1 Z_1$  і складемо рівняння для кінетичної енергії снаряда.

Кутові швидкості зміни кутів мають такі напрямки:

- $\dot{\phi}$  направлена за віссю  $OX_1$ ;
- $\dot{\delta}_2$  та  $\dot{\theta}$  направлені за віссю  $OZ_k$ ;
- $\delta_1$ , за віссю  $OY_1$  у від'ємному напрямку;
- $\psi$ , за віссю  $OY_k$  у від'ємному напрямку.

Взаємна орієнтація СК та векторів діючих на снаряд моментів при просторовому русі снаряда наведена на рис. 2.

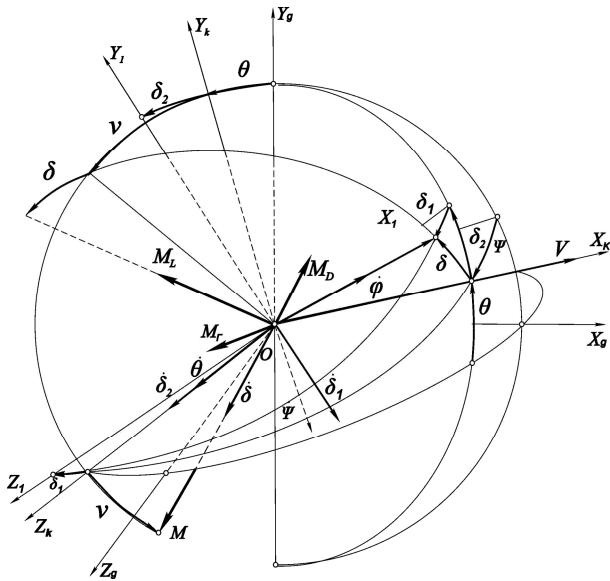


Рис. 2. Взаємна орієнтація СК та діючих на снаряд моментів

Розкладемо кутову швидкість  $\dot{\psi}$  на дві складові в площині  $OX_k Y_k$  за віссю  $OY_1$ , складова дорівнює  $-\dot{\psi} \cos \delta_2$ , та за лінією пересічення площини  $OX_k Y_k$  з площиною  $OX_k Z_k$ , маємо  $-\dot{\psi} \sin \delta_2$ .

Позначаючи через  $q, p, r$  проекції кутової швидкості на осі  $OZ_1, OY_1, OX_1$ , отримаємо

$$\begin{aligned} q &= (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \cos \delta_1 + \dot{\psi} \sin \delta_2 \sin \delta_1; \\ p &= -\dot{\delta}_1 - \dot{\psi} \cos \delta_2; \\ r &= \dot{\phi} + (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \sin \delta_1 - \dot{\psi} \sin \delta_2 \cos \delta_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Враховуючи незначну величину  $\delta_1$  та  $\delta_2$ , приймаючи  $\sin \delta_{1,2} = \delta_{1,2}$ ,  $\cos \delta_{1,2} = 1$  та нехтуючи членом  $\dot{\psi} \sin \delta_2 \sin \delta_1$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} q &= \dot{\delta}_2 + \dot{\theta}; \\ p &= -\dot{\delta}_1 - \dot{\psi}; \\ r &= \dot{\phi} + (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \delta_1 - \dot{\psi} \delta_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Кінетична енергія (7) з урахуванням (9) буде дорівнювати

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[ J_{Z_1} \left[ (\dot{\delta}_1 + \dot{\psi})^2 + (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta})^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + J_{X_1} \left[ \left( \dot{\phi} + (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \delta_1 - \dot{\psi} \delta_2 \right)^2 \right] \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Узагальнені сили, які діють на снаряд. Узагальненими силами, які відповідають  $j$ -й узагальненій координаті, будемо називати величини, які дорівнюють коефіцієнтам  $Q_{M_i}^j$  за варіаціями даної узагальненої координати у вираженні можливої роботи

сил, які діють на снаряд під час його руху [1, 8]. В загальному випадку узагальнена сила є функцією узагальнених координат, з чого випливає, що узагальнена сила – скалярна величина, яка залежить від вибраних для снаряда набору узагальнених координат. Розмірність узагальнених сил залежить від розмірності узагальненої координати, в нашому випадку узагальнені координати обертального руху снаряда – кутові величини, відповідно узагальнена сила має розмірність моменту.

