

УДК 629.764

В.В. Авдєєв

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ І ПОКАЗНИКИ СТАБІЛІЗАЦІЇ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ РАКЕТИ

Установлено зв'язок між похибками компенсації збурювального прискорення, тривалістю перехідного процесу, енергетичними витратами, вимогами до швидкодії виконавчого пристрою і коефіцієнтами критерію оптимальності, що знайшов використання у методі аналітичного конструювання регуляторів.

Ключові слова: критерій оптимальності, показники стабілізації, похибка компенсації, енергетичні витрати

Установлена связь между погрешностями компенсации возмущающего ускорения, продолжительностью переходного процесса, энергетическими затратами, требованиями к быстродействию исполнительного устройства и коэффициентами критерия оптимальности, которая используется в методе аналитического конструирования регуляторов.

Ключевые слова: критерий оптимальности, показатели стабилизации, погрешность компенсации, энергетические затраты

The relation between the error compensation of perturbing acceleration, duration of the transition process, energy costs, requirements to the speed of the actuator and the coefficients of the optimality criterion used in the method of analytical controllers design.

Keywords: optimality criterion, indicators of stabilization, the error compensation, energetics costs.

До основних показників системи стабілізації прийнято відносити коефіцієнти похибок, запас стійкості і швидкодію, яку кількісно можна оцінити тривалістю перехідного процесу. На початковому етапі розробки системи управління ракети космічного призначення (РКП) проводиться дослідження процесу стабілізації плоского обертального руху спираючись на найпростішу математичну модель без врахування інерційності виконавчого пристрою і ланок, обумовлених кінцевою пружністю корпусу та коливаннями вільної поверхні компонентів палива [1]. Для вибору закону регулювання знайшли використання різні методи, зокрема, модального і оптимального управління, частотних характеристик і передатних функцій [2 – 6]. Одним із напрямів теорії оптимального управління є метод аналітичного конструювання регуляторів [5], започаткований у роботах А.М. Лєтова. Труднощі при використанні цього методу полягають в необхідності розв'язку системи нелінійних алгебраїчних рівнянь, число яких набагато перевищує порядок системи, а також у виборі критерію для оптимізації.

Задача даної роботи – встановлення зв'язку між коефіцієнтами критерію: мінімум середнього значення суми квадратів координат вектору стану і

показниками стабілізації плоского обертального руху РКП: похибки компенсації збурювального прискорення, швидкодія та інші.

Один із варіантів моделі об'єкта управління у роботі [5] – це система n лінійних диференційних рівнянь першого порядку відносно координат вектора стану

$$\dot{x}_i + \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = m_i u, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

де величини a_{ik} та m_i задані. Управління u мінімізує функціонал

$$I(u) = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 + u^2 \right) \cdot dt \quad (2)$$

при умові, що задані коефіцієнти критерію (2) β_{ii} додатні. Оптимальне лінійне управління

$$u = - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_i \gamma_{ik} \right) \cdot x_k. \quad (3)$$

Коефіцієнти закону регулювання (3) $\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ визначаються системою із $n(n+1)/2$ нелінійних алгебраїчних рівнянь [5]

$$\sum_{p=1}^n (\gamma_{ip} \cdot a_{pk} + \gamma_{kp} \cdot a_{pi}) + \sum_{p=1}^n m_p \cdot \gamma_{pi} \cdot \sum_{p=1}^n m_p \cdot \gamma_{pk} = \beta_{ik}, \quad i, k = \overline{1, n}. \quad (4)$$

З використанням методу заморожених коефіцієнтів [3] найпростіша модель обертального руху РКП в одній із площин (рискання, тангажу чи крену) – це лінійне диференційне рівняння другого порядку ($n=2$). Для цього випадку коефіцієнти $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{22}$ закону регулювання (3), який забезпечує мінімум критерію (2), відповідно до (4) визначаються з трьох алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (\gamma_{11} \cdot a_{11} + \gamma_{12} \cdot a_{21}) + (m_1 \cdot \gamma_{11} + m_2 \cdot \gamma_{21})^2 &= \beta_{11}, \quad i=1, \quad k=1; \\ \gamma_{11} \cdot a_{12} + \gamma_{21} \cdot a_{11} + \gamma_{12} \cdot a_{22} + \gamma_{22} \cdot a_{21} + \\ + (m_1 \cdot \gamma_{11} + m_2 \cdot \gamma_{21}) \cdot (m_1 \cdot \gamma_{12} + m_2 \cdot \gamma_{22}) &= \beta_{12} = 0, \quad i=1, \quad k=2; \\ 2 \cdot (\gamma_{21} \cdot a_{12} + \gamma_{22} \cdot a_{22}) + (m_1 \cdot \gamma_{12} + m_2 \cdot \gamma_{22})^2 &= \beta_{22}, \quad i=2, \quad k=2. \end{aligned} \quad (5)$$

