Получены зависимости геометрических размеров прессовой оснастки и высоты рабочего пространства используемых прессов от свойств порошков, значений пористости и размеров заготовок, давления прессования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Портной К. И. Дисперсно-упрочненные материалы / К. И. Портной, Б. Н. Бабич.– М.: Металлургия, 1974. – 200 с.
2. Скрябин С. А. Изготовление поковок из алюминиевых сплавов горячим деформированием / С. А. Скрябин. – Киев: КВІЦ, 2004. – 346 с.: ***ил***.
3. Новокраматорский машиностроительный завод ***[Электронный ресурс]***: сайт компании. – ***Режим доступа:*** www.nkmz.com/index.php. – Название с титул. экрана.

Надійшла до редколегії 19.09.2013

УДК 629.764

П. А. Гайдученко

Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО МАССЕ ПАРАМЕТРОВ РАБОТАЮЩЕГО НА СЖАТИЕ СФЕРИЧЕСКОГО ДНИЩА

У статті отримано аналітичне розв'язання задачі вибору параметрів сферичного гладкого днища мінімальної маси. Результат подано у вигляді простого алгоритму, адаптованого до практичних проектувальних розрахунків.

Ключові слова: *оптимальне проектування несучих конструкцій, ракетно-космічні системи, мінімум маси.*

В статье получено аналитическое решение задачи выбора параметров сферического гладкого днища минимальной массы. Результат представлен в виде простого алгоритма, адаптированного к практическим проектировочным расчетам.

Ключевые слова: *оптимальное проектирование, несущая конструкция, ракетно-космические системы, минимум массы.*

In paper the analytical solution of a problem of sampling of parameters of the spherical smooth bottom of minimum mass is gained. The result is presented in the form of the simple algorithm adapted for practical designing calculations.

Keywords: *optimal design, a bearing structure, space-rocket systems, a mass minimum.*

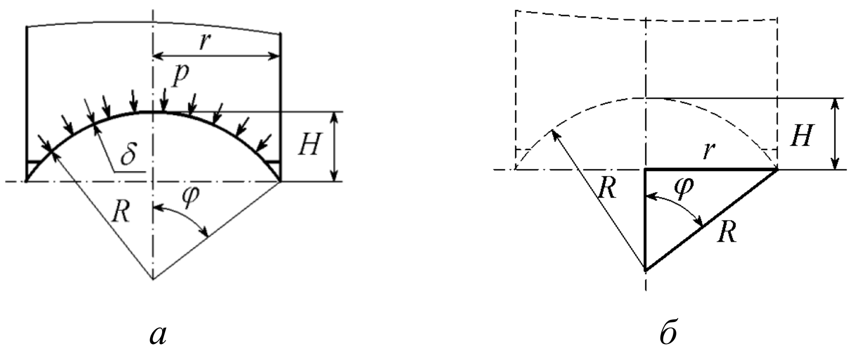
Введение

Радиус сферических днищ топливных баков выбирается, исходя из двух противоречивых требований: минимальной должна быть масса и максимально плотной компоновка. Хорошо известны практические рекомендации по выбору радиусов днищ: радиус верхнего днища в 1,4,…,1,5 раза должен превышать радиус его основания (для цилиндрических топливных баков радиус основания – это радиус бака); радиус нижнего днища должен быть больше радиуса бака в 1,2,…,1,3 раза [1]. При этом не оговаривается, какое именно значение из приведенных диапазонов выбирать в зависимости от радиуса бака, действующего давления, конструкционного материала, условий работы днища (растяжения или сжатия) и т.п.

В настоящей статье в аналитическом виде решена задача минимизации массы гладкого сферического днища, нагруженного внешним избыточным давлением. В результате анализа полученного решения предложена простая инженерная методика определения параметров днища минимальной массы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим вогнутое сферическое днище цилиндрического топливного бака, нагруженное внешним избыточным давлением (см. схему на рис. 1,*а*). Расчетное значение давления p и радиус цилиндрической части бака r будем считать известными.



а *б*

Рис. 1. Расчетная схема днища

Примем следующие допущения.

1. Ограничимся случаем, когда оболочка днища является неподкрепленной.

2. В массе днища будет учитываться масса сферической оболочки и масса шпангоута.

3. Расчет оболочки днища на прочность будет выполняться по безмоментной теории.

4. Масса оболочки днища будет определяться по расчетному значению толщины.

5. Площадь шпангоута (а, соответственно, и его масса) будет определяться по приближенной зависимости, не учитывающей влияние присоединенных оболочек.

