



ВПЛИВ ФОРМИ ГРАНИЧНОЇ ПОВЕРХНІ НА ОПИС ДЕФОРМУВАННЯ БЕТОНУ СПІВВІДНОШЕННЯМИ ТЕОРІЇ ТЕЧІЇ

В. М. Левін¹, С. В. Шабельник²

*Донбаська національна академія будівництва і архітектури,
вул. Державіна, 2, м. Макіївка, Донецька область, Україна, 86123.*

E-mail: ¹ nauka@telenet.dn.ua, ² sergey_shabelnik@mail.ru

Отримана 12 вересня 2013; прийнята 22 листопада 2013.

Анотація. Проаналізовано співвідношення теорії течії, орієнтовані на опис процесу деформування бетону при використанні ізотропної моделі зміцнення. Розглянуто три граничні поверхні різної форми і виконана оцінка впливу цієї форми на деформаційні співвідношення. У роботі була перевірена можливість використання функції зміцнення, отриманої з розглянутого експерименту, а не з експерименту на одновісний стиск, як це було прийнято в інших дослідників. Розрахункові дані зіставлені з даними експериментів Н. Курфег'а і А. Н. Бамбури. У роботі розглянуто просте (двовісний стиск, стиск з розтягом) і складне навантаження (двовісний стиск). Наведено похибки апроксимації дослідних даних запропонованими співвідношеннями. Показано, що застосування більш адекватних граничних умов приводить до зниження похибки апроксимації дослідних даних, принаймні для напряму головного стискального напруження, до прийнятної рівня як для зони двовісного стиску, так і для зони стиску з розтягом. Виявлено варіант граничної умови, що забезпечує досить хорошу відповідність розрахункових і дослідних даних. Подальший розвиток моделі передбачає уточнення закону зміцнення і вимагає проведення експериментів на бетонних зразках в умовах складного навантаження.

Ключові слова: бетон, теорія течії, деформації, похибка, відхилення, гранична поверхня.

ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ОПИСАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ БЕТОНА СООТНОШЕНИЯМИ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ

В. М. Левин¹, С. В. Шабельник²

*Донбасская национальная академия строительства и архитектуры,
ул. Державина, 2, г. Макеевка, Донецкая область, Украина, 86123.*

E-mail: ¹ nauka@telenet.dn.ua, ² sergey_shabelnik@mail.ru

Получена 12 сентября 2013; принята 22 ноября 2013.

Аннотация. Проанализированы соотношения теории течения, ориентированные на описание процесса деформирования бетона при использовании изотропной модели упрочнения. Рассмотрены три предельные поверхности различной формы и выполнена оценка влияния этой формы на деформационные соотношения. В работе была проверена возможность использования функции упрочнения, полученной из рассматриваемого опыта, а не опыта на одноосное сжатие, как это было принято у других исследователей. Расчетные данные сопоставлены с данными экспериментов Н. Курфег'а и А. Н. Бамбуры. В работе рассмотрены простое (двухосное сжатие, сжатие-растяжение) и сложное нагружения (двухосное сжатие). Приведены погрешности аппроксимации опытных данных предложенными соотношениями. Показано, что применение более адекватных предельных условий приводит к снижению погрешности аппроксимации опытных данных, по крайней мере для направления главного сжимающего напряжения, до приемлемого уровня как для области двухосного сжатия, так и для области сжатия-растяжения. Выявлен вариант предельного условия, обеспечивающий достаточно хорошее соответствие

расчетных и опытных данных. Дальнейшее развитие модели предполагает уточнение закона упрочнения и требует проведения экспериментов на бетонных образцах в условиях сложного нагружения.

Ключевые слова: бетон, теория течения, деформации, погрешность, предельная поверхность.

EFFECT OF SHAPE OF ULTIMATE SURFACE ON DESCRIPTION OF CONCRETE DEFORMATION BY RELATIONS OF FLOW THEORY

Victor Levin¹, Sergey Shabelnik²

Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture,

2, Derzhavina Str., Makiyivka, Donetsk Region, Ukraine, 86123.

E-mail: ¹ nauka@telenet.dn.ua, ² sergey_shabelnik@mail.ru

Received 12 September 2013; accepted 22 November 2013.

