УДК 624.073

РАСЧЕТ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЯМ НА КОНТУРЕ

к.т.н. ***Заврак Н.В.*** *(г. Одесса ОГАСА)*

CALCULATION OF NON-HOMOGENEOUS ANISOTROPIC RECTANGULAR PLATES WITH ARBITRARY FIXATION ON THE CONTOUR

Zavrak N.V.

Аннотация: Излагается методика расчета неоднородных анизотропных прямоугольных пластин с произвольным закреплением на контуре. В качестве примеров приведены результаты расчета для серии квадратных ортотропных пластин с жестко закрепленным краем под действием равномерно распределенной нагрузки.

Annotation: Methods of calculating the non-homogeneous anisotropic rectangular plates with arbitrary fixation on the contour is set forth.. Given as examples are the results of calculations for a series of square orthotropic plates with a fixed boundary under the action of a uniformly distributed load.

Несмотря на большое разнообразие методов расчета неоднородных анизотропных пластин, встречаются существенные трудности при их практической реализации. Они определяются не только сложностью интегрирования дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, но и сложностью удовлетворения сопутствующих им граничных условий. Очень редко при решении практических задач такой расчет может быть проведен в аналитическом виде. Целесообразно, а иногда и единственно возможно использовать современные численные методы. Наиболее простым из них является метод конечных разностей /МКР/. Причем, при использовании этого метода, оказывается, что решение может быть найдено с достаточной степенью точности в одних случаях опорного закрепления, например, -шарнирно-подвижного,- на простой и достаточно редкой сетке, в других же, например - жестком защемлении,- только на сложной или весьма густой сетке, что делает соответствующий расчет очень трудоемким даже при использовании современной вычислительной техники.

Для ослабления указанного недостатка целесообразно строить численное решение так, чтобы в сложных случаях опорного закрепления и погружения решение искалось не непосредственно, а в виде поправок к известному решению для простых случаев опорного закрепления и загружения, при разыскании которых могут быть использованы аналитические способы или МКР с редкой сеткой. Такая методика расчета хотя и несколько усложняет нахождение искомого решения для сложных случаев закрепления, так как его приходится осуществлять в два шага, тем не менее, в конечном счете, оказывается более эффективной, поскольку позволяет находить составные части искомого решения с применением аналитических соотношений или сравнительно простых по структуре и небольших по числу систем конечноразностных уравнений.

Изложим методику расчета, реализующую сформулированную идею и результаты ее использования проиллюстрируем на примере.

Задача расчета неоднородной анизотропной прямоугольной пластины с произвольным закреплением на контуре может сводится к нахождению решения краевой задачи общего вида:

$$L(w)\Big|_{\Omega} = f, \qquad R_i(w)\Big|_{S_i^R} = \rho_i, \qquad \Gamma_i(w)\Big|_{S_i^{\Gamma}} = \varphi_i \tag{1}$$

где

$$L(w) = \vec{B}^T D\vec{B}w, \qquad \vec{B} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad R_1(w) = \begin{cases} \mp \dfrac{\partial w}{\partial x} \; при & x = 0 \; и \; a \\ \mp \dfrac{\partial w}{\partial y} \; при & y = 0 \; и \; b \end{cases};$$

$$R_2(w) = w \begin{cases} при & x = 0 \quad и \quad a \\ при & y = 0 \quad и \quad b \end{cases}; \quad \Gamma_{23} = \begin{cases} Q_x + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} & при \quad x = 0 \; и \; a \\ Q_y + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x} & при \quad y = 0 \; и \; b \end{cases}; \tag{2}$$

$$\Gamma_1(w) = \begin{cases} M_x & при \quad x = 0 \quad и \quad a \\ M_y & при \quad y = 0 \quad и \quad b. \end{cases}$$

$\Omega = \{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ - прямоугольная область, которую занимает пластина; S = $\{x = 0$ и $a,\ y = 0$ и $b\}$- ограничивающие эту область прямолинейные части контура; f- интенсивность приложенной к пластине поперечной нагрузки; ρ_i и φ_i - заданные на участках $S_i^R < S$ и $S_i^{\Gamma} = S - S_i^R$ контура значения угла поворота, прогиба, изгибных моментов и приведенных поперечных сил; D – квадратная матрица жесткости порядка 3 с элементами, зависящими от координат x и y.

Меняя S_i^R и S_i^{Γ}, из формул (1) и (2) можно получить краевые дифференциальные задачи, описывающие состояние рассматриваемой пластинки при всех возможных способах закрепления и загружения ее края.

Предположим, что ищется решение задачи (1), причем известно решение соответствующей "жесткой" задачи

$$L(v)\big|_{\Omega} = f, \qquad R_i(v)\big|_{S} = \rho_i \,. \tag{3}$$

В работе (1) показано, что между решениями (1) и (3) имеет место зависимость

$$u(x,y) = v(x,y) + \sum_{j=1}^{\infty} X_j \chi_j(x,y) \,, \tag{4}$$

где

$$X_j = \iint_{\Omega} \chi_j f d\omega - \sum_{i=1}^{2} \int_{S_i^R} T_i(\chi_j)\rho_i ds - \sum_{i=1}^{2} \int_{S_i^{\Gamma}} \Gamma_i(\chi_j)\rho_i ds + \sum_{i=1}^{2} \int_{S_i^{\Gamma}} R_i(\chi_j)\varphi_i ds \,, \tag{5}$$