6. Оболочка днища и шпангоут изготовлены из одного и того же конструкционного материала.

Задача заключается в том, чтобы определить параметры днища минимальной массы.

2. Математическая модель

2.1. Формулировка оптимизационной задачи

Решение в аналитическом виде будет найти проще, если в качестве одного из проектных параметров использовать не радиус днища *R*, а угол полураствора сферической оболочки φ; вторым проектным параметром будет толщина сферической оболочки δ (см. рис. 1,*а*).

Масса оболочки днища

$$M_{\text{об}} = 2\pi RH\delta\rho ,$$

где R и H – соответственно радиус и высота. Радиус и высота днища могут быть выражены через угол полураствора сферической оболочки φ (см. рис. 1,*б*):

$$R = \frac{r}{\sin\varphi}; \quad H = R - R\cos\varphi = R\cdot(1-\cos\varphi) = \frac{r}{\sin\varphi}(1-\cos\varphi) .$$

Масса оболочки днища как функция проектных параметров:

$$M_{\text{об}} = 2\pi r^2\rho\frac{\delta}{1+\cos\varphi} .$$

Площадь шпангоута, устанавливаемого в месте сопряжения сферической и цилиндрической оболочек, приближенно может быть оценена по зависимости [1]:

$$S_{\text{шп}} = \frac{pr^2}{2[\sigma_{\text{шп}}]}\frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi},$$

где $[\sigma_{\text{шп}}]$ – допустимые напряжения; поскольку шпангоут растягивается, то $[\sigma_{\text{шп}}] = \sigma_{\text{в}}$, $\sigma_{\text{в}}$ – предел прочности конструкционного материала шпангоута.

Масса шпангоута:

$$M_{\text{шп}} = 2\pi r S_{\text{шп}}\rho = \frac{\pi p r^3}{\sigma_{\text{в}}}\rho\,\mathrm{ctg}\,\varphi .$$

Масса днища, состоящая из массы оболочки и массы шпангоута:

$$M_{\text{дн}} = M_{\text{об}} + M_{\text{шп}} = 2\pi r^2 \rho \frac{\delta}{1 + \mathbf{cos}\,\varphi} + \frac{\pi p r^3}{\sigma_{\text{в}}} \rho\, \mathbf{ctg}\,\varphi .$$

После сокращение на $\pi r^2 \rho$ получаем выражение для целевой функции:

$$f\,(\varphi, \delta) = 2 \frac{\delta}{1 + \mathbf{cos}\,\varphi} + \frac{pr}{\sigma_{\text{В}}} \mathbf{ctg}\,\varphi .$$

Ограничения по прочности и устойчивости оболочки, имеющие вид [2]:

$$\sigma = \frac{pR}{2\delta} \leq \sigma$$

и

$$p_{\text{кр}} = kE \frac{\delta^2}{R^2} \geq p$$

после элементарных преобразований можно объединить в одно:

$$\delta \geq cR , \tag{1}$$

где $c = \mathbf{max}\left(\frac{p}{2\ \sigma}, \sqrt{\frac{p}{kE}} \right)$. Здесь σ – допустимые напряжения для оболочки, E – модуль упругости, k – коэффициент устойчивости. С учетом зависимости, связывающей радиус днища R с углом полураствора сферической оболочки, «комбинированное» ограничение (1) будет иметь вид:

$$\delta \geq \frac{cr}{\mathbf{sin}\,\varphi} .$$

Дополнительные ограничения оговаривают область изменения каждого из проектных параметров в отдельности: угол полураствора оболочки днища не может превышать $\frac{\pi}{2}$, а толщина оболочки не может быть меньше технологического минимума $\delta_{\text{Т}}$, т.е.

$$\varphi \leq \frac{\pi}{2},\ \delta \geq \delta_{\text{Т}} .$$

Окончательная формулировка оптимизационной задачи:

$$\begin{cases} 2\dfrac{\delta}{1+\mathbf{cos}\,\varphi}+\dfrac{pr}{\sigma_{\text{в}}}\mathbf{ctg}\,\varphi \to \mathbf{min}, \\ \delta \ge \dfrac{cr}{\mathbf{sin}\varphi}, \\ \varphi \le \dfrac{\pi}{2},\ \ \delta \ge \delta_{\text{Т}}. \end{cases} \tag{2}$$

2.2. Решение оптимизационной задачи

При поиске решения оптимизационной задачи (2) технологические ограничения на толщину оболочки днища временно учитываться не будут. Случай, когда расчетное значение толщины получается меньше технологического минимума, будет рассмотрен особо.