Abstract. The relations of the flow theory oriented to description of the deformation process of concrete at application of the isotropic model of hardening have been analyzed. Three ultimate surfaces of various shapes have been considered and the effect estimation of the shape to the straining relations have been made. The study tested the ability of application of a hardening function produced from the considered experiment but not the experiment to uniaxial compression as usual in other researchers. The calculated data have been compared with experimental data of H. Kupfer and A. Bambura. The simple (biaxial compression, compression-tension) and complex loading (biaxial compression) have been considered in the paper. The approximation errors of experimental data by suggested relations have been presented in the paper. It has been shown that the application of considerably more sufficient boundary conditions transform to error approximation reduction of the experimental data at least for the principal compressive stress direction up to the acceptable level both for biaxial compression region and for compression-tension region. The boundary condition version providing a sufficiently good correspondence of the calculated and experimental data. The subsequent progress of the model further development of the model assumes improvement of the law of reinforcement and demands execution of experiments on the concrete specimens in conditions of combined loading.

Keywords: concrete, flow theory, deformations/strains, error, ultimate surface.

1. Problem statement

Application of deformation plasticity theory is restricted by stressing, close proximity to proportional one. In many instances, it does not correspond to the real conditions of structural works. The flow theory permits to consider sufficiently arbitrary trajectory of material loading but the information about verification of such kinds of models for concrete in accessible sources is practically absent and it stipulates to carry-out this work.

2. Analysis of the problem

Concrete deformation non-linearity, starting with sufficiently low level of stressing, stipulates permanent formation and improvement of available models of such kinds of deformation. There are

sufficiently adequate models for the proportional stressing case; first of all the models by N. Karpenko [1], V. Korsun [2], V. Kruglov [3]; for complex loading has been considered only separate special cases. Model construction of concrete behavior based on the flow theory S. Klovanih [4], V. Agapov [5], S. Hsieh, et. al. [6], J. Lubliner [7], P. Grassl [8] and some other researchers dealt with. However, in majority of available sources there is no direct comparison of calculated data with experimental results on the concrete samples, peculiarly for the complex loading trajectory that does not allow to judge about the degree of adequacy of offered models based on the theory of flow.

The aim of the paper is subsequent modification of a proposal [5] and comparison of corresponding theoretical and experimental data.

3. Research data

The given research has considered the effect of the shape of ultimate surface to the theoretical stress-strain curves, especially for «compression-tension» region. D. R. J. Owen [10], S. S. Hsieh, E. G. Ting, W. F. Chen [6] и K. J. Willam [11] have chosen the ultimate surfaces for the analysis. The surfaces are coordinated well with experimental data for all quadrants of stressed state.

The version of the theory of flow oriented to the description of concrete deformation has been considered in the present paper (V. Agapov [5]). The given model represents by itself the development of the classical Prandtl-Reuss theory. It assumes material isotropy and presence of functional dependence of stress intensity from accumulated plastic strain.

In the paper [5], the Prandtl-Reuss equations for the plane stress state were transformed by the method offered in the paper [10] and modified for the concrete work.

The constraint between increments of strains and stresses in the elastoplastic stage of the paper can be assumed to be written down as:

$$d\bar{\varepsilon} = C_{ep}^{-1} d\bar{\sigma}, \tag{1}$$

where C_{ep} – is elastoplastic matrix of the material,

$$C_{ep} = C - C\bar{a} \frac{\bar{a}^T C}{H' + \bar{a}^T C\bar{a}}, \tag{2}$$

C – is the matrix of elastic constants,

$$d\bar{\varepsilon} = (d\varepsilon_x; d\varepsilon_y; d\gamma_{xy}), d\bar{\sigma} = (d\sigma_x; d\sigma_y; d\tau_{xy}),$$

$H' = d\sigma_i / d\varepsilon_{ip}$ (is determined of the experience to uniaxial compression).

Flow vector \bar{a} introducing to the formula (2) directed on the normal to surface of the flow:

$$\bar{a} = grad f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}). \tag{3}$$

The given model assumes isotropy of the material; the author describes surface of the flow with application of a yield criterion of D. R. J. Owen [10]:

$$f(\sigma) = f(I_1, J_2) = (\beta(3J_2) + \alpha I_1)^{1/2} = \sigma_T. \tag{4}$$

This criterion well agrees with experimental data of H. Kupfer [12] for a quadrant «compression-compression» in the space of principal stresses but the description of the rest fields it does not correspond to the experimental data (Fig. 1).

