

УДК 629.195

О.С. Назаров

*Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків***МЕТОДИКА СИНТЕЗУ УПРАВЛІННЯ ОРІЄНТАЦІЄЮ ПРУЖНОГО СУПУТНИКА**

*У статті вирішується завдання синтезу управління орієнтацією пружного супутника з двома панелями сонячних батарей. Отримано рівняння руху супутника навколо його центру мас і згинальних коливань. Експериментально доведено, що можна знехтувати впливом більшості мод власних коливань, крім двох форм коливань панелей сонячних батарей в площині  $xOy$ .*

**Ключові слова:** *панелі сонячних батарей, синтез управління орієнтацією, пружний супутник.*

**Вступ**

Великі космічні конструкції збираються або розгортаються безпосередньо в космосі. Дані конструкції функціонують в умовах, близьких до умов вакууму і невагомості, піддаються малим навантаженням і тому можуть бути дуже гнучкими. При цьому діючі навантаження, а також гравітація і прискорення, особливо в обертальному русі, можуть чинити істотний вплив на пружні динамічні характеристики таких конструкцій і в результаті на їх динаміку. Динаміка сучасних космічних апаратів багато в чому залежить від застосовуваних технічних рішень, отриманих на основі прийнятої математичної моделі. Протяжні пружні конструкції балочного типу застосовувалися вже на перших штучних супутниках Землі для розміщення експериментальної апаратури, в якості гравітаційної стабілізації, антен зв'язку. Властивості пружного деформування конструкцій широко використовуються в сучасних космічних літальних апаратах. У загальному випадку пружний деформується супутника являє собою складну структуру, що складається з великого числа твердих тіл і пружних елементів і має змінні маси і конфігурації, з великим числом зв'язків і ступенів свобод [1, 2]. У зв'язку з цим при моделюванні такого супутника доводиться складати його розрахункову схему та ідентифікувати параметри його моделі.

При розгляді завдань управління орієнтацією супутника в даний час використовуються два типи математичних моделей. У моделях першого типу, супутник покладається абсолютно твердим тілом, обертання якого в системі, пов'язаній з головними осями інерції супутника, описується рівняннями Ейлера. Таку модель називають моделлю обертання жорсткого супутника. Модель другого типу формується при обліку пружних властивостей супутника і описує динаміку обертання пружних супутників [3, 4, 5]. Ці моделі є більш складними і точними і застосовуються при вирішенні завдань прецизійної орієнтації та високоточної стабілізації супутника.

**Метою статті** є вибір математичної моделі управління орієнтацією пружного супутника з урахуванням зневаги впливу більшості мод власних коливань, крім двох форм коливань панелей сонячних батарей.

**Аналіз літератури.** Побудови математичних моделей пружних супутників присвячені численні роботи вітчизняних і зарубіжних авторів [1-5]. До теперішнього часу розроблений цілий ряд математичних моделей руху пружних супутників описують їх динаміку на різних етапах польоту. В одних роботах систематично викладені завдання динаміки пружних супутників з автоматичною системою управління, наведені моделі пружних супутників, виведені рівняння руху таких систем, розглянуті методи дослідження динамічних властивостей пружних супутників. Інші роботи присвячені питанням синтезу оптимального управління пружним супутником, поведінка якого моделюється в класі систем з розподіленими параметрами. Більшу частину досліджень складають скінченномірні моделі пружних супутників, що формуються на основі застосування методів дискретизації суцільного середовища з подальшою редукцією моделі до прийнятого рівня складності. При цьому пружні елементи конструкції найчастіше схематизовані пружними стрижнями, рамами, панелями. Панелі сонячних батарей схематизовані важкої нерастяжимою ниткою.

Модель обертання пружного супутника є узагальненням моделі жорсткого супутника. Тим не менш, модель обертання жорсткого супутника досі широко використовується. Практичне значення завдань управління жорстким супутником визначається наступним. По-перше, існують супутники, які моделюються твердими тілами. По-друге, у ряді завдань управління орієнтацією супутника вплив пружних елементів на обертання супутника в цілому можна вважати несуттєвим, зокрема в задачах розвороту під дією досить великих керуючих моментів.

Отже, при розробці алгоритмів керування орієнтацією супутника доцільно в якості опорного при-

йняти рішення задачі управління орієнтацією жорсткого модуля, ввівши відповідні обмеження на керуючі прискорення, що гарантують незруйнованими механічного зв'язку модуля з пружними елементами.

## Викладення основного матеріалу

### 1 Рівняння руху супутника з двома панелями сонячних батарей

Розглянемо систему, що складається з абсолютно твердого тіла, що здійснює складний рух, і панелей сонячних батарей, які розглядаються пружними. Переміщення і деформації точок панелей сонячних батарей є малими. На рис. 1 приведений ескіз пружного супутника і системи координат, які використовуються при його моделюванні [6].

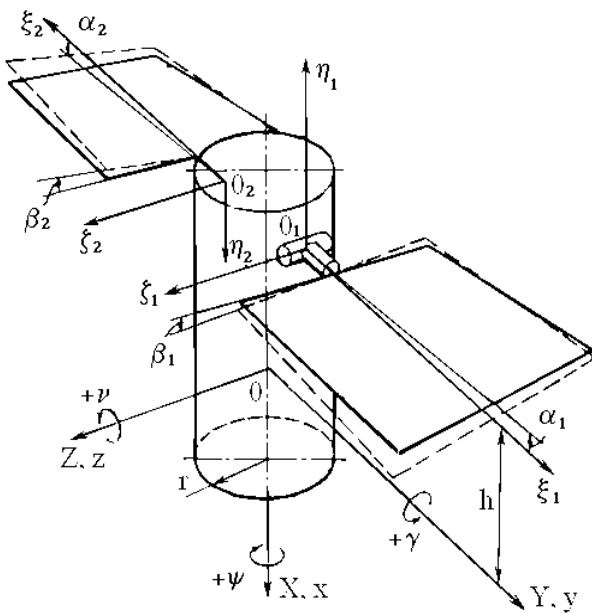


Рис. 1. Ескіз супутника

Введемо в розгляд такі системи координат: пов'язану систему координат  $Oxyz$ , осі якої є головними центральними осями інерції супутника; базову систему координат  $Ox_1y_1z_1$ , початок якої збігається з центром мас супутника; вісь  $Ox$  направлена по геоцентричному радіус-вектору центру мас супутника; вісь  $Oy$  направлена по дотичній до траєкторії в сторону, протилежну напрямку руху; вісь  $Oz$  утворює з осями  $Ox$  і  $Oy$  праву систему координат.

