УДК 624.072.221

КРИТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ ПЛОСКОЙ ФОРМЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДЕРЕВЯННЫХ БАЛОК

CRITICAL LOADS OF PLANE DEFORMATION OF THE WOODEN BEAMS

к.т.н. доц. Кириленко В.Ф. (*Национальная академия природоохранного и курортного строительства*)

c.t.s. ***Kirilenko V.F.*** *(National academy of nature protection and resort building)*

На основе решений теории упругости для прямоугольных полос получены зависимости для определения критических нагрузок потери устойчивости плоской формы деформирования свободноопёртых и консольных деревянных балок в методе расчёта по предельным состояниям.

Ключевые слова: балки, устойчивость, критические нагрузки.

On the basis of the theory of elasticity solutions, for rectangular strips were obtained relations for critical loads losses of stability of the plane deformation of simply supported or cantilevered beams in the method of calculation based on the ultimate limit states.

Keywords: beams, stability, critical loads.

Постановка задачи

В общем объеме несущих деревянных конструкций значительное место занимают элементы, работающие на изгиб: балки из цельной и клееной древесины, прогоны, стропильные ноги и др. Для балок прямоугольного сечения при заданном (требуемом) значении момента сопротивления ($W = const$) произведение площади сечения на высоту сечения является величиной постоянной, поэтому увеличение высоты, например в 1,5 раза снижает площадь сечения (расход материала) на 50 %.

Увеличение высоты изгибаемых элементов приводит с одной стороны к значительной экономии древесины с одновременным достижением повышенной жёсткости в плоскости действия нагрузок, с другой – к недостаточной жёсткости в перпендикулярном направлении, и это может привести к потере устойчивости балки. В зданиях и сооружениях этот недостаток обычно устраняется постановкой связей, однако в некоторых случаях эти связи не могут быть поставлены из конструктивных соображений или количество связей может быть недостаточным.

В действующих нормах [1] расчёт на устойчивость плоской формы деформирования на участке балки рекомендуется выполнять путём определения действующих максимальных нормальных напряжений с введением коэффициента φ_M, аналогичного коэффициенту продольного изгиба для центрально сжатого стержня. В свою очередь этот коэффициент представляется произведением аналогичного значения для случаев чистого изгиба (базовое значение) и коэффициента $k_ф$, учитывающего фактическую схему нагружения, другими словами, форму эпюры моментов на этом участке.

В пособии по проектированию [2], посвящённом обоснованию и разъяснению некоторых положений норм проектирования, вопросы расчёта деревянных балок на устойчивость плоской формы деформирования, по нашему мнению, изложены крайне недостаточно. Кроме того, изложенные в п. 4.18-4.20 краткие объянения без ссылки на фундаментальные исследования Л.Прандтля, А. Мичелла и С.П. Тимошенко [3,4] вызывает много вопросов не только у инженеров, но и научных работников.

Следует отметить, что для обычно применяемых дощатых балок цельного сечения при простых нагружениях в приведенных выше работах имеются результаты, позволяющие непосредственно найти критические значения нагрузок, не прибегая к определению внутренних усилий и напряжений, а, следовательно, и введения коэффициента φ_M. Кроме того, в пособии и нормах не учтены результаты, связанные с изменениями критических значений в зависимости от линии приложения нагрузок по отношению к продольной оси балок.

Таким образом, целью настоящей работы является возможность непосредственного применения результатов работ указанных ранее авторов к определению критических нагрузок свободноопёртых и консольных деревянных балок при действии сосредоточенных сил и распределённых нагрузок.

Критические нагрузки для прямоугольных полос.

При изгибе балки (полосы) узкого прямоугольного сечения с увеличением нагрузки наступает момент, когда плоская форма изгиба перестаёт быть единственно возможной и появляется изгибно-крутильная форма равновесия. При этом имеет место изгиб также и в плоскости наименьшей жёсткости, сопровождающийся кручением. Решение вопросов устойчивости сводится к составлению и рассмотрению условий равновесия. Второй путь основан на рассмотрении энергии системы, когда критические нагрузки определяются из равенства потенциальной энергии балки работе внешних сил на перемещениях, обусловленных выпучиванием.