Отримаємо вирази для узагальнених сил, які діють на снаряд  $Q_{M_i}^j$  [8]. Для цього спроекуємо моменти  $M, M_\Gamma, M_L$  та  $M_D$  (з урахуванням виразів 2-5) на вісі незначних приростів кутів  $\delta_1, \delta_2$  та  $\phi$ , а саме на напрямки осей  $OY_1, OX_1, OZ_k$ , отримаємо:

– перекидаючий момент  $M$  дає вираз для узагальнених сил:

$$\begin{aligned} Q_M^1 &= \frac{d^2 h \cdot 10^3}{g} H(y) V^2 K_M \cdot \delta_1; \\ Q_M^2 &= \frac{d^2 h \cdot 10^3}{g} H(y) V^2 K_M \cdot \delta_2; \\ Q_M^3 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

– момент Магнуса  $M_L$ :

$$\begin{aligned} Q_{M_L}^1 &= -\frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) V K_{M_L} \cdot \delta_2; \\ Q_{M_L}^2 &= \frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) V K_{M_L} \cdot \delta_1; \\ Q_{M_L}^3 &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

– полярний демпфуючий момент  $M_\Gamma$ :

$$\begin{aligned} Q_{M_\Gamma}^1 &= 0; \\ Q_{M_\Gamma}^2 &= -\frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) V K_{M_\Gamma} \cdot \delta_1; \\ Q_{M_\Gamma}^3 &= -\frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) V K_{M_\Gamma}, \end{aligned} \quad (13)$$

– екваторіальний демпфуючий момент  $M_D$ :

$$\begin{aligned} Q_{M_D}^1 &= -\frac{d l^3 \cdot 10^3}{g} H(y) V K_{M_D} \cdot (\dot{\delta}_1 + \dot{\psi}); \\ Q_{M_D}^2 &= -\frac{d l^3 \cdot 10^3}{g} H(y) V K_{M_D} \cdot (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}); \\ Q_{M_D}^3 &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Сумуючи окремі складові моментів  $M, M_\Gamma, M_L$  та  $M_D$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} Q_{M_i}^1 &= Q_M^1 + Q_{M_L}^1 + Q_{M_\Gamma}^1 + Q_{M_D}^1 = \\ &= \frac{d^2 h \cdot 10^3}{g} H(y) V^2 K_M \cdot \delta_1 - \frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) \times \\ &\quad \times V K_{M_L} \cdot \delta_2 - \frac{d l^3 \cdot 10^3}{g} H(y) V K_{M_D} \cdot (\dot{\delta}_1 + \dot{\psi}); \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 Q_{M_i}^2 &= Q_M^2 + Q_{M_L}^2 + Q_{M_\Gamma}^2 + Q_{M_D}^2 = \\
 &= \frac{d^2 h \cdot 10^3}{g} H(y) V^2 K_M \cdot \delta_2 + \frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) \times \\
 &\times V K_{M_L} \cdot \delta_1 - \frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) V K_{M_\Gamma} \cdot \delta_1 - \\
 &\quad - \frac{d l^3 \cdot 10^3}{g} H(y) V K_{M_D} \cdot (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}); \\
 Q_{M_i}^3 &= Q_M^3 + Q_{M_L}^3 + Q_{M_\Gamma}^3 + Q_{M_D}^3 = \\
 &= -\frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) V K_{M_\Gamma}.
 \end{aligned} \quad (16)$$