Одним из методов аналитического решения оптимизационных задач с ограничениями-неравенствами является обобщенный метод множителей Лагранжа.

Суть обобщенного метода множителей Лагранжа. Как известно, решение оптимизационной задачи с ограничениями-неравенствами (оптимум) может:

- совпадать с экстремумом целевой функции. Для этого целевая функция должна иметь экстремум и для экстремума должны выполняться все ограничения оптимизационной задачи. (Говорят, что экстремум должен принадлежать области допустимых решений. Область допустимых решений (ОДР) – это множество комбинаций проектных параметров, для которых выполняются все ограничения оптимизационной задачи);
- находиться на границе ОДР и представлять собой условный экстремум целевой функции при выполнении одного из ограничений-неравенств как равенства;
- находиться в граничной точке ОДР, в которой несколько ограничений-неравенств одновременно выполняются как равенства (оптимум в этом случае не будет являться ни экстремумом, ни условным экстремумом).

В обобщенном методе множителей Лагранжа решение оптимизационной задачи с ограничениями-неравенствами сводится к последовательному решению нескольких вспомогательных задач трех типов: исследования функции на экстремум, исследования функции на условный экстремум и решения системы уравнений. Найденные решения вспомогательных задач проверяются на предмет принадлежности ОДР. Те из них, которые принадлежат ОДР, сравниваются между собой и из них выбирается то решение, для которого целевая функция получится минимальной. Это и будет решением исходной оптимизационной задачи.

Решение задачи (2) обобщенным методом множителей Лагранжа сводится к последовательному решению следующих вспомогательных задач.

Вспомогательная задача 1. Поиск экстремума целевой функции:

$$2\frac{\delta}{1+\mathbf{cos}\,\varphi}+\frac{pr}{\sigma_{\text{В}}}\mathbf{ctg}\,\varphi \to \mathbf{min}\,.$$

Необходимое условие экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\delta} f\,(\varphi,\delta)=\dfrac{2}{1+\mathbf{cos}\,\varphi}=0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\varphi} f\,(\varphi,\delta)=2\delta\dfrac{-\mathbf{sin}\,\varphi}{(1+\mathbf{cos}\,\varphi)^2}-\dfrac{pr}{\sigma_{\text{В}}}\cdot\dfrac{1}{\mathbf{sin}^2\,\varphi}=0. \end{cases} \tag{3}$$

Тождество, заданное первым уравнением системы (3), не выполняется ни при каком значении угла φ. Следовательно, полученная система решений не имеет. Это означает, что экстремума у целевой функции нет.

Вспомогательная задача 2. Исследование функции на условный экстремум:

$$\begin{cases} 2\dfrac{\delta}{1+\mathbf{cos}\,\varphi}+\dfrac{pr}{\sigma_{\text{В}}}\mathbf{ctg}\,\varphi \to \mathbf{min} \\ \delta=\dfrac{cr}{\mathbf{sin}\,\varphi}. \end{cases}$$

Эту задачу проще решать методом подстановки. С помощью ограничения-равенства избавиться от одного из аргументов целевой функции:

$$2\frac{\delta}{1+\mathbf{cos}\,\varphi}+\frac{pr}{\sigma_{\text{в}}}\mathbf{ctg}\,\varphi=2\frac{cr}{\mathbf{sin}\varphi}\cdot\frac{1}{1+\mathbf{cos}\,\varphi}+\frac{pr}{\sigma_{\text{в}}}\mathbf{ctg}\,\varphi.$$

Сократив оба слагаемых на r и введя обозначения $b=\dfrac{p}{\sigma_{\text{В}}}$, получим следующее выражение для новой целевой функции, зависящей только от угла φ:

$$f_1(\varphi)=2c\cdot\frac{1}{\mathbf{sin}\,\varphi(1+\mathbf{cos}\,\varphi)}+b\cdot\mathbf{ctg}\,\varphi\,.$$

Необходимое условие экстремума функции $f_1(\varphi)$ – производная первого порядка

$$\frac{d}{d\varphi}f_1(\varphi)=-2c\frac{\mathbf{cos}\,\varphi(1+\mathbf{cos}\,\varphi)-\mathbf{sin}^2\,\varphi}{\mathbf{sin}^2\,\varphi(1+\mathbf{cos}\,\varphi)^2}-b\frac{1}{\mathbf{sin}^2\,\varphi}$$

должна равняться 0. Уравнение

$$\frac{d}{d\varphi} f_1(\varphi) = 0$$

имеет одно решение:

$$\varphi_* = \arccos \frac{2c - b}{4c + b}. \qquad (4)$$

Проверка достаточного условия экстремума приводит к следующему результату:

$$\left. \frac{d^2}{d\varphi^2} f_1(\varphi) \right|_{\varphi=\varphi_*} > 0.$$

Это означает, что φ_* является минимумом.