Function of limiting surface S. S. Hsieh [6]:

$$f(\sigma, \tau) = AJ_2 / \tau(\varepsilon_{ip}) + B\sqrt{J_2} + C\sigma_1 + DI_1 - \tau(\varepsilon_{ip}) = 0, \tag{5}$$

where A, B, C, D – the coefficients characterized the material and provide the incidence of the reference points of the pointed surface.

The function of the ultimate surface of K. J. Willam [11]:

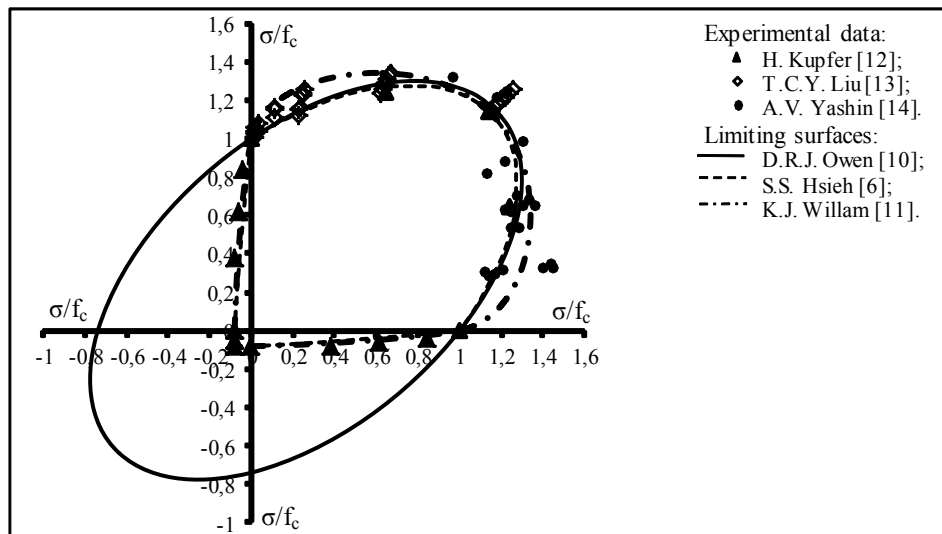


Figure 1. Comparison of ultimate surfaces with experimental data.

$$f(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \sqrt{5}\tau_m - r = 0, \quad (6)$$

where τ_m – is the function from the second invariant of stress deviator:

$$\tau_m = \sqrt{(2/5)J_2}; \quad (7)$$

r – is the interpolation function between limiting values of the functions (τ_t, τ_c) forming meridional curves.

$$r = (2\tau_c(\tau_c^2 - \tau_t^2)\cos\theta + \tau_c(2\tau_t - \tau_c) \times \sqrt{4(\tau_c^2 - \tau_t^2)\cos^2\theta + 5\tau_t^2 - \tau_t\tau_c}) / (4(\tau_c^2 - \tau_t^2)\cos^2\theta + (\tau_c - 2\tau_t)^2), \quad (8)$$

where τ_t, τ_c – is the function of meridional curves of tension and compression correspondingly:

$$\tau_t = \sqrt{5}\tau \left[a_0 + a_1 \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right) + a_2 \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right)^2 \right],$$

$$\tau_c = \sqrt{5}\tau \left[b_0 + b_1 \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right) + b_2 \left(\frac{\sigma_0}{\tau} \right)^2 \right]. \quad (9)$$

The functions of the ultimate surface (5, 6) well agree with experimental data for all the quadrants of stressed state (Fig. 1).

The coefficients $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ entering to (9) provide hit of the reference points to the boundary surface. The points correspond to the cases: uniaxial compression f_c , biaxial uniform tension f_{2t} , triaxial uniform tension f_{3t} , biaxial uniform compression f_{2c} , uniaxial tension f_t .

