

**Учёт анизотропии при расчёте деревянных
конструкций методом конечных элементов**
**Anisotropy consideration in finite element calculations
of wooden construction**

*аспирант Таныгин Ф.О. (Юго-Западный Государственный
Университет)*
post graduate student Tanygin F.O. (South-West State University)

Аннотация

В статье исследуется учёт влияния анизотропии упругих характеристик дерева при расчёте методом конечных элементов.

Уделено внимание преобразованию матрицы упругих характеристик $[D]$, а также всего процесса конечно-элементного расчёта.

Приводится сравнительный анализ расчётов деревянных конструкций с учётом влияния анизотропии и без.

Делается вывод о том, в каких расчётных ситуациях учёт влияния анизотропии является необходимым условием для получения приемлемых результатов.

Ключевые слова: анизотропия, метод конечных элементов, деревянные конструкции.

Annotation

The article presents research of the consideration of the effect of the anisotropy of the elastic characteristics of the wood in the finite element calculations.

Attention is also given to the transformation of the matrix of the elastic characteristics $[D]$, and the whole process of the finite element calculation.

The article provides a comparative analysis of the wooden constructions calculation with the influence of anisotropy and without.

The article contain conclusion about the design situations in which consideration of the effect of anisotropy is a necessary condition to obtain acceptable results.

Key words: anisotropy, finite element method, wood constructions.

Оптимальное конструирование требует учёта анизотропии характеристик материала, каким бы способом не производился расчёт. В данной работе применен метод конечных элементов для объёмного тела в перемещениях [1], в основе которого лежит принцип

минимизации потенциальной энергии деформации. Потенциальная энергия системы выражается следующим образом

$$\Pi = \Lambda - W, \quad (1)$$

где Λ – полная энергия деформации; W – совершенная работа.

При отсутствии начальных деформаций величина полной энергии деформации будет представлена выражением:

$$\Lambda = 0.5 \int \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\}, \quad (2)$$

где $[D]$ содержит упругие константы материала.

Работа, совершаемая внешними силами, будет представлена работой, совершаемой сосредоточенными в узлах силами:

$$W = \{U\}^T \{P\}, \quad (3)$$

где $[P]$, $[U]$ – векторы внешних сил и узловых перемещений соответственно.

Зная соотношения между деформациями и перемещениями, можно выразить вектор деформаций через узловые перемещения [1]. Общая форма этих соотношений такова:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{U\}, \quad (4)$$

Матрица $[B]$ – матрица формы, вид которой зависит от рассматриваемой задачи и от используемого конечного элемента, а значения определяются координатами узлов элемента.

Чтобы минимизировать величину Π , продифференцируем её с учётом (2), (3), (4) по $\{U\}$ и приравняем к нулю:

$$\partial \Pi / \partial U = \sum_{e=1}^E \int [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{U\} dV - \{P\} = 0, \quad (5)$$

где $[k^{(e)}] \int [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \{U\} dV$ – матрица жёсткости.

Для изотропного случая:

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} D_\sigma & 0 \\ 0 & D_\tau \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$[D_\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} \\ \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 1 \end{bmatrix}, \quad [D_\tau] = \begin{bmatrix} \frac{0.5-\mu}{1-2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0.5-\mu}{1-2\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{0.5-\mu}{1-2\mu} \end{bmatrix}$$

В общем случае анизотропии [2] существует 21 независимая компонента матрицы D . В данной работе мы исходим из гипотезы об

ортогональной анизотропии древесины, основанной на допущении существования в элементарном объёме трех плоскостей симметрии. За плоскости симметрии каждого элементарного объёма принимаются плоскости перпендикулярные радиальному r , тангенциальному t (по отношению к годичным слоям) направлениям и плоскость перпендикулярная направлениям волокна a (рисунок 1). В [3] древесина рассматривается в качестве трансотропного материала, различая только направления вдоль и поперек волокон.

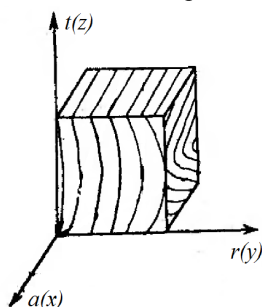


Рисунок 1. Плоскости и оси симметрии элементарного объёма древесины.

Данное обстоятельство позволяет сократить число компонент до 9. Они находятся из решения системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\mu_{xy}}{E_y} \sigma_y - \frac{\mu_{xz}}{E_z} \sigma_z; \\ \varepsilon_y = -\frac{\mu_{yx}}{E_x} \sigma_x + \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\mu_{yz}}{E_z} \sigma_z; \\ \varepsilon_z = -\frac{\mu_{zx}}{E_x} \sigma_x - \frac{\mu_{zy}}{E_y} \sigma_y + \frac{\sigma_z}{E_z}; \\ \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}}; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G_{xz}}; \gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G_{zy}}; \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\frac{\mu_{xy}}{E_y} = \frac{\mu_{yx}}{E_x}, \frac{\mu_{yz}}{E_z} = \frac{\mu_{zy}}{E_y}, \frac{\mu_{xz}}{E_z} = \frac{\mu_{zx}}{E_x}; \quad (8)$$