Для скорочення запису виразів (15-17) ведемо наступні позначки:

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= \frac{1}{J_{Z_1}} \frac{d^2 h \cdot 10^3}{g} H(y) V^2 K_M; \\
 \beta_2 &= \frac{1}{J_{Z_1}} \frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) V K_{M_L}; \\
 \beta_3 &= \frac{1}{J_{Z_1}} \frac{d l^3 \cdot 10^3}{g} H(y) V K_{M_D}.
 \end{aligned} \quad (18)$$

Розробка рівнянь Лагранжа другого роду руху снаряда навколо його ц.м. Складемо рівняння Лагранжа (1) за параметрами  $\delta_1, \delta_2, \phi$ , з урахуванням (10) та (15-17) і враховуючи позначки (18) отримаємо:

– за параметром  $\phi$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= J_{X_1} \left[ \dot{\phi} + (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \delta_1 - \dot{\psi} \delta_2 \right] = J_{X_1} \dot{\phi}, \\
 \frac{\partial T}{\partial \phi} &= 0, \quad Q_{M_i}^3 = -\frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) V K_{M_\Gamma},
 \end{aligned}$$

звідси

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = Q_{M_i}^3,$$

$$J_{X_1} \ddot{\phi} = -\frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} \dot{\phi} H(y) V K_{M_\Gamma},$$

і остаточно маємо

$$\frac{d \ln \dot{\phi}}{dt} = -\frac{1}{J_{X_1}} \frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} H(y) V K_{M_\Gamma}; \quad (19)$$

– за параметром  $\delta_2$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_2} &= J_{Z_1} (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) + J_{X_1} \left[ \dot{\phi} + (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \delta_1 - \dot{\psi} \delta_2 \right] \delta_1 = \\
 &= J_{Z_1} (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) + J_{X_1} \dot{\phi} \delta_1;
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \delta_2} = -J_{X_1} \left[ \dot{\phi} + (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \delta_1 - \dot{\psi} \delta_2 \right] \dot{\psi} = -J_{X_1} \dot{\phi} \dot{\psi};$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_2} \right) = J_{Z_1} \ddot{\delta}_2 + J_{Z_1} \ddot{\theta} + J_{X_1} \dot{\phi} \dot{\delta}_1 + J_{X_1} \ddot{\phi} \delta_1;$$

$$\begin{aligned}
 Q_{M_i}^2 &= \beta_1 J_{Z_1} \cdot \delta_2 + \beta_2 \cdot \left( \dot{\phi} / \dot{\phi}_0 \right) \cdot J_{Z_1} \delta_1 - \\
 &- \beta_3 J_{Z_1} \cdot (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) - \left( d^3 l \cdot 10^3 / g \right) \cdot \dot{\phi} H(y) V K_{M_\Gamma} \cdot \delta_1;
 \end{aligned}$$

після перетворення отримаємо

$$\begin{aligned}
 \ddot{\delta}_2 - \frac{J_{X_1} \dot{\phi}}{J_{Z_1}} \dot{\delta}_1 + \beta_3 \dot{\delta}_2 - \beta_1 \delta_2 - \beta_2 \frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} \delta_1 &= \\
 &= -\frac{J_{X_1} \dot{\phi}}{J_{Z_1}} \dot{\psi} - \ddot{\theta} - \beta_3 \dot{\theta};
 \end{aligned} \quad (20)$$

– за параметром  $\delta_1$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_1} = J_{Z_1} (\dot{\delta}_1 + \dot{\psi});$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T}{\partial \delta_1} &= J_{X_1} \left[ \dot{\phi} + (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) \delta_1 - \dot{\psi} \delta_2 \right] (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta}) = \\
 &= J_{X_1} \cdot (\dot{\delta}_2 + \dot{\theta});
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\delta}_1} \right) = J_{Z_1} \ddot{\delta}_1 + J_{Z_1} \dot{\psi};$$

$$Q_{M_i}^1 = \beta_1 J_{Z_1} \delta_1 - \beta_2 \frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} J_{Z_1} \delta_2 - \beta_3 J_{Z_1} \cdot (\dot{\delta}_1 + \dot{\psi});$$