At application of the ultimate surfaces (5) and (6), the model [5] has been transformed into the case of the volume stressed state. In the capacity of the function of hardening, the dependence $H' = d\tau_i/d\varepsilon_{ip}$, has been used because in the function of surfaces a hardening parameter τ_i has been used. With a view to approximation improvement in a version of the model based on the surface (6) the capability of application of H' obtained from the considered experience but not from experience to uniaxial compression, as usual has been used. It should be pointed out that at the analysis the formula (5) has been used as the yield function and the formula (6) as the function entering into the loading surface where τ_i has been accepted as the boundary characteristic of concrete at uniaxial compression. The normal to the surface (6) for the case of the bulk stressed state is:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} \right)^T = J \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \tau_m}, \frac{\partial F}{\partial \tau_c}, \frac{\partial F}{\partial \tau_t}, \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^T, \quad (10)$$

where J – is the Jacobian matrix with dimension of 4×6 .

The Fig. 2, 3, 4 shows the comparison of theoretical curves obtained at application of described above ultimate surfaces with experimental data.

Mean square errors of experimental data approximation depending on the applied surface have been given in the Table1.

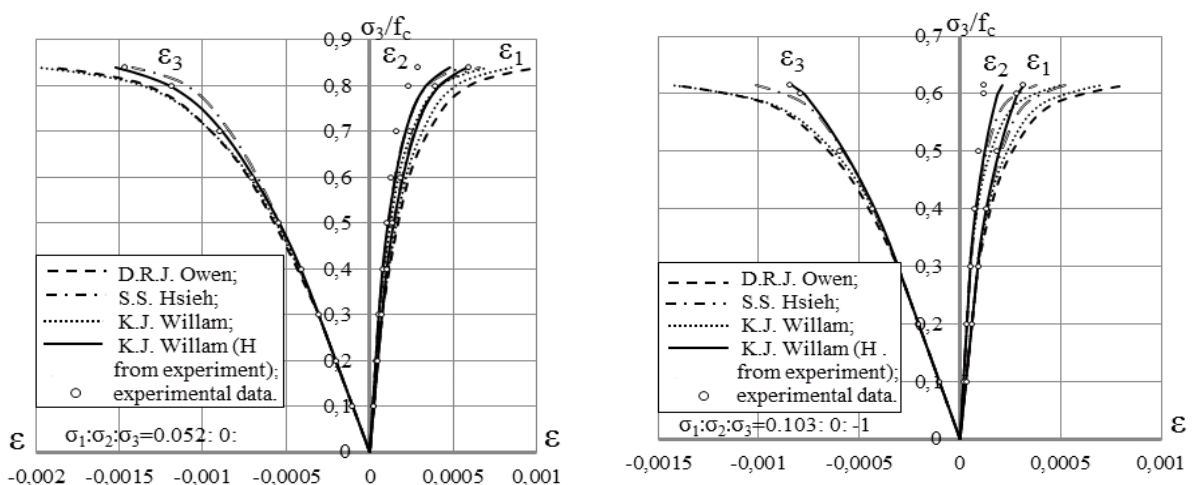


Figure 2. Comparison of theoretical stress-strain curves with experimental data of H. Kupfer [12] in the region of compression-tension.