Коли об'єктом управління є обертальний рух РКП у площині рискання, то система рівнянь (1) матиме вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 - x_2 &= 0, \\ \dot{x}_2 - a'_{\psi\psi} x_2 - a_{\psi\psi} x_1 &= a_{\psi\delta} u, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

де $x_1 = \psi$ – кут рискання; $x_2 = \dot{\psi}$ – кутова швидкість рискання; $u = \delta$ – кут повороту руля курсу; приймаючи до уваги (6) визначаємо коефіцієнти, що входять в (1, 5):

$$a_{11} = 0, \quad a_{12} = -1, \quad m_1 = 0, \quad a_{21} = -a_{\psi\psi}, \quad a_{22} = -a'_{\psi\psi}, \quad m_2 = a_{\psi\delta}. \quad (7)$$

Виражений через величини $\psi, \dot{\psi}, \delta$ критерій (2), мінімізація якого досягається використанням закону регулювання (3), такий:

$$I(\delta) = \int_0^{\infty} (\beta_{11} \cdot \psi^2 + \beta_{22} \cdot \dot{\psi}^2 + \delta^2) \cdot dt. \quad (8)$$

З першого рівняння (5) із урахуванням (7) визначається коефіцієнт закону регулювання (3)

$$\gamma_{12} = (a_{\psi\psi} \pm \sqrt{a_{\psi\psi}^2 + a_{\psi\delta}^2 \cdot \beta_{11}}) / a_{\psi\delta}^2. \quad (9)$$

Третє рівняння (5) дає:

$$\gamma_{22} = (a'_{\psi\psi} \pm \sqrt{(a'_{\psi\psi})^2 + a_{\psi\delta}^2 \cdot (2 \cdot \gamma_{12} + \beta_{22})}) / a_{\psi\delta}^2. \quad (10)$$

Оскільки згідно (6, 7) $m_1 = 0$, то визначення γ_{11} не є необхідним. Виходячи із фізичного смислу у рівняннях (9, 10) беремо знак «+». Відповідно до (3) закон регулювання у традиційному вигляді

$$u = \delta = -a_{\psi\delta} \cdot (\gamma_{12} \cdot \psi + \gamma_{22} \cdot \dot{\psi}) = k_{\psi} \cdot \psi + k'_{\psi} \cdot \dot{\psi}. \quad (11)$$

Співвідношення (9 – 11) встановлюють зв'язок коефіцієнтів β_{11}, β_{22} критерію (8) з коефіцієнтами рівнянь руху (6) і закону регулювання k_{ψ}, k'_{ψ} .

Точність стабілізації заданого кутового положення РКП при дії збурювального прискорення кількісно прийнято оцінювати коефіцієнтами похибок. Встановимо залежність векторів коефіцієнтів похибок від коефіцієнтів критерію (8) β_{11}, β_{22} . Коли збурювальне обертальне прискорення ac має тільки постійну і лінійну залежність від часу t складові, то для визначення усталеного руху (після закінчення перехідного процесу) системи достатньо два вектори коефіцієнтів похибок er_0 та er_1 . З метою встановлення залежності цих векторів від коефіцієнтів рівнянь руху (6) і закону регулювання (11) k_{ψ}, k'_{ψ} із урахуванням збурювального прискорення ac рівняння системи стабілізації обертального руху у площині рискання запишемо у вигляді

$$\dot{x} = a \cdot x + c \cdot ac, \quad (12)$$

де

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_{\psi\delta} \cdot k_{\psi} + a_{\psi\psi} & a'_{\psi\psi} + a_{\psi\delta} \cdot k'_{\psi} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad ac = ac_0 + ac'_0 \cdot t.$$

Після закінчення перехідного процесу тривалістю T_p усталений обертальний рух РКП

$$x = er_0 \cdot ac + er_1 \cdot ac'_0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad t > T_p. \quad (13)$$

З (13) виходить, що чим менше величини координат векторів коефіцієнтів похибок, тим краще точність стабілізації кутового положення РКП при дії прискорення ac , яке переважно викликане відхиленням конструкції від геометричної та масової симетрії і боковим вітром.