Осталось проверить, что для φ_* выполняется дополнительное ограничение оптимизационной задачи (2):

$$\varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

Учитывая, что в первом квадранте косинус – монотонно убывающая функция своего аргумента, последнее неравенство можно переписать в виде:

$$\cos \varphi_* \ge 0.$$

С учетом (4), получим

$$\frac{2c - b}{4c + b} \ge 0. \qquad (5)$$

Поскольку c и b не могут быть отрицательными, неравенство (5) будет выполняться только, если

$$2c - b \ge 0$$

или

$$\frac{2c}{b} \ge 1.$$

Подставив вместо коэффициентов c и b выражения, согласно которым они определяются:

$$\frac{2\max\left(\sqrt{\frac{p}{kE}},\frac{p}{2\ \sigma}\right)}{\frac{p}{\sigma_{\text{В}}}}\geq 1$$

и, разделив аргументы функции $\max$ на знаменатель, получим

$$\max\left(2\sigma_{\text{В}}\frac{1}{\sqrt{kpE}},\frac{\sigma_{\text{В}}}{\sigma}\right)\geq 1. \tag{6}$$

Так как допустимые напряжения σ не могут превышать предела прочности $\sigma_{\text{В}}$, то очевидно, что неравенство (6) всегда выполняется. Следовательно, найденный условный экстремум (4) принадлежит ОДР.

Толщина оболочки днища при значении угла полураствора оболочки $\varphi=\varphi_*$:

$$\delta_*=\frac{cr}{\sin\varphi_*}=\frac{cr}{\sqrt{1-\cos^2\varphi_*}}=\frac{cr}{2}\cdot\frac{4c+b}{\sqrt{3c(c+b)}}. \tag{7}$$

Вспомогательная задача 3. Проверка граничных точек ОДР, в которых ограничения-неравенства одновременно выполняются как равенства.

В задаче (2) эта точка одна (технологическое ограничение на толщину будет учитываться отдельно). Эта точка является результатом пересечения линии «комбинированного» ограничения по прочности/устойчивости:

$$\delta=\frac{cr}{\sin\varphi} \tag{8}$$

и прямой дополнительного ограничения на значение угла φ:

$$\varphi=\frac{\pi}{2}. \tag{9}$$

Однако, если на линии ограничения (8) находится условный экстремум и этот условный экстремум принадлежит ОДР, то никакая другая точка, принадлежащая этой же линии, не может иметь меньшее значение целевой функции. Следовательно, решение оптимизационной задачи (2) не находится в рассматриваемой граничной точке.

Сравнение результатов решения вспомогательных задач. Таким образом, если не учитывать технологические ограничения на толщину оболочки днища, то оптимум находится на границе ОДР и представляет собой условный экстремум, найденный при условии, что одно из ограничений-неравенств (то ли по прочности, то ли по устойчивости) будет выполняться как равенство. Оптимальные значения угла полураствора и толщины оболочки днища определяются из соотношений (4) и (7).

На рис. 2 приведена геометрическая иллюстрация двух возможных вариантов ОДР оптимизационной задачи (2) для случая, когда оптимальное значение толщины не превосходит технологического минимума. На этих рисунках по оси абсцисс откладывались не значения угла φ, а функция, обратная синусу этого угла – так проще показать границы ОДР, образованные условиями прочности и устойчивости. В такой системе координат обе границы будут представлять собой прямые вида

$$\delta = c_i r \cdot \frac{1}{\sin\varphi}, \; i = 1, 2,$$

где $c_1 = \dfrac{p}{2\sigma}$, $c_2 = \sqrt{\dfrac{p}{kE}}$.