Додамо, що використовуються локальні системи координат  $O_k\xi_k\eta_k\zeta_k$  ( $k=1,2$ ), початки яких перебувають у точках кріплення панелей сонячних батарей з центральним тілом супутника; вісь  $O_k\xi_k$  збігається з поздовжньою віссю  $k$ -ої недеформованою панелі сонячних батарей; вісь  $O_k\eta_k$  перпендикулярна площині панелі і для першої панелі при  $\alpha_1=\beta_1=0$  спрямована протилежно напрямку осі  $Ox$ , для другої панелі спрямована по напрямку осі  $Ox$ ; вісь  $O_1\zeta_1$

лежить у площині панелі і утворює з осями  $O_1\xi_1$  і  $O_1\eta_1$  праву систему координат; вісь  $O_2\zeta_2$  також лежить у площині панелі, але з осями  $O_2\xi_2$  і  $O_2\eta_2$  утворює ліву систему координат.

Прийняті позитивні напрямки кутів повороту панелей сонячних батарей в площині тангажа  $\beta_k$  і в площині крену  $\alpha_k$  наведені на рис. 1.

Збурений рух супутника характеризується лінійними переміщеннями  $x, y, z$  і кутовими поворотами  $\psi, \gamma, \nu$ . При обліку пружних коливань панелей сонячних батарей [6-8] враховуються коливання, перпендикулярні площині панелі.

Для виведення рівнянь руху пружного супутника скористаємося відомими теоремами динаміки про зміну кількості руху і кінетичного моменту системи. При цьому рух центру мас супутника буде описуватися наступним рівнянням:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F}, \quad (1)$$

де  $\bar{Q}$  – вектор кількості руху супутника з урахуванням пружних коливань панелей сонячних батарей;  $\bar{F}$  – головний вектор зовнішніх сил у базовій системі координат, що діють на супутник.

Рівняння руху супутника відносно центру мас можна записати у вигляді

$$\frac{d\bar{G}}{dt} = \bar{M}, \quad (2)$$

де  $\bar{G}$  – вектор моменту кількості руху супутника з урахуванням пружних коливань панелей сонячних батарей;  $\bar{M}$  – головний вектор моменту зовнішніх сил у зв'язаній системі координат.

Рівняння (3.2) можна переписати, користуючись відносною похідною

$$\frac{d\bar{G}}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{G} = \bar{M} + \bar{M}_{упр}, \quad (3)$$

де  $\bar{M}_{упр}$  – керуючий момент, створюваний силовим гіроскопічним комплексом.

Для дослідження динаміки, сонячні батареї розглянемо у вигляді пружних балок з консольним закріпленням.

У цьому випадку складові вектору кількості руху супутника можна записати таким чином [6]:

$$Q_p = m\dot{p} + \sum_{k=1}^2 \int_0^{l_k} m_k(\xi_k) u_{pk}(\xi_k, t) d\xi_k \quad (p = x, y, z), \quad (4)$$

де  $m$  – маса супутника;  $l_k$  – довжина балок;  $m_k(\xi_k)$  – погонна маса балок;  $u_{pk}(\xi_k, t)$  – проекції швидкості точок  $k$ -ої балки у зв'язаній системі координат, які визначаються так [6]:

$$u_{pk}(\xi_k, t) = (-1)^k \cdot \left[ \phi_{\eta k}(\xi_k, t) \times \begin{pmatrix} \cos \alpha_k \cos \beta_k \\ \cos \alpha_k \sin \beta_k \\ \sin \alpha_k \end{pmatrix} + \phi_{\zeta k}(\xi_k, t) \times \begin{pmatrix} \sin \alpha_k \cos \beta_k \\ \sin \alpha_k \sin \beta_k \\ \cos \alpha_k \end{pmatrix} \right], \quad (p = x, y, z), \quad (5)$$

де  $\phi_{\eta k}(\xi_k, t)$ ,  $\phi_{\zeta k}(\xi_k, t)$  – пружні переміщення точок k-ої балки в площинах  $\eta_k O_k \xi_k$  и  $\zeta_k O_k \xi_k$ , відповідно. При цьому позитивні напрямки пружних переміщень збігаються з позитивними напрямками осей локальних систем координат  $O_k \xi_k \eta_k \zeta_k$ .

Складові вектору моменту кількості руху супутника з урахуванням пружності сонячних батарей приймають такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x \dot{\psi} \\ I_y \dot{\gamma} \\ I_z \dot{\nu} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^2 \int_0^{l_k} \begin{pmatrix} y_{0k} u_{zk} - z_{0k} u_{yk} \\ z_{0k} u_{xk} - x_{0k} u_{zk} \\ x_{0k} u_{yk} - y_{0k} u_{xk} \end{pmatrix} m_k(\xi_k) d\xi_k + (-1)^k \cdot \begin{pmatrix} \sin \beta_k \\ \cos \beta_k \\ 0 \end{pmatrix} \int_0^{l_k} \phi_{\xi k}(\xi_k, t) i_{\xi k}(\xi_k) d\xi_k, \quad (6)$$

де  $I_p$  – масові моменти інерції супутника щодо осей зв'язаної системи координат;  $p_{0k}$  – координати точок кріплення k-ої недеформованої балки в зв'язаній системі координат;  $i_{\xi k}(\xi_k)$  – погонний масовий момент інерції балки відносно осі  $\xi_k$ ,  $k=1,2$ ;  $\phi_{\xi k}(\xi_k, t)$  – швидкість пружного переміщення точок k-ої балки при коливаннях щодо осі  $O_k \xi_k$ .

Координати точок кріплення k-ої недеформованої балки визначаються виразами

$$\begin{aligned} x_{0k} &= -h + (-1)^k \xi_k \sin \beta_k; \\ y_{0k} &= (-1)^k (r + \xi_k \cos \beta_k); \\ z_{0k} &= 0, k = 1, 2, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $h$  – відстань по поздовжній осі  $Ox$  апарату від місця кріплення панелей сонячних батарей до центру мас;  $r$  – відстань від поздовжньої осі  $Ox$  апарату до місця кріплення панелей сонячних батарей.