Решение задач устойчивости проводятся с учётом основных допущений, которые сводятся к следующему

- рассматривается упругая работа материала и линейный закон распределения напряжений в сечении;
- прогибы балок в плоскости и из плоскости, а также угол закручивания считаются весьма малыми;
- искривление в направлении наименьшей жёсткости сопровождается лишь поворотом сечений, форма же сечений остаётся неискажённой;
- жёсткости на изгиб из плоскости B и жёсткость на кручение C по отношению к максимальной жёсткости являются малыми величинами.

С учётом этих допущений задача нахождения критических значений нагрузок сводится к интегрированию дифференциальных уравнений равновесия искривленной формы балки (решение Л. Прандтля, А. Мичелла). Другой (энергетический) путь решения задач устойчивости, предложенный С.П. Тимошенко, заключается в нахождении критических нагрузок из условия равенства потенциальной энергии работе внешних сил, которая определяется для каждого конкретного случая загружения балки. Использование здесь тригонометрических рядов для представления угла закручивания даёт хорошее приближение по сравнению с точным решением уже при одном – двух членах ряда. Для свободноопёртых балок принимается такое закрепление концов, что вращение их относительно продольной оси невозможно, это же относится и к консольным балкам в месте защемления.

При первом и втором пути решения критические нагрузки для свободноопёртых и консольных балок могут быть представлены в виде

$$M_{кр} = \frac{k\sqrt{BC}}{l}, \quad P_{кр} = \frac{k\sqrt{BC}}{l^2}, \quad q_{кр} = \frac{k\sqrt{BC}}{l^3}, \qquad (1)$$

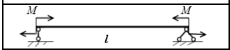
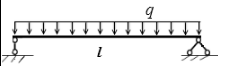
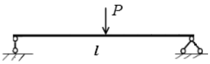
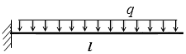
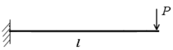
где l - пролёт балки или длина консоли.

В этих выражениях коэффициенты k, взятые из работы [3] для различных схем балок и нагружений, приведены в табл. 1.

Следует отметить, что при определении критических нагрузок для всех приведенных случаев нагружения считалось, что сосредоточенные силы или распределённые нагрузки приложены в уровне продольной оси балки. При приложении нагрузок выше этой оси на расстоянии a балки становятся менее устойчивыми. С учётом этого, в работе [3] получены приближённые зависимости для определения дополнительного множителя в правой части выражения (1), зависящие от соотношения a/l и $\sqrt{B/C}$. При приложении нагрузок на верхней кромке балок ($a = h/2$) и значении радикала $\sqrt{B/C} = 5$ (для балок из древесины) в табл.1 приведены значения этого множителя – коэффициент β_2.

Таблица 1

Значения коэффициентов k, β_1 и β_2
для определения критических нагрузок

Схема балки	M	k	Коэффициенты β_1			$\dfrac{\beta_1^M}{\beta_1^{ч.и.}}$	β_2
			β_1^M	β_1^p	β_1^q		
	M	3,14	$6{,}54\,k$	-	-	1	1
	$\dfrac{ql^2}{8}$	3,54		-	$8\,\beta_1^M$	1,13	$1\text{-}1{,}72\,\dfrac{h}{l}$
	$\dfrac{Pl}{4}$	4,23		$4\,\beta_1^M$	-	1,35	$1\text{-}1{,}95\,\dfrac{h}{l}$
	$\dfrac{ql^2}{2}$	6,43		-	$2\,\beta_1^M$	2,04	$1\text{-}2{,}22\,\dfrac{h}{l}$
	Pl	4,01		β_1^M	-	1,28	$1\text{-}1{,}12\,\dfrac{h}{l}$

Расчётные зависимости для деревянных балок.