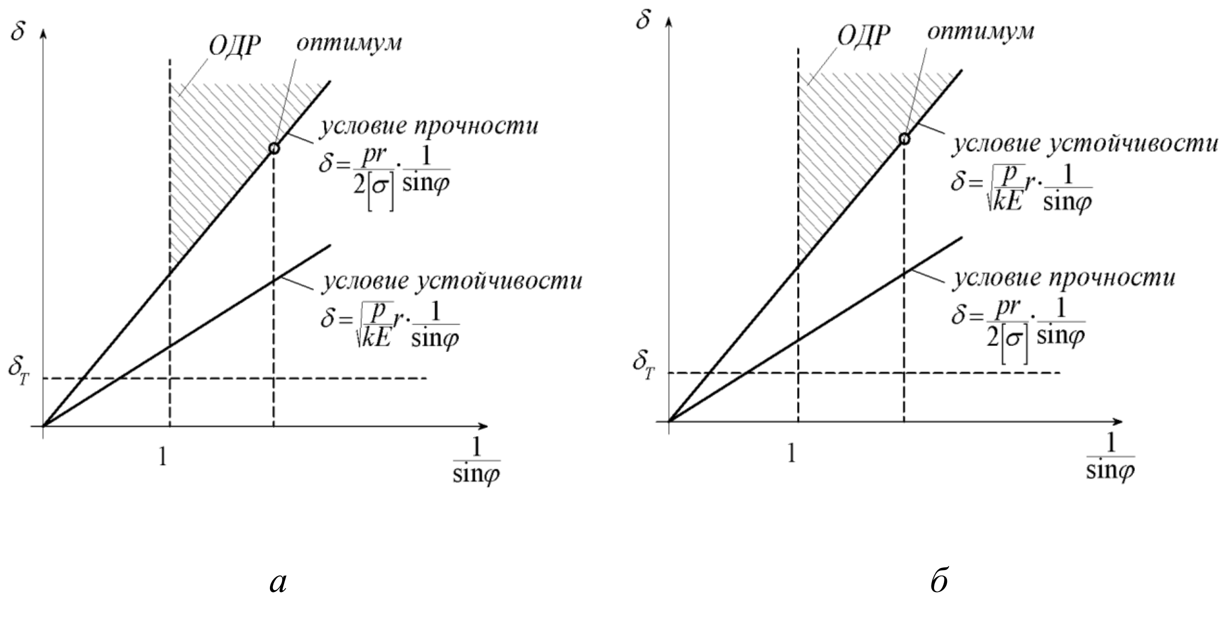


Рис. 2. Возможные варианты ОДР оптимизационной задачи для случая, когда расчетное значение толщины превышает технологический минимум

Граница ОДР, образованная вертикальной прямой $\dfrac{1}{\sin\varphi} = 1$, соответствует углу полураствора $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

2.3. Учет технологических ограничений на толщину оболочки

Если оптимальное значение толщины (7) получится меньше технологического минимума, то для нахождения оптимума в задаче (2) следует рассмотреть еще две вспомогательные задачи. Первая из них – задача исследования функции на условный экстремум:

$$\begin{cases} 2\dfrac{\delta}{1+\mathbf{cos}\,\varphi} + \dfrac{pr}{\sigma_{\text{в}}}\mathbf{ctg}\,\varphi \to \mathbf{min}, \\ \delta = \delta_{\text{Т}} \end{cases}$$

сводится к поиску минимума $\mathbf{ctg}\,\varphi$. Котангенс является монотонно убывающей функцией во всей области своего определения. Соответственно, минимумов у этой функции нет.

Вторая вспомогательная задача заключается в решении системы уравнений, полученных из ограничений-неравенств задачи (2):

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{cr}{\mathbf{sin}\varphi}, \\ \delta = \delta_{\text{Т}}. \end{cases}$$

Решение этой системы тривиально:

$$\delta = \delta_{\text{Т}},\ \varphi = \mathbf{arcsin}\left(\frac{cr}{\delta_{\text{Т}}}\right). \quad (10)$$

Это и будет искомым оптимумом, т.е. решением задачи (2), в случае, если значение толщины, найденное с помощью соотношения (7), получится меньше технологического минимума.

Геометрическая иллюстрация ОДР для этой ситуации показана на рис. 3.

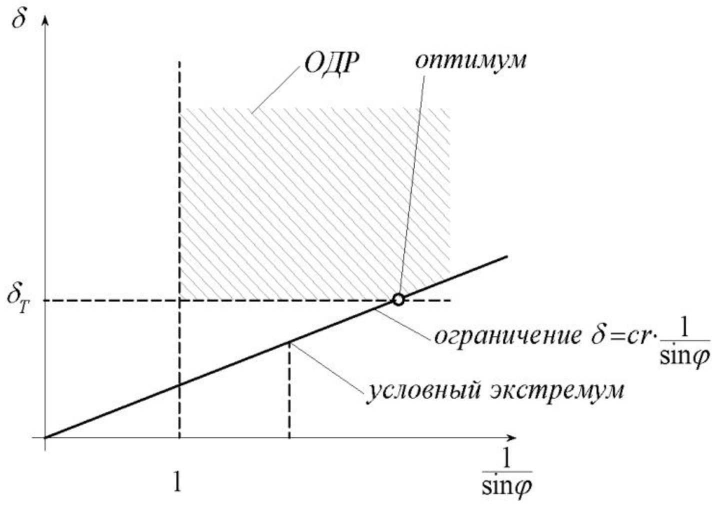


Рис. 3. ОДР оптимизационной задачи для случая, когда расчетное значение толщины меньше технологического минимума