Підставляючи (5), (7) в (4), (6), а результат в (1) і (2), одержимо рівняння руху центру мас пружного супутника

$$m\ddot{p} + \sum_{k=1}^2 \begin{pmatrix} \cos \beta_k \\ \sin \beta_k \\ 1 \end{pmatrix} \times (-1)^k \times$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} \sin \alpha_k \\ \sin \alpha_k \\ \cos \alpha_k \end{pmatrix} \times \int_0^{l_k} \ddot{\phi}_{\zeta k}(\xi_k, t) m_k(\xi_k) d\xi_k + \begin{pmatrix} \cos \alpha_k \\ \cos \alpha_k \\ \sin \alpha_k \end{pmatrix} \times \\ & \times \int_0^{l_k} \ddot{\phi}_{\eta k}(\xi_k, t) m_k(\xi_k) d\xi_k = F_p \quad (p = x, y, z) \end{aligned} \quad (8)$$

і рівняння сферичного руху пружного супутника відносно центру мас

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I_x \ddot{\psi} \\ I_y \ddot{\gamma} \\ I_z \ddot{\nu} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^2 (-1)^k \times \int_0^{l_k} \begin{pmatrix} r + \xi_k \cos \beta_k \\ h + \xi_k \sin \beta_k \\ h \sin \beta_k - \xi_k - r \cos \beta_k \end{pmatrix} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_{\zeta k} m_k(\xi_k) \cos \alpha_k + \ddot{\phi}_{\eta k} m_k(\xi_k) \sin \alpha_k \\ \ddot{\phi}_{\zeta k} m_k(\xi_k) \cos \alpha_k + \ddot{\phi}_{\eta k} m_k(\xi_k) \sin \alpha_k \\ \ddot{\phi}_{\zeta k} m_k(\xi_k) \sin \alpha_k + \ddot{\phi}_{\eta k} m_k(\xi_k) \cos \alpha_k \end{pmatrix} d\xi_k + \\ & + \begin{pmatrix} \sin \beta_k \\ \cos \beta_k \\ 0 \end{pmatrix} \times \int_0^{l_k} \ddot{\phi}_{\xi k} i_k(\xi_k) d\xi_k = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для визначення величин  $\phi_{\xi k}$ ,  $\phi_{\eta k}$ ,  $\phi_{\zeta k}$  розглянемо пружні коливання балок в системі  $O_k \xi_k \eta_k \zeta_k$ . Виходячи з принципу Даламбера, рівняння пружних коливань сонячних батарей можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & m_k(\xi_k) \cdot \begin{pmatrix} \ddot{\phi}_{\xi k}(\xi_k, t) \\ \ddot{\phi}_{\eta k}(\xi_k, t) \\ \ddot{\phi}_{\zeta k}(\xi_k, t) \end{pmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} \begin{pmatrix} B_{\xi k}(\xi_k) \\ B_{\eta k}(\xi_k) \\ B_{\zeta k}(\xi_k) \end{pmatrix} \times \\ & \times \frac{\partial^2}{\partial \xi_k^2} \begin{pmatrix} \phi_{\xi k}(\xi_k, t) \\ \phi_{\eta k}(\xi_k, t) \\ \phi_{\zeta k}(\xi_k, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(\xi_k, t) \\ P(\xi_k, t) \\ P(\xi_k, t) \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (10)$$

де  $B_{\zeta k}$ ,  $B_{\eta k}$ ,  $B_{\xi k}$  – згінні жорсткості балки в площинах  $\zeta_k O_k \xi_k$  и  $\eta_k O_k \xi_k$  і жорсткість балки на кручення щодо осі  $O_k \xi_k$ .

Граничні умови балки визначимо залежно від виду кріплення. При  $\xi_k=0$  балка жорстко закріплена:

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta k}(\xi_k, t) &= 0; \quad \frac{\partial \phi_{\zeta k}(\xi_k, t)}{\partial \xi_k} = 0; \\ \phi_{\eta k}(\xi_k, t) &= 0; \quad \frac{\partial \phi_{\eta k}(\xi_k, t)}{\partial \xi_k} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

а при  $\xi_k=l_k$  вона вільна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi_{\zeta k}(\xi_k, t)}{\partial \xi_k^2} &= 0; \quad \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[ B_{\zeta k}(\xi_k) \frac{\partial^2 \phi_{\zeta k}(\xi_k, t)}{\partial \xi_k^2} \right] = 0; \\ \frac{\partial^2 \phi_{\eta k}(\xi_k, t)}{\partial \xi_k^2} &= 0; \quad \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left[ B_{\eta k}(\xi_k) \frac{\partial^2 \phi_{\eta k}(\xi_k, t)}{\partial \xi_k^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Згинальні коливання, перпендикулярні площині панелі, задовольняють наступним граничним умовам:

$$\begin{aligned} \xi_k &= 0; \quad \phi_{\eta k}(\xi_k, t) = 0; \\ \xi_k &= l_k; \quad \frac{\partial \phi_{\eta k}(\xi_k, t)}{\partial \xi_k} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Інерційні сили, що діють на балку, виражаються так:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P_{\zeta k}(\xi_k, t) \\ P_{\eta k}(\xi_k, t) \\ P_{\xi k}(\xi_k, t) \end{pmatrix} &= -m_k(\xi_k) \times \left[ (-1)^{k+1} \times \right. \\ &\times \left. \begin{pmatrix} \ddot{z} \cos \alpha_k + \ddot{y} \sin \alpha_k \sin \beta_k + \ddot{x} \sin \alpha_k \cos \beta_k \\ \ddot{z} \sin \alpha_k - \ddot{y} \cos \alpha_k \sin \beta_k - \ddot{x} \cos \alpha_k \cos \beta_k \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \\ &+ \ddot{\psi} \times \begin{pmatrix} (r + \xi_k \cos \beta_k) \cos \alpha_k \\ (r + \xi_k \cos \beta_k) \sin \alpha_k \\ (-1)^k \sin \beta_k \end{pmatrix} + \\ &+ \ddot{\gamma} \times \begin{pmatrix} ((-1)^{k+1} h + \xi_k \sin \beta_k) \cos \alpha_k \\ ((-1)^{k+1} h + \xi_k \sin \beta_k) \sin \alpha_k \\ (-1)^{k+1} \cos \beta_k \end{pmatrix} + \\ &+ \ddot{\omega} \times \begin{pmatrix} ((-1)^k h \sin \beta_k - r \cos \beta_k - \xi_k) \sin \alpha_k \\ ((-1)^{k+1} h \sin \beta_k + r \cos \beta_k + \xi_k) \cos \alpha_k \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким чином, рівняння (8)–(10) з граничними умовами (11)–(13) являють собою систему диференціальних рівнянь в приватних похідних, що описує збурений рух супутника з урахуванням пружних коливань двох панелей сонячних батарей [6]. Системи рівнянь такого роду носять назву «гібридних». Зазвичай, такі системи рівнянь в приватних похідних зводяться до динамічних систем з кінцевим числом ступенів свободи.

Для цього скористаємося методом Бубнова-Гальоркіна. Функції  $\phi_{\xi k}, \phi_{\eta k}, \phi_{\zeta k}$  розкладемо в ряди за формами власних коливань пружних балок:

$$\phi_{jk}(\xi_k, t) = \sum_{n=1}^N f_{jk}^n(\xi_k) q_{jk}^n(t) \quad (j = \xi, \eta, \zeta), \quad (15)$$

де  $f_{jk}^n(\xi_k)$  – форми згинальних коливань балки;  $q_{jk}^n(t)$  – узагальнені координати;  $N$  – число врахованих мод пружних коливань балок.