а $\chi_j(x,y)$, (j=1,2,…) – система специальным образом построенных координатных функций. Для их составления нужно найти полную систему решений вспомогательной однородной краевой задачи

$$L(\psi_k)\big|_{\Omega} = 0, \qquad R_i(\psi_k)\big|_{S_i^R} = 0 \tag{6}$$

и проортонормировать ее по билинейному выражению

$$F(p,q) = \iint_{\Omega} \left(\vec{B}p\right)^T D\vec{B}q d\omega \tag{7}$$

Последнее может быть выполнено по формуле

$$\chi_j(x,y) = \sum_{k=j}^{1} b_{jk}\psi_k(x,y) \qquad j = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где

$$b_{jk} = c_j \text{ при } k = j;\;\; b_{jk} = -c_j \sum_{i=j-1}^{k} \alpha_{jl} b_{lk} \text{ при } k = j - 1, \ldots, 2, 1, \qquad (9)$$

далее

$$\alpha_{jl} = c_l \left\{ \beta_{jl} - \sum_{m=l-1}^{1} \alpha_{jm} \alpha_{lm} \right\}; \qquad c_j = \left(\beta_{jj} - \sum_{l=j-1}^{1} \alpha_{jl}^2 \right)^{-1/2} \qquad (10)$$

и, наконец, $\beta_{jk} = F(\psi_j, \psi_l)$.

Важная особенность описанного способа решения заключается в следующем: если построена система координатных элементов χ_j, то с ее помощью можно легко получить функцию прогибов u при любых нагрузках f, φ_i и смещениях ρ_i. Для этого необходимо лишь вычислить соответствующие коэффициенты X_j по формуле (5).

В случае, когда пластина однородна, элементы матрицы жесткости D не зависят от координат x, y; при этом решения задачи (6) могут быть построены в аналитическом виде [1]. Значительно сложнее дело обстоит в рассматриваемом сейчас случае неоднородной пластины. Так как при этом коэффициенты уравнения (6) переменные, то решения его могут быть, как правило, найдены только в результате применения какого-нибудь численного метода. С этой целью используется метод конечных разностей.

Очевидно, что формула (4) может быть использована не только для нахождения функции u по известной функции v, но и для определения функции v, если мы знаем какую-нибудь функцию u. Последняя может быть иногда построена и в аналитической форме для неоднородной пластины, все четыре кромки которой прикреплены шарнирно к недеформируемой опоре.

Здесь приведены результаты расчета квадратной ортотропной пластины с жесткостями $D_{12} = \sqrt{D_{11} D_{22}}$ и при различных $\varepsilon = \sqrt[4]{D_{22} / D_{11}}$ под действием равномерно распределенной нагрузки q при жестком закреплении, напряженно-деформированное состояние которой в случае шарнирного закрепления всех сторон уже исследовано [3].

Для удобного применения результатов расчета численные значения прогибов и изгибающих моментов в центре и в середине опорных кромок ортотропной квадратной пластины приведены в таблице 1 для $\nu = 0{,}3$.

Таблица 1

$\varepsilon=\sqrt[4]{\dfrac{D_{22}}{D_{11}}}$	Прогиб в центре	Моменты в середине опорных сторон		Моменты в центре	
	$w=\alpha\dfrac{qa^4}{D_{22}}$	$M_x=\beta_1 qa^2$ $x=\pm\dfrac{a}{2}$, $y=0$	$M_y=\beta_2 qa^2$ $y=\pm\dfrac{b}{2}$, $x=0$	$M_x=\gamma_1 qa^2$ $x=0$, $y=0$	$M_y=\gamma_2 qa^2$ $y=0$, $x=0$
	α	β_1	β_2	γ_1	γ_2
1	0,00126	-0,0517	-0,0517	0,01777	0,01777
1,1	0,00151	-0,0538	-0,0581	0,01668	0,02140
1,2	0,00175	-0,0554	-0,0639	0,01520	0,02534
1,3	0,00192	-0,0563	-0,0687	0,01362	0,02862
1,4	0,00208	-0,0568	-0,0726	0,01179	0,03136
1,5	0,00221	-0,0570	-0,0757	0,01018	0,03375
1,6	0,00230	-0,0571	-0,0780	0,00865	0,03550
1,7	0,00238	-0,0571	-0,0799	0,00708	0,03708
1,8	0,00244	-0,0571	-0,0812	0,00590	0,03833
1,9	0,00249	-0,0571	-0,0822	0,00471	0,03929
2,0	0,00253	-0,0571	-0,0829	0,00378	0,04007

Из данных, указанных в этой таблице, вытекает, что при всех $\varepsilon=\sqrt[4]{D_{22}/D_{11}}$, т.е. соотношениях жесткостей, с увеличением ε прогиб в центре, момент M_y в центре и моменты M_x, M_y на краях растут; момент же M_x в центре в случае жесткого закрепления пластинки по всему контуру уменьшается.

Список литературы

1. Слезингер И.Н. Об одном способе решения линейных краевых задач самосопряженного типа. – Прикладная математика и механика, т. 20, вып. 6, 1956.
2. Заврак Н.В., Малахова Н.А. Об одном способе расчета неоднородных анизотропных пологих оболочек с различными закреплениями на краях // Современные строительные конструкции из металла и древесины. Сб. докладов Международного симпозиума. –Одесса. 1995. –С.172-177.
3. Тимошенко С. П. , Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М.: Физматгиз, 1963.