Як відомо [7], вектори коефіцієнтів похибок er_0 та er_1 є функціями матриці a і вектора c (12):

$$er_0 = -a^{-1} \cdot c; \quad er_1 = -a^{-2} \cdot c. \quad (14)$$

Виходячи з (12, 14) після нескладних перетворень отримуємо:

$$er_0 = -\begin{bmatrix} 1/a_{21} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad er_1 = -\begin{bmatrix} -a_{22}/a_{21}^2 \\ 1/a_{21} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Перехід від коефіцієнтів β_{11}, β_{22} критерію (8) до векторів (15) виконується з використанням співвідношень (9 – 12). Відповідно до них збільшення β_{11} веде до зростання елемента a_{21} матриці a і як результат до зменшення координати er_{01} (рис. 1), яка від β_{22} не залежить. Від коефіцієнтів критерію (8) також пропорційно зростає елемент a_{22} , але через його ділення на a_{21}^2 величина координати er_{11} вектора похибки er_1 обернено пропорційна коефіцієнту β_{11} і пропорційна коефіцієнту β_{22} (рис. 2).

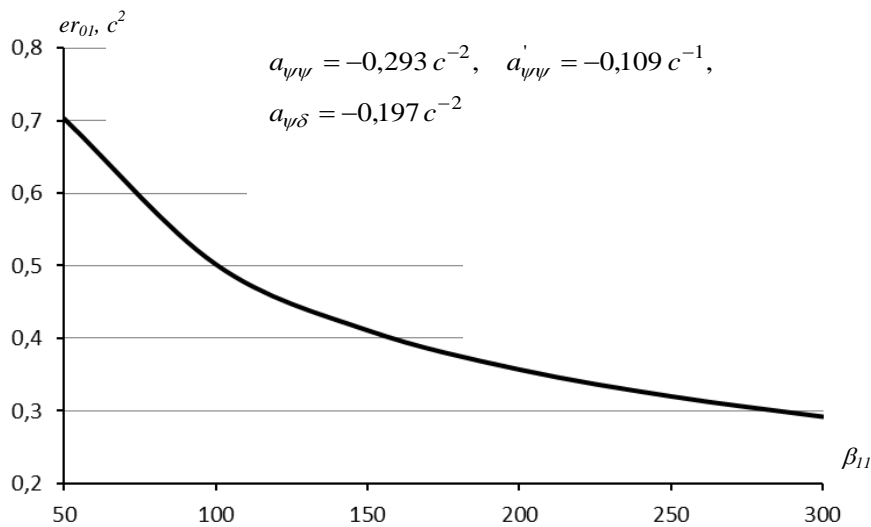


Рис. 1. Коефіцієнт помилки кута рискання.

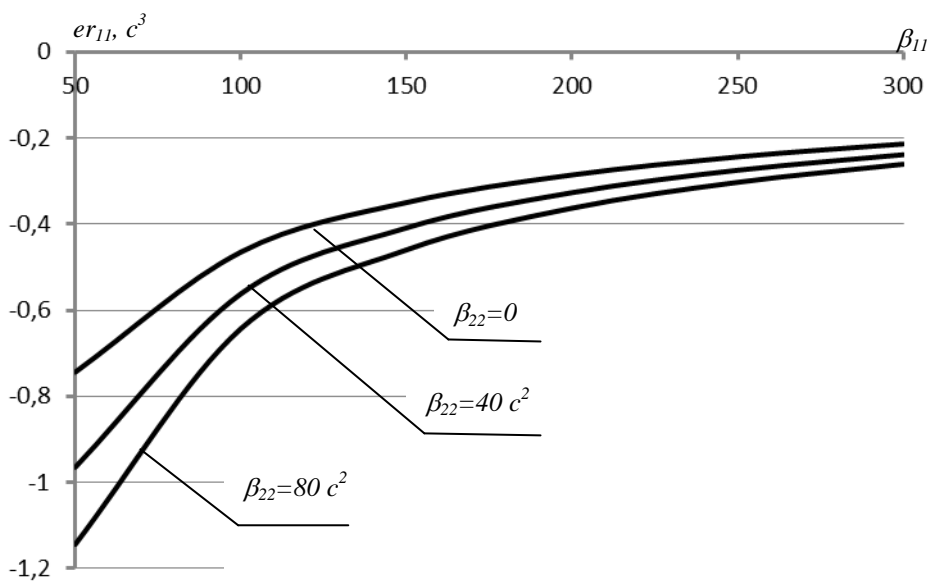


Рис. 2. Коефіцієнт помилки швидкості кута рискання.