Рух системи опишемо рівняннями Лагранжа, які приймають такий вигляд:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = a_{\eta k}^n \ddot{q}_{\eta k}^n \times \begin{pmatrix} (-1)^k \cos \alpha_k \\ (-1)^k \cos \alpha_k \\ \sin \alpha_k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \beta_k \\ \sin \beta_k \\ 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} m\ddot{x} \\ m\ddot{y} \\ m\ddot{z} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^N \left[ (-1)^{k+1} a_{\zeta k}^n \ddot{q}_{\zeta k}^n \times \begin{pmatrix} \sin \alpha_k \\ \sin \alpha_k \\ \cos \alpha_k \end{pmatrix} \right]; \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_x \ddot{\psi} \\ I_y \ddot{\psi} \\ I_z \ddot{\psi} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^N \left[ \ddot{q}_{\zeta k}^n \times \begin{pmatrix} (ra_{\zeta k}^n + b_{\zeta k}^n \cos \beta_k) \cos \alpha_k \\ ((-1)^{k+1} ha_{\zeta k}^n + b_{\zeta k}^n \sin \beta_k) \cos \alpha_k \\ ((-1)^k ha_{\zeta k}^n - b_{\zeta k}^n - ra_{\zeta k}^n \cos \beta_k) \sin \alpha_k \end{pmatrix} \right] + \ddot{q}_{\eta k}^n \times$$

$$\begin{pmatrix} (ra_{\eta k}^n + b_{\eta k}^n \cos \beta_k) \sin \alpha_k \\ ((-1)^k ha_{\eta k}^n + b_{\eta k}^n \sin \beta_k) \sin \alpha_k \\ ((-1)^{k+1} ha_{\eta k}^n \sin \beta_k - b_{\eta k}^n - ra_{\eta k}^n \sin \beta_k) \cos \alpha_k \end{pmatrix} +$$

$$+ \ddot{q}_{\xi k}^n \times \begin{pmatrix} (-1)^k a_{\xi k}^n \sin \beta_k \\ (-1)^{k+1} a_{\xi k}^n \cos \beta_k \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

$$\begin{aligned} &\mu_{jk}^n \cdot \left( \ddot{q}_{jk}^n + \delta_{jk}^n \frac{\omega_{jk}^n}{\pi} \dot{q}_{jk}^n + (\omega_{jk}^n)^2 q_{jk}^n \right) + (-1)^{k+1} \cdot a_{jk}^n \times \\ &\times \begin{pmatrix} \ddot{z} \cos \alpha_k + (\ddot{x} \cos \beta_k + \ddot{y} \cos \beta_k) \sin \alpha_k \\ \ddot{z} \sin \alpha_k - (\ddot{x} \cos \beta_k + \ddot{y} \sin \beta_k) \cos \alpha_k \\ 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \ddot{\psi} \times \begin{pmatrix} (ra_{\zeta k}^n + b_{\zeta k}^n \cos \beta_k) \cos \alpha_k \\ (ra_{\eta k}^n + b_{\eta k}^n \cos \beta_k) \sin \alpha_k \\ -(-1)^{k+1} a_{\zeta k}^n \sin \beta_k \end{pmatrix} + \\ &+ \ddot{\gamma} \times \begin{pmatrix} ((-1)^{k+1} ha_{\zeta k}^n - b_{\zeta k}^n \sin \beta_k - b_{\zeta k}^n) \cos \alpha_k \\ ((-1)^{k+1} ha_{\eta k}^n + b_{\eta k}^n \sin \beta_k) \sin \alpha_k \\ (-1)^{k+1} a_{\xi k}^n \cos \beta_k \end{pmatrix} + \ddot{\omega} \times \\ &\times \begin{pmatrix} ((-1)^k ha_{\zeta k}^n \sin \beta_k - ra_{\zeta k}^n \cos \beta_k) \sin \alpha_k \\ ((-1)^{k+1} ha_{\eta k}^n \sin \beta_k + ra_{\eta k}^n \cos \beta_k + b_{\eta k}^n) \cos \alpha_k \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$(j = \zeta, \eta, \xi; k = 1, 2; n = \overline{1, N}),$$

де  $\delta_{jk}^n$  – логарифмічні декременти коливань балки.

Отримана система (16) – (18) при фіксованому положенні панелей сонячних батарей відносно корпусу супутника ( $\alpha_k = \text{const}$  і  $\beta_k = \text{const}$ ,  $k=1,2$ ) являє собою лінійну систему звичайних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Якщо динаміка супутника розглядається в процесі перекладання панелей сонячних батарей, система рівнянь (16)–(18) має змінні коефіцієнти.

Покладемо в рівняннях (16)–(18) кути відхилення панелей в локальних системах координат  $O_k \xi_k \eta_k \zeta_k$  ( $k=1,2$ ) рівними нулю:  $\alpha_k = \beta_k = 0$ . У рівняннях (18) виключимо члени, залежні від лінійних прискорень центру мас супутника. В результаті система (16) – (18) істотно спроститься і прийме наступний вигляд:

$$\begin{pmatrix} I_x \ddot{\psi} \\ I_y \ddot{\gamma} \\ I_z \ddot{\upsilon} \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} (ra_{\zeta k}^n + b_{\zeta k}^n) \ddot{q}_{\zeta k}^n \\ (-1)^{k+1} (ha_{\zeta k}^n \ddot{q}_{\zeta k}^n + a_{\xi k}^n \ddot{q}_{\xi k}^n) \\ (ra_{\eta k}^n + b_{\eta k}^n) \ddot{q}_{\eta k}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \mu_{jk}^n \cdot \left( \ddot{q}_{jk}^n + \delta_{jk}^n \frac{\omega_{jk}^n}{\pi} \dot{q}_{jk}^n + (\omega_{jk}^n)^2 q_{jk}^n \right) + (-1)^{k+1} \cdot a_{jk}^n \times \\ & \times \begin{pmatrix} \ddot{z} \cos \alpha_k + (\ddot{x} \cos \beta_k + \ddot{y} \cos \beta_k) \sin \alpha_k \\ \ddot{z} \sin \alpha_k - (\ddot{x} \cos \beta_k + \ddot{y} \sin \beta_k) \cos \alpha_k \\ 0 \end{pmatrix} + \ddot{\psi} \times \\ & \times \begin{pmatrix} ra_{\zeta k}^n + b_{\zeta k}^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \ddot{\gamma} \times \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} ha_{\zeta k}^n \\ 0 \\ (-1)^{k+1} a_{\xi k}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ ra_{\eta k}^n + b_{\eta k}^n \\ 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times \ddot{\upsilon} = 0, \quad (j = \zeta, \eta, \xi; k = 1, 2; n = \overline{1, N}). \end{aligned} \quad (20)$$

З розгляду цієї системи видно, що рухи нишпорення і крену є взаємопов'язаними, в той час як рух тангажа є незалежним.