Учитывая, что в силу симметрии матрицы существуют зависимости (8), получим:

$$[D_{opt}] = \begin{bmatrix} D_{\sigma} & 0 \\ 0 & D_{\tau} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$D_{\sigma} = \frac{1}{\alpha} \begin{bmatrix} \beta_1 E_x^2 & \chi_1 E_x E_y & \chi_2 E_x E_y E_z \\ \text{симметр.} & \beta_4 E_y^2 & \chi_3 E_y E_z \\ & & \beta_6 E_y E_z \end{bmatrix}; D_{\tau} = \begin{bmatrix} G_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & G_{yz} \end{bmatrix};$$

$$\alpha = E_x E_y - \mu_{xy}^2 E_y^2 - \mu_{xz}^2 E_y E_z - \mu_{yz}^2 E_x E_z - 2\mu_{xz}\mu_{xy}\mu_{yz} E_y E_z;$$

$$\beta_1 = E_y - \mu_{yz}^2 E_z; \beta_2 = E_x - \mu_{xz}^2 E_z; \beta_3 = E_x - \mu_{xy}^2 E_y;$$

$$\chi_1 = \mu_{yz} E_y - \mu_{xz}\mu_{yz} E_z; \chi_2 = \mu_{xy}\mu_{yz} + \mu_{xz};$$

$$\chi_3 = \mu_{yz} E_x + \mu_{xz}\mu_{xy} E_y;$$

Приведём результаты расчёта изгибаемой (рисунок 3) и сжато-изгибаемой (рисунок 4) консольных деревянных балок по двум расчётным схемам:

- а) транстропной (п. 3.5 [3])
- б) ортотропной (таблица 2.34 [2])

Параметры балки одинаковы в обоих случаях:

$l=3\text{ м}; b=h=0.2\text{ м}. E_x=11300; E_y=900\text{ МПа}; E_z=1740; \mu_{xy}=0,5; \mu_{xz}=0,08; \mu_{yz}=0,05; G_{xy}=1000\text{ МПа}; G_{xz}=650\text{ МПа}; G_{yz}=80\text{ Мпа}$ ($E_z; \mu_{yz}; G_{xz}, G_{yz}$ – только для случая "б") $F_x = F_y = F_z = 1000\text{ кН}$.

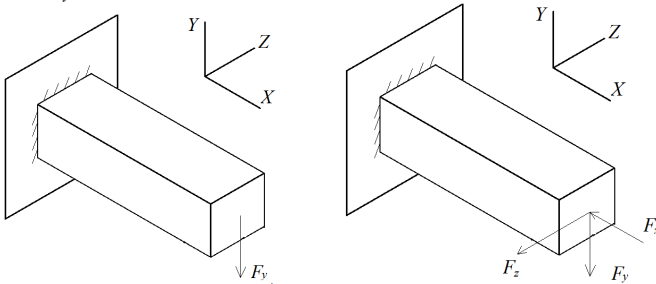


Рисунок 2. Общий вид балок под нагрузкой.

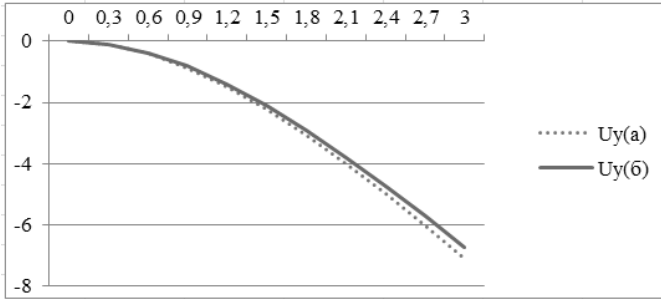


Рисунок 3. Эпюра вертикального перемещения (U_y) при изгибе (мм).

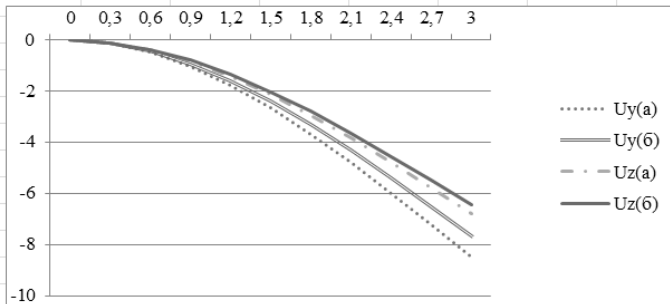


Рисунок 4. Эпюра вертикального (U_y) и горизонтального (U_z) перемещения при изгибе и сжатии (мм).

Как видно из графиков, при работе на изгиб в одной плоскости различие в расчётных схемах (а) и (б) незначительно, однако при более сложном нагружении возрастает и может достигать 7%

Таким образом, подтверждается, что более полный учёт анизотропии древесины, при рассмотрении его как ортотропного материала, позволяет в некоторых расчётных ситуациях уточнить результаты расчёта.

Список литературы:

1. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
2. Ашкенази Е.К., Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов: Справочник. – 2-е изд., перераб. и доп. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
3. СНиП II-25-80 "Нормы проектирования. Деревянные конструкции"