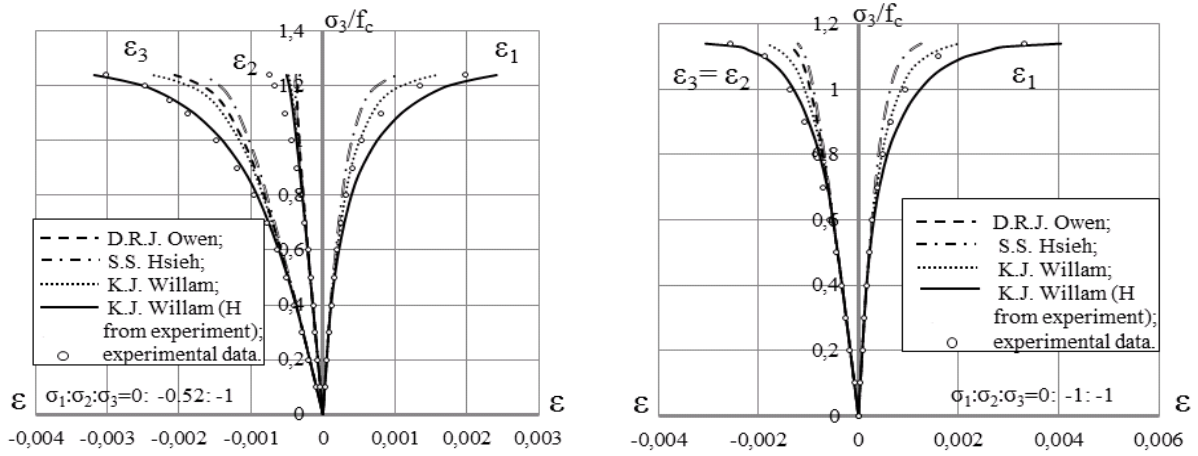


Figure 3. Comparison of theoretical stress-strain curves with experimental data of H. Kupfer [12] in the region of compression.

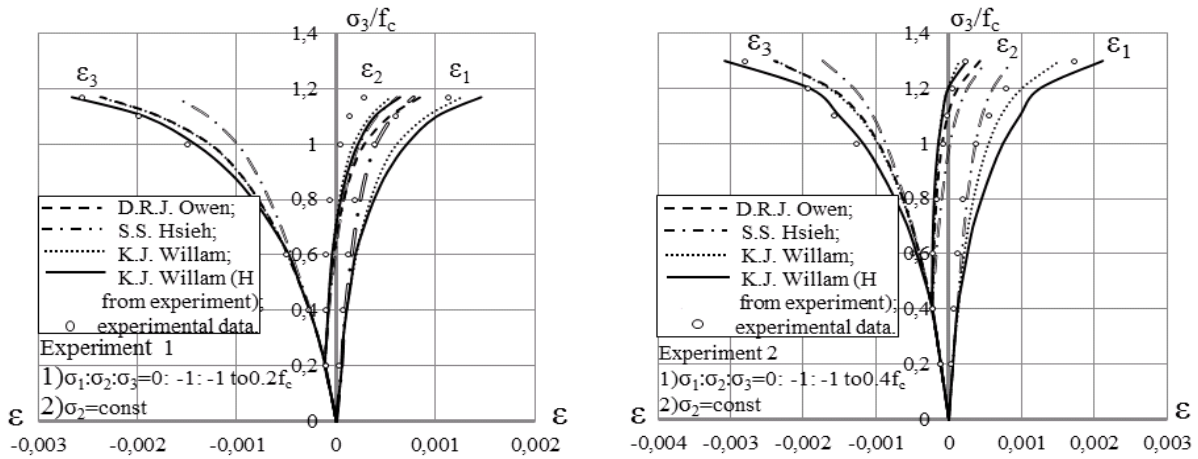


Figure 4. Comparison of theoretical stress-strain curves with experimental data A. N. Bambura [15] at complex loading.

Table 1. Correspondence of theoretical «stress-strain» curves by experimental data

Trajectory $\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3$	Mean square relative error, percent											
	Surface D. R. J. Owen			Surface S. S. Hsieh, et al			Surface K. J. Willam (H' from uniaxial compression)			Surface K. J. Willam (H' from considered experiment)		
	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3	ϵ_1	ϵ_2	ϵ_3
0.052; 0; -1, [12]	28.5	–	6.4	6.6	25.3	3.8	18.6	41.9	5.8	6.2	23.2	1
0.103; 0; -1, [12]	42.2	–	14.9	15.4	52.7	4.1	30.5	78.6	9.7	2.6	25.7	2.9
0; -0.52; -1, [12]	–	18.9	17.1	20.5	16.9	21.3	8.3	13.2	19.6	21.2	11.9	5
0; -1; -1, [12]	–	17.5	17.5	18.2	20.4	20.4	6.5	13.4	13.4	18.4	6.7	6.7
experiment 1 (Fig.4) [15]	–	274	8.9	51.9	230	22	71.9	162.3	10	79.9	204	4.6
experiment 2 (Fig.4) [15]	–	42.1	16.8	64.9	195	23.5	77.2	104.1	20.7	101.6	94.6	7.1

4. Conclusions

The application of more than adequate ultimate surfaces, in the capacity of the criterion of flow (or for the loading surface construction), substantially decreases the error of calculated curves of material deformation. The application of the formulas suggested by K. J. Willam [12] permitted to obtain the change not only dimension but also the shape of the loading surface at the growth of loading level. It

led to the decrease of approximation error of the experimental data, at least for the direction of the principal compressive stress up to the acceptable level, both for the region of the biaxial compression and for the region of the compression-tension. For qualitative description of concrete behavior in case of complex loading, the considered model needs the subsequent modification, e. g. more precise definition of the Hardening Law.