Далі будемо розглядати рівняння руху супутника навколо центру мас (18) і рівняння згинальних коливань (19). Skorистаємося наступним вектором  $\ddot{\omega} = [\ddot{\psi} \quad \ddot{\gamma} \quad \ddot{\upsilon}]^T$ . Тоді з урахуванням рівняння (16), система (18) і рівняння (19) представимо в наступному вигляді

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_x & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_y & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} + \quad (21) \\ & + \sum_{k=1}^2 \sum_{n=1}^N \begin{pmatrix} (ra_{\zeta k}^n + b_{\zeta k}^n) \ddot{q}_{\zeta k}^n \\ (-1)^{k+1} (ha_{\zeta k}^n \ddot{q}_{\zeta k}^n + a_{\xi k}^n \ddot{q}_{\xi k}^n) \\ (ra_{\eta k}^n + b_{\eta k}^n) \ddot{q}_{\eta k}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x + M_{x\Gamma} \\ M_y + M_{y\Gamma} \\ M_z + M_{z\Gamma} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} ra_{\zeta k}^n + b_{\zeta k}^n & (-1)^{k+1} ha_{\zeta k}^n & 0 \\ 0 & 0 & ra_{\eta k}^n + b_{\eta k}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \begin{pmatrix} \mu_{\zeta k}^n \cdot \left( \ddot{q}_{\zeta k}^n + \delta_{\zeta k}^n \frac{\omega_{\zeta k}^n}{\pi} \dot{q}_{\zeta k}^n + (\omega_{\zeta k}^n)^2 q_{\zeta k}^n \right) \\ \mu_{\eta k}^n \cdot \left( \ddot{q}_{\eta k}^n + \delta_{\eta k}^n \frac{\omega_{\eta k}^n}{\pi} \dot{q}_{\eta k}^n + (\omega_{\eta k}^n)^2 q_{\eta k}^n \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (22) \\ & (k = 1, 2; n = \overline{1, N}; N = 2), \end{aligned}$$

де зовнішні збурюючі моменти  $M_x, M_y, M_z$  та керуючі моменти  $M_{x\Gamma}, M_{y\Gamma}, M_{z\Gamma}$  визначаються з таких виразів:

$$M_x = 0; M_y = 0; M_z = 0; \bar{M}_{\Gamma} = -\dot{H}_{\Gamma} - (\bar{\omega} \times \bar{H}_{\Gamma}). \quad (23)$$

Проекції сумарного кінетичного моменту гіродина на пов'язану систему координат визначаються так:

$$\begin{aligned} H_{x\Gamma} &= h_0 (\cos \beta_1 + \cos \beta_2 + \cos \beta_3 + \cos \beta_4); \\ H_{y\Gamma} &= h_0 (\sin \beta_1 + \sin \beta_2); H_{z\Gamma} = h_0 (\sin \beta_3 + \sin \beta_4), \end{aligned} \quad (24)$$

де  $h_0$  – кінетичний момент одного гіродіна.

## 2 Математична модель управління орієнтацією пружного супутника

Модель обертання пружного супутника має такий вигляд [6, 9]

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{H}_{xM} \\ \dot{H}_{yM} \\ \dot{H}_{zM} \end{pmatrix} + \\ & + \begin{pmatrix} a_{xr}^{(1)} \ddot{r}_x^{(1)} + a_{xr}^{(2)} \ddot{r}_x^{(2)} + a_{xp1} \ddot{p}_1 + a_{xq6} \ddot{q}_6^{(x)} \\ -a_{yr1} \ddot{r}_1^{(1)} - a_{yr3} \ddot{r}_3^{(2)} - a_{yq6} \ddot{q}_6^{(y)} - a_{yr}^{(1)} \ddot{r}_y^{(1)} - a_{yr}^{(2)} \ddot{r}_y^{(2)} \\ -a_{zq1} \ddot{q}_1 - a_{zq} \ddot{q}_z \end{pmatrix} = \quad (25) \\ & = \begin{pmatrix} M_x + M_{xg} \\ M_y + M_{yg} \\ M_z + M_{zg} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

де  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  – моменти інерції супутника щодо базової системи координат при недеформованих пружних елементах;  $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$  – компоненти вектору кутового прискорення;  $r_x^{(1)}, r_x^{(2)}, p_1, q_6^{(x)}, r_1, r_3, q_6^{(y)}, r_y^{(1)}, r_y^{(2)}, q_1, q_z$  – узагальнені координати, що характеризують відхилення пружних елементів щодо недеформованого стану;  $a_{xr}^{(1)}, a_{xr}^{(2)}, a_{xp1}, a_{xq6}, a_{yr1}, a_{yr3}, a_{yq6}, a_{yr}^{(1)}, a_{yr}^{(2)}, a_{zq1}, a_{zq}$  – коефіцієнти впливу;  $M_{xg}, M_{yg}, M_{zg}$  – керуючі моменти, прикладаються до корпусу супутника з боку силового гіроскопічного комплексу;  $M_x, M_y, M_z$  – збурюючі моменти від гравітаційного поля Землі.

Колівання панелей сонячних батарей описуються такими рівняннями [9]

$$\begin{aligned}
 \ddot{r}_x^{(1)} + e_{rx}^{(1)} \dot{r}_x^{(1)} + \omega_{rx}^{(1)2} r_x^{(1)} &= -2a_{rx}^{(1)} \dot{\omega}_x; \\
 \ddot{r}_x^{(2)} + e_{rx}^{(2)} \dot{r}_x^{(2)} + \omega_{rx}^{(2)2} r_x^{(2)} &= -2a_{rx}^{(2)} \dot{\omega}_x; \\
 \ddot{p}_1 + e_{p1} \dot{p}_1 + \omega_{p1}^2 p_1 &= -a_{p1x} \dot{\omega}_x; \\
 \ddot{q}_6^{(x)} + e_{q6x} \dot{q}_6^{(x)} + \omega_{q6}^{(x)2} q_6^{(x)} &= -2a_{q6x} \dot{\omega}_x; \\
 \ddot{r}_1 + e_{r1} \dot{r}_1 + \omega_{r1}^2 r_1 &= a_{r1y} \dot{\omega}_y; \\
 \ddot{r}_3 + e_{r3} \dot{r}_3 + \omega_{r3}^2 r_3 &= a_{r3y} \dot{\omega}_y; \\
 \ddot{q}_6^{(y)} + e_{q6y} \dot{q}_6^{(y)} + \omega_{q6}^{(y)2} q_6^{(y)} &= 2a_{q6y} \dot{\omega}_y; \\
 \ddot{r}_y^{(1)} + e_{ry}^{(1)} \dot{r}_y^{(1)} + \omega_{ry}^{(1)2} r_y^{(1)} &= 2a_{ry}^{(1)} \dot{\omega}_y; \\
 \ddot{r}_y^{(2)} + e_{ry}^{(2)} \dot{r}_y^{(2)} + \omega_{ry}^{(2)2} r_y^{(2)} &= 2a_{ry}^{(2)} \dot{\omega}_y; \\
 \ddot{q}_1 + e_{q1} \dot{q}_1 + \omega_{q1}^2 q_1 &= a_{q1z} \dot{\omega}_z; \\
 \ddot{q}_z + e_{qz} \dot{q}_z + \omega_{qz}^2 q_z &= 2a_{qz} \dot{\omega}_z,
 \end{aligned} \tag{26}$$