остаточно маємо

$$\begin{aligned}
 \ddot{\delta}_1 - \frac{J_{X_1} \dot{\phi}}{J_{Z_1}} \dot{\delta}_2 + \beta_3 \dot{\delta}_1 - \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} \delta_2 &= \\
 &= \frac{J_{X_1} \dot{\phi}}{J_{Z_1}} \dot{\theta} - \ddot{\psi} - \beta_3 \dot{\psi}.
 \end{aligned} \quad (21)$$

Таким чином, з урахуванням (19-21) отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \ddot{\delta}_1 - \frac{J_{X_1} \dot{\phi}}{J_{Z_1}} \dot{\delta}_2 + \beta_3 \dot{\delta}_1 - \beta_1 \delta_1 + \beta_2 \frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} \delta_2 &= \\
 &= \frac{J_{X_1} \dot{\phi}}{J_{Z_1}} \dot{\theta} - \ddot{\psi} - \beta_3 \dot{\psi}; \\
 \ddot{\delta}_2 - \frac{J_{X_1} \dot{\phi}}{J_{Z_1}} \dot{\delta}_1 + \beta_3 \dot{\delta}_2 - \beta_1 \delta_2 - \beta_2 \frac{\dot{\phi}}{\dot{\phi}_0} \delta_1 &= \\
 &= -\frac{J_{X_1} \dot{\phi}}{J_{Z_1}} \dot{\psi} - \ddot{\theta} - \beta_3 \dot{\theta}; \\
 \frac{d \ln \dot{\phi}}{dt} &= -\frac{1}{J_{X_1}} \frac{d^3 l \cdot 10^3}{g} H(y) V K_{M_\Gamma}.
 \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Система диференціальних рівнянь (22) є математичною моделлю просторового руху снаряда навколо ц.м. Ці рівняння без введення додаткових спрощень не інтегруються, тобто не може бути отримане рішення їх в квадратурах чи елементарних функціях. Це, в першу чергу, пояснюється тим, що опір середовища, в якому відбувається рух, не може бути представлений у вигляді аналітичної залежності, При наявності підінтегральної функції, що не має простого аналітичного виразу, розділення змінних не є можливим і виникає необхідність у застосуванні наближених методів, а саме методів чисельного інтегрування. Математична модель реалізована програмно на основі стандартної підпрограми чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, написаною в програмному

середовищі Maple, під час вирішення якої, для кожного моменту часу польоту снаряда, можна визначити основні елементи траєкторії.

### Висновки

На сьогоднішній час при розрахунках траєкторій польоту снарядів, що розроблюються та модернізуються, актуальним питанням є математичне моделювання, яке використовується для експериментування і чисельної оцінки параметрів руху снаряда та передбачає побудову діючої математичної моделі снаряда, яка має властивості, подібні властивостям і співвідношенням реального снаряда. В статті запропонована математична модель руху снарядів з гіроскопічною стабілізацією навколо його ц.м. В якості складових головного моменту кількості руху враховані: перекидаючий момент; полярний та екваторіальний демпфуючі моменти; момент Магнуса. Проведено узагальнення диференціальних рівнянь математичної моделі просторового обертального руху снарядів, в середовищі, що збурює, за допомогою рівнянь Лагранжа другого роду. Визначені аналітичні залежності для узагальнених сил та кінетичної енергії обертального руху снаряда.