2.4. Исследование возможности снижения массы днища за счет превышения действующими напряжениями предела пропорциональности

Превышение действующими в оболочке днища напряжениями предела пропорциональности конструкционного материала δ_{Π} будет приводить к снижению массы оболочки только, если при $[\sigma] = \sigma_{\Pi}$ ОДР имеет вид, показанный на рис. 2,*а*, т.е. ограничение по устойчивости является избыточным – оно заведомо выполняется при выполнении ограничения по прочности. Механизм снижения массы днища можно объяснить, исходя из приведенной на рис. 2,*а* иллюстрации. При увеличении допустимых напряжений угловой коэффициент прямой, соответствующей условию прочности, будет уменьшаться. В упруго-пластической области угловой коэффициент прямой, соответствующей условию устойчивости, из-за уменьшения модуля упругости, наоборот, будет увеличиваться. При некотором значении напряжений $\sigma_* > \sigma_{\Pi}$ прямые, соответствующие условиям прочности и устойчивости, совпадут. Оболочка в этом случае получится равнопрочной: действующие в ней напряжения совпадут с расчетными напряжениями по прочности и напряжениями потери устойчивости. Равнопрочная оболочка будет иметь минимально возможную в данной ситуации массу.

Чтобы получить формальное правило, позволяющее судить, какой из вариантов ОДР имеет место для конкретных исходных данных – показанный на рис. 2,*а* или 2,*б* – достаточно сравнить угловые коэффициенты при прямых, соответствующих условиям прочности и устойчивости. Так, если

$$\frac{pr}{2\sigma_{\Pi}} > r\sqrt{\frac{p}{kE}}, \tag{11}$$

то ОДР имеет форму, показанную на рис. 2,*а*. В этом случае возможно снижение массы оболочки днища в результате повышения значения действующих напряжений сверх предела пропорциональности.

В противном случае – если неравенство (11) не выполняется – ОДР имеет форму, показанную на рис. 2,*б*. Для таких исходных данных равнопрочную оболочку получить невозможно – ограничение по прочности всегда будет избыточным. Соответственно, нет смысла допускать работу материала оболочки днища в упруго-пластической области – это приведет только к увеличению массы за счет снижения критических напряжений потери устойчивости из-за снижения значения модуля упругости в упруго-пластической области.

Для удобства проверки неравенство (11) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\frac{2\sigma_{\Pi}}{\sqrt{kpE}} < 1. \tag{12}$$

Угол полураствора и толщина равнопрочной оболочки днища будут зависеть от действующих напряжений σ_* ($\sigma_{\text{П}} < \sigma_* < \sigma_{\text{Т}}$, где $\sigma_{\text{Т}}$ – предел текучести конструкционного материала). Найдем эти напряжения. Для этого снова воспользуемся геометрической иллюстрацией ОДР оптимизационной задачи (2) (рис. 2,*а*).

Границы ОДР, соответствующие условиям прочности и устойчивости, совпадут, если будут равны угловые коэффициенты прямых, задающих эти границы, т.е. $c_1 r$ и $c_2 r$:

$$\frac{p}{2\sigma_*} r = r\sqrt{\frac{p}{kE}}. \tag{13}$$

После несложных преобразований из (13) получается соотношение, связывающее напряжения σ_* и модуль упругости E:

$$\sigma_* = \frac{1}{2}\sqrt{kp}\sqrt{E(\sigma_*)}.$$

Известно, что модуль упругости E в упруго-пластической области является некоторой функцией действующих напряжений [3, 4]. В общем случае решение последнего уравнения может быть найдено только численно. Однако, если зависимость модуля упругости от действующих напряжений σ аппроксимировать соотношением вида [5]:

$$E_\tau(\sigma) = \frac{(\sigma_{\text{Т}} - \sigma)\sigma}{(\sigma_{\text{Т}} - \sigma_{\text{П}})\sigma_{\text{П}}} E = \alpha(\sigma_{\text{Т}} - \sigma)\sigma, \;\; \sigma \geq \sigma_{\text{П}}, \tag{14}$$

где с помощью $E_\tau(\sigma)$ обозначен касательный модуль упругости; $\alpha = \dfrac{E}{(\sigma_{\text{Т}} - \sigma_{\text{П}})\sigma_{\text{П}}}$.