де  $e_{rx}^{(1)}, e_{rx}^{(2)}, e_{p1}, e_{q6x}, e_{r1}, e_{r3}, e_{q6y}, e_{ry}^{(1)}, e_{ry}^{(2)}, e_{q1}, e_{qz}$  – коефіцієнти демпфірування коливань;  $\omega_{rx}^{(1)2}, \omega_{rx}^{(2)2}, \omega_{p1}^2, \omega_{q6}^{(x)2}, \omega_{r1}^2, \omega_{r3}^2, \omega_{q6}^{(y)2}, \omega_{ry}^{(1)2}, \omega_{ry}^{(2)2}, \omega_{q1}^2, \omega_{qz}^2$  – квадрати власних частот коливань;  $a_{q6x}, a_{r1y}, a_{r3y}, a_{q6y}, a_{ry}^{(1)}, a_{ry}^{(2)}, a_{q1z}, a_{qz}$  – коефіцієнти впливу.

Динамічні рівняння (25) - (26) доповнюються кінематичними рівняннями обертання

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_0 &= -0,5(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_3 \omega_3); \\
 \dot{\lambda}_1 &= 0,5(\lambda_0 \omega_1 + \lambda_2 \omega_3 - \lambda_3 \omega_2); \\
 \dot{\lambda}_2 &= 0,5(\lambda_0 \omega_2 + \lambda_3 \omega_1 - \lambda_1 \omega_3); \\
 \dot{\lambda}_3 &= 0,5(\lambda_0 \omega_3 + \lambda_1 \omega_2 - \lambda_2 \omega_1),
 \end{aligned} \tag{27}$$

де  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  – компоненти кватерніона повороту базової системи координат щодо деякого інерціального базису.

Для параметрів панелей сонячних батарей прийняті значення із заданих умов [9].

Розглянемо випадок вільного руху пружного супутника, коли  $M=0$ , тобто при відсутності керуючих і збурюючих впливів. Результати моделювання руху по власних форм сонячних батарей наведені на малюнку 2 для  $T=10$  с. і на рисунках 3 і 4 для  $T=1$  с. На рисунках 5 і 6 представлені покомпонентні залежності вектору кутової швидкості обертання супутника і кватерніона орієнтації супутника для  $T=1$  с.

З наведених графічних залежностей на рисунках 2-6 очевидно, що можна знехтувати впливом більшості мод власних коливань, крім двох форм коливань панелей сонячних батарей в площині xOy (змінні  $r_x^{(1)}, \dot{r}_x^{(1)}, r_x^{(2)}, \dot{r}_x^{(2)}, r_y^{(1)}, \dot{r}_y^{(1)}, r_y^{(2)}, \dot{r}_y^{(2)}$  в рівняннях (25)).

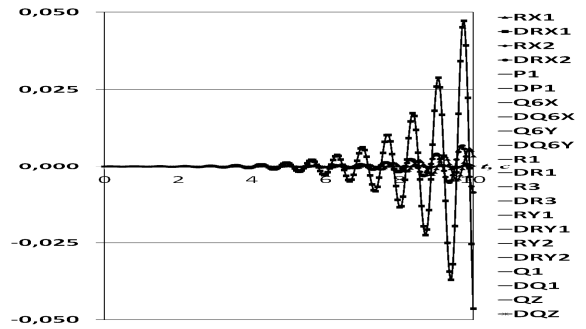


Рис. 2. Моделювання руху по власних форм сонячних батарей при  $T=10$  с

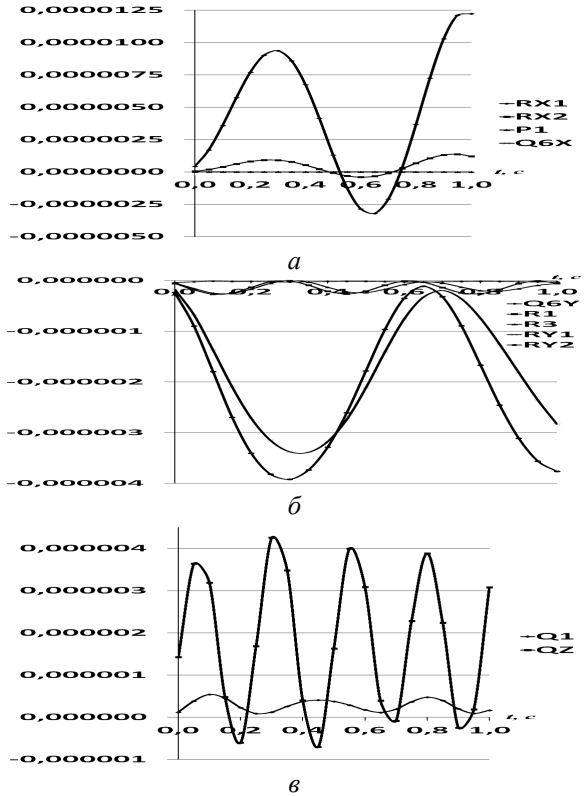


Рис. 3. Проекції відхилень пружних елементів: а – на вісь x; б – на вісь y; в – на вісь z

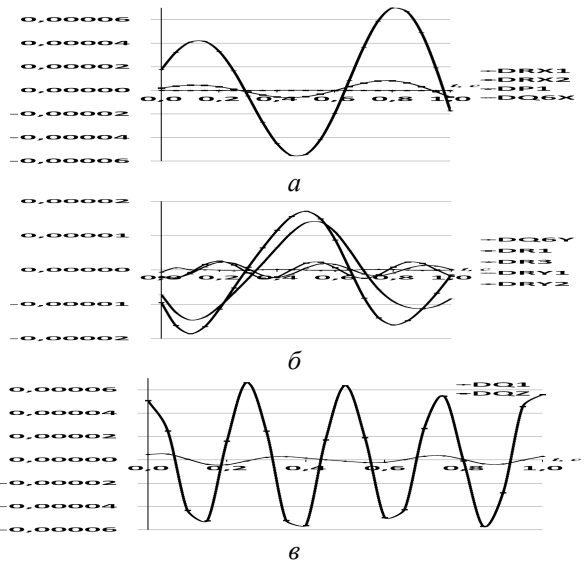


Рис. 4. Проекції похідних відхилень пружних елементів: а – на вісь x; б – на вісь y; в – на вісь z