Для балок узкого прямоугольного сечения шириной b и высотой h жёсткость на изгиб из плоскости

$$B = E \cdot \frac{hb^3}{12}, \qquad (2)$$

жёсткость на кручение

$$C = G \cdot \frac{1}{3} hb^3 . \qquad (3)$$

Для древесины отношение модулей $E/G = 10000/500 = 20$, тогда радикал

$$\sqrt{B \cdot C} = \sqrt{\frac{Ehb^3}{12} \cdot G\frac{hb^3}{3}} = \frac{E}{6\sqrt{20}}hb^3. \qquad (4)$$

При расчёте деревянных балок на устойчивость для критических нагрузок согласно (1) кроме коэффициентов β_2 необходимо ввести коэффициент надёжности, равный отношению нормативного сопротивления чистой древесины на изгиб к расчётному сопротивлению, т.е. $R_и^н / R_и$. При значении нормативного сопротивления на изгиб $R_и^н = 57\ МПа$ [1] отношение $E/R_и^н = 10000/57 = 175{,}4$ и расчётные формулы проверки устойчивости балки, полученные из (1) с учётом (4) могут быть представлены следующим образом [5]

$$M \le \bar{M}_{кр} = \beta_1^M \beta_2 \frac{hb^3}{l} R_и, \qquad (5)$$

$$P \le \bar{P}_{кр} = \beta_1^P \beta_2 \frac{hb^3}{l^2} R_и, \qquad (6)$$

$$q \le \bar{q}_{кр} = \beta_1^q \beta_2 \frac{hb^3}{l} R_и, \qquad (7)$$

где $\bar{P}_{кр}$, $\bar{q}_{кр}$ - критические значения нагрузок в методе расчёта по предельным состояниям; β_1^M - коэффициент, представляющий собой произведение соответствующего значения k согласно табл. 1 на отношение $E/6\sqrt{20} \cdot R_и^н = \dfrac{10000}{6\sqrt{20} \cdot 57} = 6{,}54$.

Коэффициенты β_1^P и β_1^q, выражающиеся посредством β_1^M представлены в той же таблице.

Коэффициент устойчивости деревянных балок.

При введении понятия коэффициента $\varphi_м$ [1, 2, 6], аналогичного коэффициенту прокольного изгиба, критические значения изгибающего момента для балки прямоугольного сечения в методе расчёта по предельным состояниям можно представить следующим образом

$$\bar{M}_{кр} = \varphi_м \cdot W \cdot R_и = \varphi_м \cdot \frac{bh^2}{6} \cdot R_и, \qquad (8)$$

Значение $\varphi_м$ можно получить путём приравнивания правых частей выражения (5) и (8)

$$\varphi_м = 6\beta_1^M \cdot \beta_2 \cdot \frac{b^2}{lh}. \qquad (9)$$

Если в этом выражении положить $\beta_2 = 1$ (этот случай рассмотрен в пособии [2]), то числовые значения коэффициента несколько отличаются от значения 140, принятого в нормах. Это различие объясняется отношением $E / R_и^н$: в нормах оно принято 200, в настоящей работе $175{,}4$. При принятии нормативного отношения $E / R_и^н = 200$ числовое значение при коэффициенте β_1^M составляет $200 / 6\sqrt{20} = 7{,}46$ и значение коэффициента в (9) будут соответствовать принятому в нормах.

Из этого также следует, что отношение коэффициента β_1^M для каждого конкретного случая загружения к соответствующему коэффициенту для случая чистого изгиба $\beta_1^{ч.и.}$ представляет собой значение коэффициента $k_ф$, учитывающего форму эпюры моментов в действующих нормах.

Список литературы

1. СНиП II-25-80. Деревянные конструкции. Нормы проектирования. – М.: Стройиздат, 1983. – 31 с.
2. Пособие по проектированию деревянных конструкций (к СНиП II-25-80) / ЦНИИСК им. Кучеренко. – М.: Стройиздат, 1986. – 216 с.
3. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – 808 с.
4. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. – К.: Наукова думка, 1972.– 501 с.
5. Кириленко В.Ф. К вопросу устойчивости плоской формы деформирования деревянных балок // Строительство и техногенная безопасность: Сб. научн. тр. / НАПКС. – Симферополь, 2011. – Вып. 40. – С. 3-8.
6. Шляпин В.А. Устойчивость плоской формы изгиба деревянных балок // Известия вузов. Строительство и архитектура. - № 7. – 1971.– С.36-38.