Важливим показником системи стабілізації є швидкодія, яку кількісно прийнято оцінювати тривалістю перехідного процесу T_p , оцінку якої дають корені характеристичного поліному $Q(s) = s^2 - a_{22}s - a_{21}$, де s – змінна комплексного типу [7]. Як слідує з (9 – 11), коефіцієнт k_ψ' закону регулювання (11) пропорційний коефіцієнтам критерію (8). Відповідна залежність має місце і для дійсної частини коренів поліному $Q(s)$, яка обернено пропорційна T_p (рис. 3). Від якості перехідного процесу в певній мірі залежать енергетичні втрати РКП особливо на атмосферній ділянці траєкторії [3, 5].

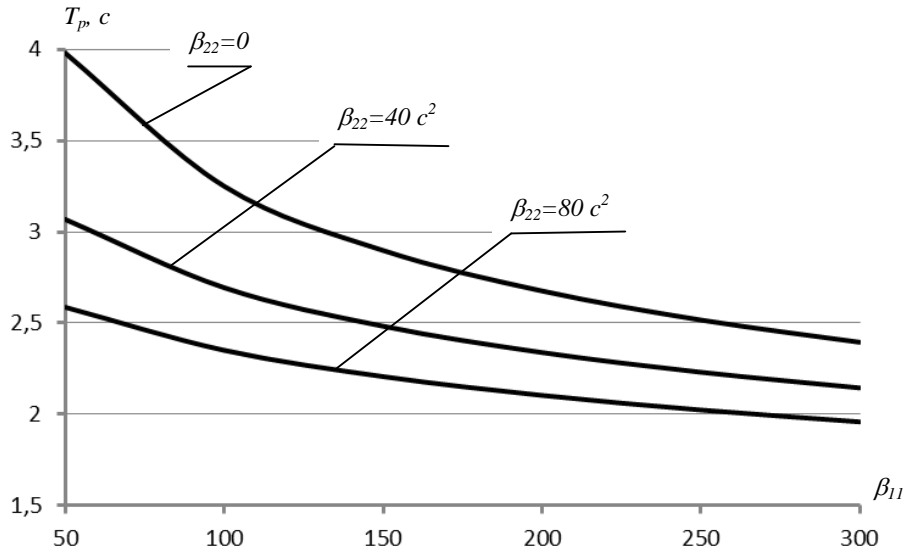


Рис. 3. Тривалість перехідного процесу.

Для кількісної оцінки цієї частини втрат можна використати величину

$$I_2 = \int_0^{3T_{p\max}} \psi(t)^2 \cdot dt . \quad (16)$$

Як показують розрахунки, оцінка (16) обернено пропорційна коефіцієнту критерію (8) β_{11} і пропорційна коефіцієнту β_{22} (рис. 4).

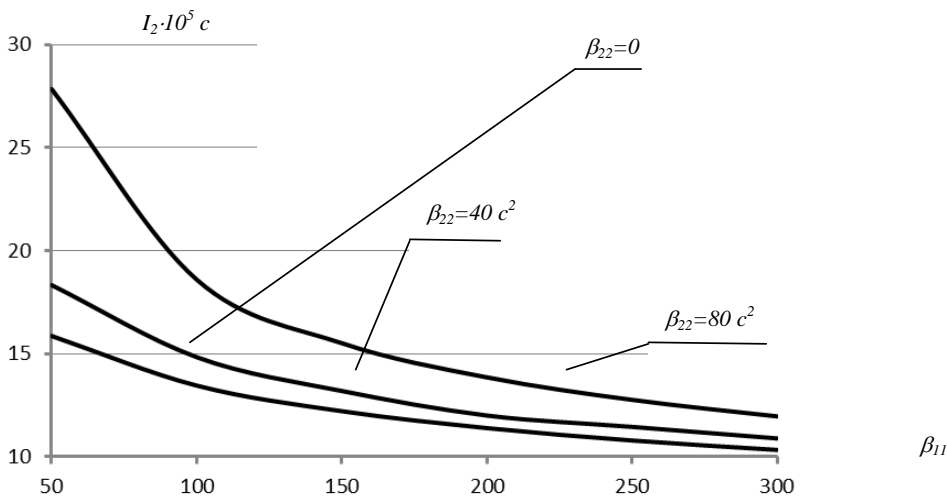


Рис. 4. Критерій (16) частини втрат енергетики РКП на перехідних процесах.

До розглянутих вище показників системи стабілізації обертального руху РКП слід віднести також вимоги до верхнього обмеження швидкості повороту руля $|\dot{\delta}|_{\max}$. Найпростіша модель (12) обертального руху РКП дає можливість аналітичного розв'язку, тобто визначення функцій $\psi(t)$, $\dot{\psi}(t)$, і з врахуванням закону регулювання (11) функції $\dot{\delta}(t)$. Оцінка $|\dot{\delta}|_{\max}$ пропорційна коефіцієнту β_{11} критерію (8) і обернено пропорційна коефіцієнту β_{22} цього критерію (рис. 5).