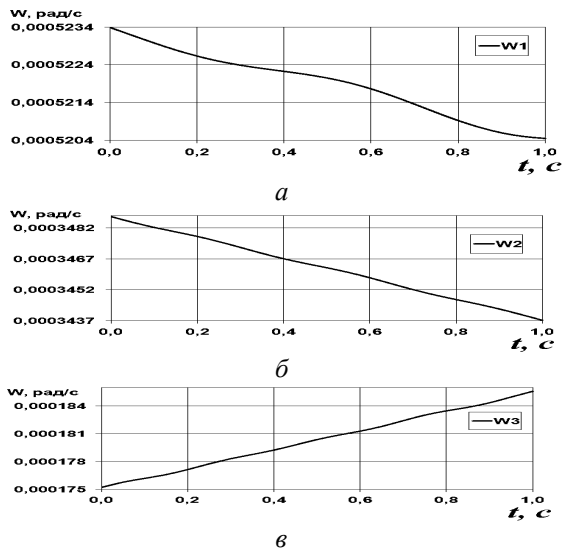


Рис. 5. Проекції вектору кугової швидкості обертання супутника: а –  $\omega_1$ ; б –  $\omega_2$ ; в –  $\omega_3$

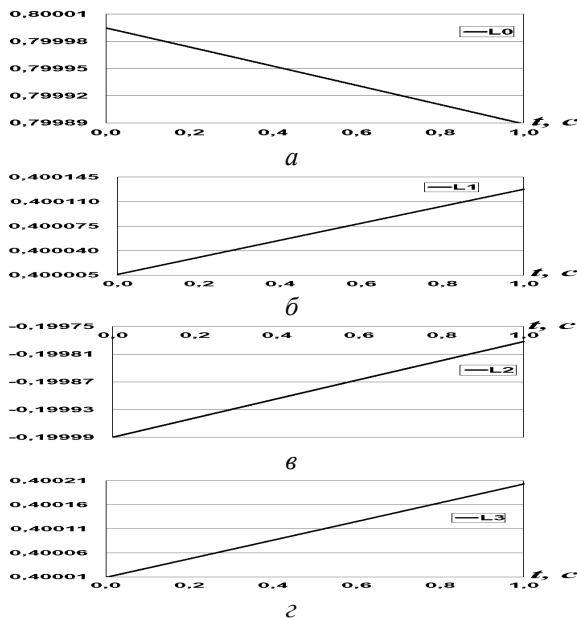


Рис. 6. Компоненти кватерніона орієнтації супутника: а –  $\lambda_0$ ; б –  $\lambda_1$ ; в –  $\lambda_2$ ; г –  $\lambda_3$

З урахуванням вище сказаного в якості спрощеної моделі керованого обертання супутника приймемо:

$$\begin{pmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{H}_{xM} \\ \dot{H}_{yM} \\ \dot{H}_{zM} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{xr}^{(1)} \cdot \dot{r}_x^{(1)} + a_{xr}^{(2)} \cdot \dot{r}_x^{(2)} \\ -a_{yr}^{(1)} \cdot \dot{r}_y^{(1)} - a_{yr}^{(2)} \cdot \dot{r}_y^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x + M_{xg} \\ M_y + M_{yg} \\ M_z + M_{zg} \end{pmatrix} \quad (28)$$

Коливання панелей сонячних батарей описуються такими рівняннями:

$$\begin{aligned} \ddot{r}_x^{(1)} + e_{rx}^{(1)} \dot{r}_x^{(1)} + \omega_{rx}^{(1)2} r_x^{(1)} &= -2a_{rx}^{(1)} \dot{\omega}_x; \\ \ddot{r}_x^{(2)} + e_{rx}^{(2)} \dot{r}_x^{(2)} + \omega_{rx}^{(2)2} r_x^{(2)} &= -2a_{rx}^{(2)} \dot{\omega}_x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{r}_y^{(1)} + e_{ry}^{(1)} \dot{r}_y^{(1)} + \omega_{ry}^{(1)2} r_y^{(1)} &= 2a_{ry}^{(1)} \dot{\omega}_y; \\ \ddot{r}_y^{(2)} + e_{ry}^{(2)} \dot{r}_y^{(2)} + \omega_{ry}^{(2)2} r_y^{(2)} &= 2a_{ry}^{(2)} \dot{\omega}_y. \end{aligned} \quad (29)$$

Динамічні рівняння (28)-(29) доповнюються кінематичними рівняннями обертання (27). Для параметрів панелей сонячних батарей прийняті значення із заданих умов [9]. Наведена динамічна модель пружного супутника (27)-(29) чисельно реалізована і представлена на рис. 7-10. Для математичного моделювання будемо розглядати модель супутника (26)-(28) із заданими лінійними розмірами.

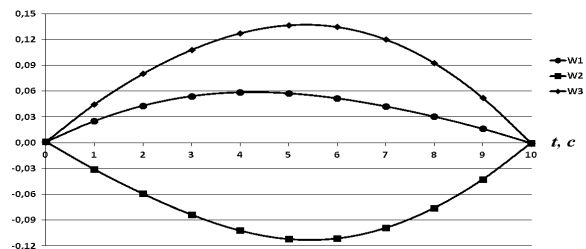


Рис. 7. Проекції вектору кугової швидкості обертання супутника

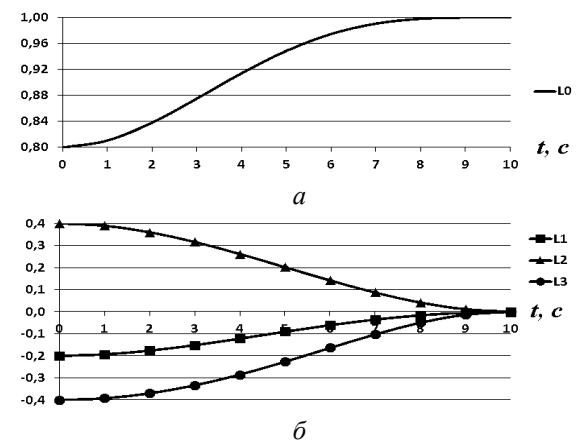


Рис. 8. Компоненти кватерніона орієнтації супутника: а –  $\lambda_0$ ; б –  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

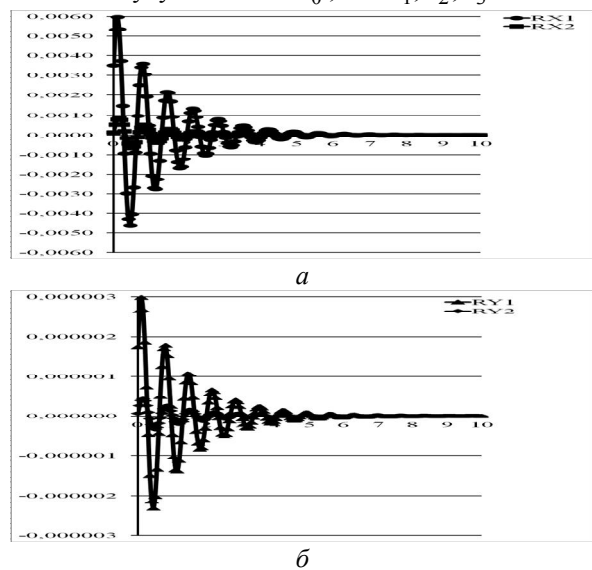


Рис. 9. Проекції відхилень пружних елементів на осі x (а) і y (б)