После ряда преобразований можно получить конечное выражение для определения напряжений σ_*:

$$\sigma_* = \frac{\sigma_{\text{Т}}}{\dfrac{4}{kp\alpha} + 1}. \tag{15}$$

Зная напряжения σ_*, можно найти оптимальные значения угла полураствора и толщины оболочки днища φ_* и δ_* соответственно:

$$\varphi_* = \arccos\frac{2c - b}{4c + b}, \tag{16}$$

$$\delta_* = \frac{p}{2\sigma_*} r\,, \tag{17}$$

где

$$c = \frac{p}{2\sigma_*}\,. \tag{18}$$

3. Инженерная методика определения параметров днища минимальной массы

Подытожим результат решения оптимизационной задачи (2) в форме простого алгоритма выбора параметров днища минимальной массы.

Случай 1. Действующие в оболочке днища напряжения не могут превышать предела пропорциональности.

Шаг 1. Принять, что действующие напряжения равны пределу пропорциональности:

$$\sigma = \sigma_{\text{П}}\,.$$

Шаг 2. Найти коэффициент c:

$$c = \mathbf{max}\left(\frac{p}{2\sigma}, \sqrt{\frac{p}{kE}}\right).$$

Шаг 3. Найти оптимальное значение угла полураствора оболочки днища:

$$\varphi_* = \mathbf{arccos}\frac{2c - b}{4c + b}, \tag{19}$$

где $b = \dfrac{p}{\sigma_{\text{В}}}$.

Шаг 4. Найти оптимальное значение толщины оболочки днища:

$$\delta_* = \frac{cr}{2}\frac{4c + b}{\sqrt{3(c^2 + cb)}} \text{ или } \delta_* = \frac{cr}{\mathbf{sin}\,\varphi_*}\,. \tag{20}$$

Шаг 5. Сравнить δ_* с технологическим минимумом $\delta_{\text{Т}}$. Если $\delta_* \geq \delta_{\text{Т}}$, то параметры днища минимальной массы определяются из соотношений (19) и (20). В противном случае – если $\delta_* < \delta_{\text{Т}}$, то минимум массы днища будет достигаться при значении толщины, равной технологическому минимуму:

$$\delta_* = \delta_{\text{Т}}$$

и угле полураствора днища, найденном из соотношения:

$$\varphi_* = \mathbf{arcsin}\left(\frac{cr}{\delta_{\text{Т}}}\right).$$

Случай 2. Допустимо, чтобы действующие в оболочке днища напряжения находились в упруго-пластической области.

Проверить выполнение условия

$$\frac{2\sigma_{\text{П}}}{\sqrt{kEp}} \geq 1. \tag{21}$$

Если неравенство (21) *верно*, то превышение действующими напряжениями предела пропорциональности к снижению массы днища приводить не будет. Соответственно, параметры днища минимальной массы должны определяться по алгоритму, приведенному для случая 1.

Если неравенство (21) *не выполняется*, то параметры днища минимальной массы определяются по соотношениям (15)–(18).

Примечание. Ситуация, когда действующие в оболочке днища напряжения превышают предел пропорциональности, а толщина оболочки получается меньше технологического минимума, здесь не рассмотрена, как не имеющая особого практического интереса. (Математическое моделирование показало, что, например, для днища из алюминиевого сплава такой случай реализуется при значениях радиуса, равных нескольким сантиметрам, и значениях давления, равных нескольким десяткам атмосфер.)

4. Примеры расчета

Пример 1. Исходные данные: радиус основания днища $r = 0{,}75$ м, давление $p = 0{,}7$ МПа, конструкционный материал – сплав АМг6М (предел пропорциональности $\sigma_{\text{П}} = 120$ МПа, предел текучести $\sigma_{\text{Т}} = 160$ МПа, предел прочности $\sigma_{\text{В}} = 320$ МПа, модуль упругости $E = 6{,}8 \cdot 10^4$ МПа, плотность $\rho =$ 2640 кг/м^3). Технологический минимум толщины составляет 1 мм.