Розроблена математична модель та її програмний макет, дозволяє проводити:

– дослідження впливу руху снарядів навколо ц.м на зміну елементів його траєкторії в залежності від характеру обертального та коливального руху снаряда;

– розробка наукових підходів розрахунку стійкості руху снарядів на траєкторії з метою забезпечення потрібної точності та кучності стрільби;

– в сукупності з рівняннями руху ц.м. снаряда проводити розрахунки основних поправочних граф Таблиць стрільби, як існуючих так і перспективних снарядів, для різних нарізних ствольних артилерійських систем

Подальшим напрямком досліджень є перевірка адекватності отриманої математичної моделі.

### Список літератури

1. Дмитриевский А.А. Внешняя баллистика / А.А. Дмитриевский, Л.Н. Лисенко. – М.: Машиностроение, 2005. – 607 с.
2. Томашевский В.М. Моделирование систем / В.М. Томашевский. – К.: Вид. группа ВПВ, 2005. – 352 с.
3. Лисенко В.М. Теория полета / В.М. Лисенко, В.И. Грабчак, Д.А. Новак. – Суми: СумДУ, 2006. – 203 с.
4. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела / Архангельский Ю.А. – М.: Наука, 1977. – 328 с.
5. Грабчак В.И. Аппроксимация силы опоры воздуха руху снарядів аналітичними функціями / В.И. Грабчак, Ю.М. Косовцов, С.В. Бондаренко. – Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. Науковий журнал. К.: НУОУ, 2014. – Вып. 1(19). – С. 19-23.
6. Грабчак В.И. Обоснования вимог до точності складання таблиць стрільби / В.И. Грабчак, С.В. Бондаренко // Системи озброєння і військова техніка. – Х.: ХУПС, 2014. – № 1 (37). – С. 20-24.
7. Подготовка стрельбы и управления огнем артиллерии [Под ред. Волобуева В.И.] – М.: Воениздат, 1987. – 376 с.
8. Чернозубов А.Д. Внешняя баллистика. Часть II / А.Д. Чернозубов, В.Д. Кириченко, И.И. Разин, К.В. Михайлов. – М.: Артиллерийская инженерная академия, 1954. – 497 с.
9. Равдин И.Ф. Внешняя баллистика неуправляемых реактивных снарядов / И.Ф. Равдин. – Л.: ВАА, 1972. – 184 с.
10. Грабчак В.И. Влияние начальных условий збуреного руху снаряда на величину його кута нутації / В.И. Грабчак // Військово-технічний збірник. – Львів: АСВ, 2013. – Вып. 1. (8). – С. 11-16.

Надійшла до редакції 30.09.2014

**Рецензент:** д-р техн. наук, ст. наук співр. А.М. Зубков, Академія Сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного, Львів.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СНАРЯДОВ С ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИЕЙ

В.И. Грабчак, С.В. Бондаренко, С.В. Стеців

*В статье исследуется характер влияния основных составляющих главного момента количества движения снаряда, на его пространственное вращательное движение в воздухе. Проводится обобщение дифференциальных уравнений математической модели пространственного вращательного движения снаряда, с гироскопической стабилизацией, с помощью уравнений Лагранжа второго рода. Определяются аналитические зависимости для обобщенных сил и кинетической энергии вращательного движения снаряда.*

**Ключевые слова:** математическая модель, вращательное движение снаряда, опрокидывающий момент, полярный и экваториальный демпфирующие моменты, момент Магнуса, уравнения Лагранжа второго рода.

### MATHEMATICAL MODEL OF ROTATIONAL MOTION SHELLS WITH GYROSCOPIC STABILIZATION

V.I. Hrabchak, S.V. Bondarenko, S.V. Stetsiv

*The article researches the character of the influence basic components of the main moment quantity movement shell, its spatial rotational motion in the air. It also conducts generalization of differential equations of mathematical model of the spatial rotational motion of the shells, with a gyroscopic stabilization by Lagrange equations of the second kind. Determined by analytical dependences for the generalized forces and the rotational kinetic energy of the shell.*

**Keywords:** mathematical model, the rotational motion of the shell, the overturning moment, the polar and equatorial damping moments, a moment Magnus, Lagrange equations of the second kind.