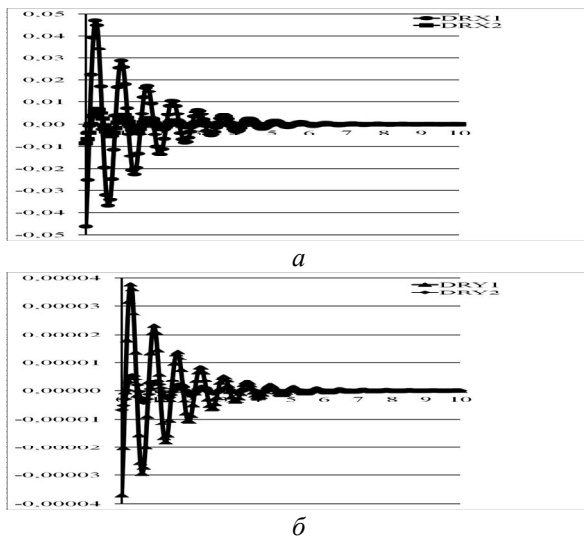


Рис. 10. Проекції похідних відхилень пружних елементів на осі  $x$  (а) і  $y$  (б)

Аеродинамічні і гравітаційні моменти в кожному з каналів можна представити у вигляді [10]:

$$M_{AER X} = \text{const} \ll M_{AER Y,Z}; M_{GR X} = 3 \frac{\mu}{3} (I_z - I_y) \beta \beta';$$

$$M_{AER Y} = \rho V^2 S_{M-SB} \alpha^2 I_a; M_{AER Z} = \rho V^2 S_{M+SB} \beta^2 I_a; \quad (30)$$

$$M_{GR Y} = 3 \frac{\mu}{3} (I_x - I_z) \beta \beta'; M_{GR X} = 3 \frac{\mu}{3} (I_y - I_x) \beta \beta'.$$

Результати, отримані на рис. 7-10, свідчать про правомірність спрощення математичної моделі системи управління орієнтацією супутника.

### Висновки

У даній статті розглянуто задачу синтезу управління орієнтацією пружного супутника. Спочатку описані динаміка і управління рухом пружного супутника, потім здійснено вибір рівнянь руху супутника з двома панелями сонячних батарей. Далі представлені повна і спрощена математичні моделі управління орієнтацією пружного супутника. Крім того, описані моменти зовнішніх сил, що діють на пружний супутник, зокрема розглянуті аеродинамічний та гравітаційний моменти.

Проведений аналіз дозволив обґрунтовано вибрати математичну модель обертання пружного су-

путника, склад і структуру виконавчих органів системи управління, найбільш доцільний підхід до вирішення завдань управління орієнтацією супутника. Зокрема, можна знехтувати впливом більшості мод власних коливань, крім двох форм коливань панелей сонячних батарей в площині  $xOy$ .

### Список літератури

1. Драновский В.И. Динамика деформируемой космической системы тел с программно изменяемой конфигурацией / В.И. Драновский, А.Е. Закржевский, В.С. Хорошилов // Космична наука і технологія. – 2004. – Т. 10, № 1. – С. 45–53.
2. Закржевский А.Е. Динамика системы тел с программно изменяемой конфигурацией / А.Е. Закржевский, Дж. Матарацио, В.С. Хорошилов // Прикладная механика. – 2004. – Т. 40, № 4. – С. 130–135.
3. Динамика систем тел с геометрически изменяемыми составляющими / А.П. Алпатов, В.И. Драновский, А.Е. Закржевский, В.С. Хорошилов // Техническая механика. – 2003. – № 1. – С. 30–43.
4. Закржевский А.Е. Вопросы динамики систем твердых и упругих тел применительно к космическим аппаратам / А.Е. Закржевский // Прикладная механика. – 2000. – Т. 36, № 8. – С. 28–63.
5. О динамике раскрытия орбитальной конструкции с упругими элементами / В.И. Драновский, А.Е. Закржевский, А.П. Коваленко, В.С. Хорошилов // Прикладная механика. – 2006. – Т. 42, № 8. – С. 136–144.
6. Назаров А.С. Решение задачи управления движением космического аппарата с двумя панелями солнечных батарей / А.С. Назаров // Радиоэлектроника и информатика. – 2008. – № 2. – С. 3–7.
7. Давыдов А.А. Определение параметров вращательного движения КА «Монитор-Э» по телеметрическим данным о токе солнечных батарей / А.А. Давыдов, В.В. Сазонов // Препринт ИПМ РАН. – 2008. – № 85. – 25 с.
8. Давыдов А.А. Определение параметров вращательного движения малого спутника связи по данным измерений тока солнечных батарей / А.А. Давыдов, В.В. Сазонов // Препринт ИПМ РАН. – 2009. – № 32. – 25 с.
9. Назаров О.С. Математична модель управління орієнтацією пружного супутника / О.С. Назаров // Механіка та машинобудування. – 2013. – № 2. – С. 134–139.
10. Нейштадт И.А. Периодические колебания оси симметрии спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов / И.А. Нейштадт, В.В. Сазонов // Препринт ИПМ им. РАН. – 2003. – № 20. – 31 с.

Надійшла до редколегії 18.08.2015

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. М.А. Подригало, Харківський національний автомобільний університет, Харків.

### МЕТОДИКА СИНТЕЗА УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ УПРУГОГО СПУТНИКА

А.С. Назаров

В статье решается задача синтеза управления ориентацией упругого спутника с двумя панелями солнечных батарей. Получены уравнения движения спутника вокруг его центра масс и изгибных колебаний. Экспериментально доказано, что можно пренебречь влиянием большинства мод собственных колебаний, кроме двух форм колебаний панелей солнечных батарей в плоскости  $xOy$ .

**Ключевые слова:** панели солнечных батарей, синтез управления ориентацией, упругий спутник.

### METHODS OF THE ATTITUDE CONTROL SYNTHESIZING OF THE ELASTIC SATELLITE

A.S. Nazarov

This paper solves the problem of the attitude control synthesis of elastic satellite with two solar panels. The equations of satellite motion around its center of gravity and bending vibrations. Experimental it proved that we can neglect the influence of the majority of natural vibration modes, except for the two forms of oscillations of solar panels in the plane  $xOy$ .

**Keywords:** solar panels, attitude control synthesis, elastic satellite.