Коэффициент устойчивости сжатой равномерно распределенным давлением сферической оболочки примем по статистике: $k = 0{,}25$.

Сразу же проверяем условие (21):

$$\frac{2\sigma_{\text{П}}}{\sqrt{kEp}} = 2{,}2 \geq 1.$$

Неравенство верно; поэтому для снижения массы днища нет смысла допускать превышение действующими напряжениями предела пропорциональности. Примем действующие напряжения равными пределу пропорциональности:

$$\sigma = \sigma_{\text{П}} = 120 \text{ МПа}.$$

Коэффициент $c = \mathbf{max}\left(\dfrac{p}{2\sigma}, \sqrt{\dfrac{p}{kE}}\right) = \mathbf{max(}2{,}92\cdot 10^{-3}\mathbf{,}\ 6{,}42\cdot 10^{-3}\mathbf{)} = 6{,}42\cdot 10^{-3}$.

Коэффициент $b = \dfrac{p}{\sigma_{\text{В}}} = 2{,}2\cdot 10^{-3}$.

Оптимальное значение угла полураствора:

$$\varphi_* = \mathbf{arccos}\frac{2c-b}{4c+b} = 67{,}5^{\circ}$$

(отношение радиуса днища к радиусу его основания составляет 1,09).

Оптимальная толщина оболочки днища

$$\delta_* = \frac{cr}{\mathbf{sin}\,\varphi_*} = 5{,}2 \text{ мм.}$$

Полученная толщина оболочки превышает технологический минимум. Следовательно, параметры оболочки минимальной массы найдены. Масса днища:

$$M_{\text{дн}} = \pi r^2 \rho\left(2\frac{\delta_*}{1+\mathbf{cos}\,\varphi_*} + \frac{pr}{\sigma_{\text{в}}}\mathbf{ctg}\,\varphi_*\right) = 38{,}3 \text{ кг.}$$

Пример 2. Исходные данные: радиус основания днища $r = 0{,}35$ м, расчетное значение давления $p = 5$ МПа, конструкционный материал тот же, что для первого примера. Неравенство (21) не выполняется, т.к.

$$\frac{2\sigma_{\text{П}}}{\sqrt{kEp}} = 0{,}823 < 1.$$

Следовательно, если допускается работа материала оболочки днища в упруго-пластической области, то параметры днища минимальной массы будут определяться следующим образом:

– коэффициент $\alpha = \dfrac{E}{(\sigma_{\text{Т}} - \sigma_{\text{П}})\sigma_{\text{П}}} = 1{,}417\cdot 10^{-5}$ Па$^{-1}$;

– напряжения $\sigma_* \geq \sigma_{\text{П}}$, при которых масса днища получается минимальной:

$$\sigma_* = \frac{\sigma_{\text{Т}}}{\dfrac{4}{kp\alpha} + 1} = 130{,}5 \text{ МПа;}$$

– коэффициент c и оптимальный угол полураствора оболочки днища φ_*:

$$c = \frac{p}{2\sigma_*} = 0{,}019 \text{ и } \varphi_* = \mathbf{arccos}\frac{2c-b}{4c+b} \approx 76°;$$

– толщина оболочки днища:

$$\delta_* = \frac{cr}{\mathbf{sin}\,\varphi_*} = 6{,}9 \text{ мм.}$$

Масса днища получилась равной 12,7 кг. (Для сравнения: если ограничить действующие в оболочке днища напряжения пределом пропорциональности, то масса днища получается на 1 кг больше. Параметры днища минимальной массы в этом случае будут такими: угол полураствора $\varphi_* \approx 75°$, толщина оболочки $\delta_* = 7{,}6$ мм.)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ ССЫЛКИ

1. Основы конструирования ракет-носителей космических аппаратов: ***учебн. для студ. втузов*** / Б. В. Грабин, О. И. Давыдов, В. И. Жихарев и др.; ***под ред. В. П. Мишина***, ***В. К. Карраска***. – М.: Машиностроение, 1991. – 416 с.
2. Лизин В. Т. Проектирование тонкостенных конструкций / В. Т. Лизин, В. А. Пяткин. – М.: Машиностроение, 1985. – 344 с.
3. Горшков А. Г. Сопротивление материалов: ***учебн. пос. 2-е изд., испр.*** / А. Г. Горшков, В. Н. Трошин, В. И. Шалашилин. – М.: Физматлит, 2005. – 544 с.
4. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1967. – 552 с.
5. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций: ***пер. с англ***. / Ф. Блейх.– М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 544 с.

Надійшла до редколегії 3.09.2013