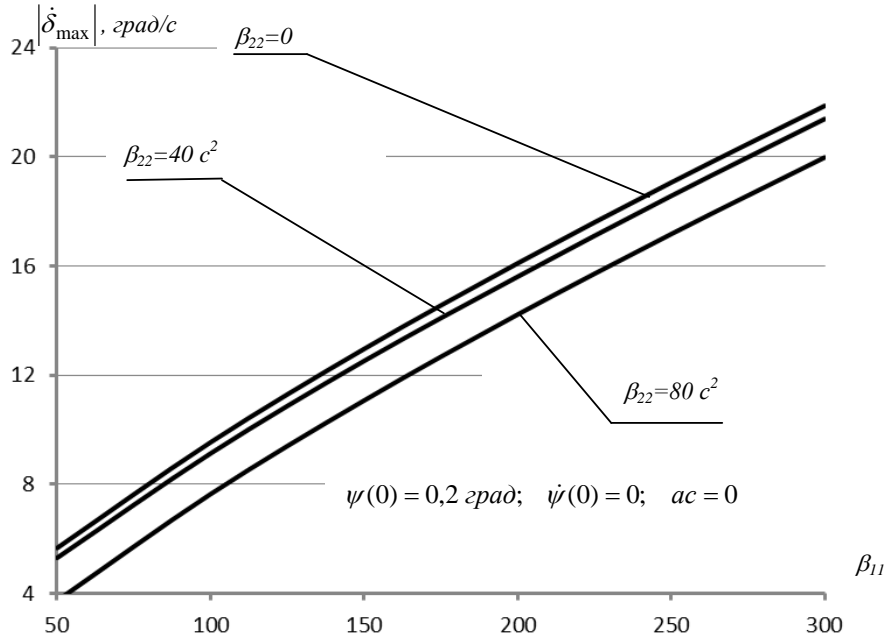


Рис. 5. Вимоги до максимальної швидкості повороту руля.

Висновки.

1. Встановлений зв'язок коефіцієнтів β_{11}, β_{22} критерію оптимальності (8) з показниками системи стабілізації плоского обертального руху РКП:

- збільшення β_{11} веде до покращення точності (рис. 1, 2), швидкодії (рис. 3) і зменшення частини енергетичних витрат на перехідних процесах (рис. 4), але призводить до зростання необхідної потужності виконавчого пристрою (рис. 5);
- збільшення β_{22} веде до погіршення точності стабілізації при непостійній величині збурювального прискорення (рис. 2), покращення швидкодії (рис. 3), зростання енергетичних витрат на перехідних процесах (рис. 4) і послаблення вимог до потужності виконавчого пристрою (рис. 5).

2. Отримані залежності встановлюють зв'язок між показниками системи стабілізації, тобто спираючись на заданий пріоритетний показник через коефіцієнти критерію оптимальності (8) визначаються інші.

Результати роботи можуть бути використані при проектуванні системи управління РКП як один з альтернативних методів визначення коефіцієнтів закону регулювання.

Наступним етапом може бути дослідження ефективності використання методів аналітичного конструювання регуляторів для моделей об'єкта, в яких у більш повній мірі враховується специфіка РКП.

Бібліографічні посилання

1. Айзенберг Я.Е. Проектирование систем стабилизации носителей космических аппаратов / Я.Е. Айзенберг, В.Г. Сухоробрый // М.: Машиностроение, 1986. – 224 с.
2. Динамика систем управления ракет с бортовыми цифровыми вычислительными машинами / Под ред. М.С. Хитрика и С.М. Федорова // М.: Машиностроение, 1976. – 272 с.
3. Игдалов И.М. Динамическое проектирование ракет. Задачи динамики ракет и космических ступеней: монография / И.М. Игдалов, Л.Д. Кучма, Н.В. Поляков, Ю.Д. Шептун; под. ред. акад. С.Н. Конюхова. – Д. Изд-во Днепропетр. нац. ун-та, 2010. – 264 с.
4. Колесников К.С. Динамика ракет / К.С. Колесников // М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
5. Красовский А.А. Аналитическое конструирование контуров управления летательными аппаратами / А. А. Красовский // М.: Машиностроение, 1969. – 240 с.
6. Кузовков Н.Т. Системы стабилизации летательных аппаратов (баллистических и зенитных ракет) / Н.Т. Кузовков // М.: Высш. шк., 1976. – 364 с.
7. Справочник по теории автоматического управления / Под редакцией А.А. Красовского // М.: Наука, 1987. – 712 с.

Надійшла до редколегії 12.04.15