References

1. Карпенко, Н. И. Общие модели механики железобетона [Text] / Н. И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с. – ISBN 5-274-01682-0.
2. Корсун, В. И. Напряженно-деформированное состояние железобетонных конструкций в условиях температурных воздействий [Text] / В. И. Корсун. – Макеевка: ДонГАСА, 2004. – 153 с. – ISBN 966-7477-38-X.
3. Круглов, В. М. Основные физические соотношения для бетона в плоском напряженном состоянии [Text] / В. М. Круглов, А. И. Козачевский // Сопроотивление материалов и теория сооружений. – К.: Будівельник, 1989. – Вып. 55. – С. 71–77.
4. Клованич, С. Ф. Метод конечных элементов в механике железобетона [Text] / С. Ф. Клованич, И. Н. Мироненко. – Одесса: [б. и.], 2007. – 111 с. – ISBN 966-7716-50-3.
5. Агапов, В. П. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций [Text] / В. П. Агапов. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2004. – 248 с. – ISBN 5-93093-303-0.
6. Hsieh, S. S. A plastic-fracture model for concrete [Text] / S. S. Hsieh, E. C. Ting, W. F. Chen // *Solid Structures*. – 1982. – Vol. 18, No 3. – P. 181–197.
7. A plastic-damage model for concrete [Text] / J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, E. Onate // *Solid Structures*. – 1989. – Vol. 25, No 3. – P. 299–326.
8. Grassl, P. Concrete in compression: a plasticity theory with a novel hardening law [Text] / P. Grassl, K. Lundern, K. Gyltoft // *Solid Structures*. – 2002. – Vol. 39. – P. 5205–5223.
9. Marcal, P. V. Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method [Text] / P. V. Marcal, I. P. King // *Int. J. Mech. Sci.* – 1967. – Vol 9. – P. 143–155.
10. Owen, D. R. J. Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading [Text] / D. R. J. Owen, J. A. Figyeiras, F. Damjanic // *Computer methods in applied mechanics and engineering*. – 1983. – Vol. 41. – P. 323–366.
11. Willam, K. J. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete [Text] / K. J. Willam, E. P. Warnke // *Int. Assoc. Bridge. Struct. Eng. Proc.* – 1974. – Vol. 19. – P. 1–31.

References

1. Karpenko, N. Common Models of Reinforced Concrete Mechanics. Moscow: Stroyizdat, 1996. 416 p. ISBN 5-274-01682-0. (in Russian)
2. Korsun, V. Stressed-Strained State of Reinforced Concrete Structures in Conditions of Temperature Effects. Makeyevka: DonSACEA, 2004. 153 p. ISBN 966-7477-38-X. (in Russian)
3. Kruglov, V.; Kozachevsky, A. Principal Physical Relations of Concrete in Plane Stress State. In: *Strength of Materials and Theory of Structures*. Kyiv: Budivelnik, 1989. Issue 55, p. 71–77. (in Russian)
4. Klovaniich, S.; Mironenko, I. Method of Finite Elements in Reinforced Concrete Mechanics. Odessa, 2007. 111 p. ISBN 966-7716-50-3. (in Russian)
5. Agapov, V. Method of Finite Elements in Statics, Dynamics and Structural Stability. Moscow: Publishing House of Civil Engineering Institutions Association, 2004. 248 p. ISBN 5-93093-303-0. (in Russian)
6. Hsieh, S. S.; Ting, E. C.; Chen, W. F. A plastic-fracture model for concrete. In: *Solid Structures*, 1982, Vol. 18, No. 3, p. 181–197.
7. Lubliner, J.; Oliver, J.; Oller, S.; Onate, E. A plastic-damage model for concrete. In: *Solid Structures*, 1989, Vol. 25, No 3, p. 299–326
8. Grassl, P.; Lundern, K.; Gyltoft, K. Concrete in compression: a plasticity theory with a novel hardening law. In: *Solid Structures*, 2002, Vol. 39, p. 5205–5223.
9. Marcal, P. V.; King, I. P. Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method. In: *Int. J. Mech. Sci.*, 1967, Vol. 9, p. 143–155.
10. Owen, D. R. J.; Figyeiras, J. A.; Damjanic, F. Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1983, Vol. 41, p. 323–366.
11. Willam, K. J.; Warnke, E. P. Constitutive model for the triaxial behavior of concrete. In: *Int. Assoc. Bridge. Struct. Eng. Proc.*, 1974, Vol. 19, p. 1–31.
12. Kupfer, H. Das Verhalten des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung. In: *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universitat, Dresden*, 1968, heft 6, p. 1515–1523.

12. Kupfer, H. Das Verhalten des Betons unter zweiachsiger Beanspruchung [Text] / H. Kupfer // Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universität. – Dresden, 1968. – Helt 6. – S. 1515–1523.
13. Liu, T. C. Y. Stress-Strain Response of Concrete in Uniaxial and Biaxial Compression [Text] / N. C. Y. Liu, A. H. Nilson, F. O. Slate // *ACI Journal*. – 1972. – No. 69. – P. 291–295.
14. Яшин, А. В. Критерии прочности и деформирования бетона при простом нагружении для различных видов напряженного состояния [Text] / А. В. Яшин // Расчет и конструирование железобетонных конструкций / [под ред. А. А. Гвоздева]. – М., 1977. – Вып. 39. – С. 48–57.
15. Бамбура, А. Н. Экспериментальное исследование закономерности деформирования бетона при двухосном сжатии [Text] / А. Н. Бамбура, А. И. Давиденко // Строительные конструкции. – К., 1989. – Вып. 44. – С. 95–100.
13. Liu, T.C.Y.; Nilson, A. H.; Slate, F. O. Stress-Strained Response of Concrete in Uniaxial and Biaxial Compression. In: *ACI Journal*, 1972, No. 69, p. 291–295.
14. Yashin, A. V. Strength Criteria and Concrete Deformation at Proportional Loading for Various Types of Stressed States. In: *Design and Construction of Reinforced Structures* / edited by Gvozdev, A. A. Moscow, 1977, Issue 39, p. 48–57. (in Russian)
15. Bambura, A. N.; Davidenko, A. I. Experimental Investigation of Regularity of Concrete Deformation at Biaxial Compression. In: *Building Structures*, 1989, Issue 44, p. 95–100. (in Russian)

Левін Віктор Матвійович – доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої і прикладної математики та інформатики Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: механіка деформованого твердого тіла, чисельні методи у МДТТ; розрахунок просторових конструкцій з армованого пружнов'язкопластичного матеріалу.

Шабельник Сергій Вячеславович – аспірант кафедри залізобетонних конструкцій Донбаської національної академії будівництва і архітектури. Наукові інтереси: застосування теорії течії для опису деформівних властивостей бетону; наукові основи методів оцінки технічного стану та проектування залізобетонних конструкцій.

Левин Виктор Матвеевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики и информатики Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: механика деформируемого твердого тела; численные методы в МДТТ; расчет пространственных конструкций из армированного упруговязкопластического материала.

Шабельник Сергей Вячеславович – аспирант кафедры железобетонных конструкций Донбасской национальной академии строительства и архитектуры. Научные интересы: применение теории течения для описания деформативных свойств бетона; научные основы методов оценки технического состояния и проектирования железобетонных конструкций.

Levin Victor – D.Sc. (Engineering), Professor, the Head of the Higher and Applied Mathematics and Computer Science Department of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Research interests: mechanics of a deformable firm body; numerical methods in mechanics of a deformable firm body; design of three dimensional structures made of reinforced elastoviscoplastic material.

Shabelnik Sergey – postgraduate of the Reinforced Concrete Constructions Department of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture. Research interests: application of the flow theory for description of deformation properties of concrete. Scientific basis of estimation methods of the technical state and reinforced concrete constructions design.

