УДК 621.391+519.22

А.А. Попов,
кандидат технических наук, доцент

ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ОБРАБОТКИ АМПЛИТУДНО-ФАЗОМАНИПУЛИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СИГНАЛОВ СО СВОЙСТВАМИ *L*-ГРУППЫ

Рассмотрены показатели качества обработки амплитудно-фазоманипулированных сигналов на фоне помех (шумов) в пространстве сигналов со свойствами L-группы. Показано, что при обработке таких сигналов в пространстве сигналов со свойствами L-группы могут быть достигнуты более высокие характеристики обработки, чем в линейном пространстве, а алгоритмы обработки обладают свойством инвариантности по отношению к условиям параметрической и непараметрической априорной неопределенности.

Ключевые слова: *пространство сигналов, обработка сигналов, L-группа, априорная неопределенность.*

Розглянуто показники якості обробки амплітудно-фазоманіпульованих сигналів на фоні завад (шумів) у просторі сигналів із властивостями L-групи. Показано, що при обробці таких сигналів у просторі сигналів з властивостями L-групи можуть бути отримані більш високі характеристики обробки, ніж у лінійному просторі, а алгоритми обробки характеризуються властивістю інваріантності щодо умов параметричної та непараметричної апріорної невизначеності.

Ключові слова: *простір сигналів, обробка сигналів, L-група, апріорна невизначеність.*

Amplitude phase-shift keying signal processing quality indexes in signal space with L-group properties are considered. It is shown, that in signal space with L-group properties higher quality characteristics of signal processing can be reached, than in a linear space of signals. The fact that the signal processing algorithms possess the property of invariance in relation to the conditions of parametrical and nonparametric aprioristic uncertainty is proved.

Key words: *signal space, signal processing, L-group, prior uncertainty.*

Одной из наиболее общих задач обработки сигналов на фоне помех (шумов) является оценивание сигналов и их параметров. К этой задаче могут быть сведены также и другие, например, задачи обнаружения и различения сигналов [1–4]. Известные варианты постановки задач обработки сигналов сформулированы в большинстве случаев для аддитивного взаимодействия $x = s + n$ (в терминологии линейного пространства) сигнала s и помехи n [5, 6]. Тем не менее, ряд авторов допускают постановку данных задач на основе более общей модели взаимодействия: $x = Ô(s, n)$, где Ф – некоторая детерминированная функция [1, 7, 8].

Разнообразие изученных в современной математике алгебраических систем дает возможность исследовать свойства и характеристики оценок сигнала в условиях его взаимодействия с помехой (шумом) в пространствах сигналов, отличающихся от линейного. В существующей алгебраической литературе L-группы известны достаточно давно и хорошо исследованы [9, 10]. Использование L-группы в качестве пространства сигналов обусловлено тем, что оно является на сегодня единственно известной алгебраической структурой, в которой наряду с аксиоматикой алгебраической решетки, выполняются аксиомы линейного пространства. L-группа определяется как линейная дистрибутивная решетка $L(+,\vee,\wedge)$, в которой выполняются аксиомы дистрибутивной решетки $L(\vee,\wedge)$ с операциями верхней и нижней граней соответственно: $a\vee b=\sup_L\{a,b\}$, $a\wedge b=\inf_L\{a,b\}$ и аксиомы аддитивной коммутативной группы $L(+)$ с операцией сложения $a+b$ [9, 10]. Свойство поглощения решетки $L(\vee,\wedge)$: $s\wedge(s\vee n)=s$, $s\vee(s\wedge n)=s$ обеспечивает выделение детерминированных сигналов на фоне помех (шумов) в условиях их взаимодействия в пространстве сигналов со свойствами решетки без каких-либо потерь, обусловленных воздействием помех (шумов) [11]. Однако такой подход становится неприемлемым, если хотя бы один из параметров сигнала неизвестен. Цель статьи заключается в исследовании характеристик и свойств алгоритмов обработки амплитудно-фазоманипулированных сигналов на фоне помех (шумов) в пространстве сигналов со свойствами L-группы.

Рассмотрим взаимодействие узкополосного амплитудно-фазоманипулированного сигнала и гауссовской помехи $x(t)=s(t)\oplus n(t)$ в пространстве сигналов со свойствами L-группы, где операция $\oplus$ соответствует одной из двух бинарных операций $\vee$, $\wedge$ решетки $L(\vee,\wedge)$: $s\vee n=\sup_L\{s,n\}$, $s\wedge n=\inf_L\{s,n\}$.

Модель принимаемого сигнала $s(t)$ определяется выражением:

$$s(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi),\; t\in T_s=[t_0,t_0+T],$$

где A – неизвестная неслучайная амплитуда полезного сигнала $s(t)$; $f_0=\omega_0/2\pi$ – несущая частота сигнала $s(t)$; φ – неизвестная неслучайная начальная фаза полезного сигнала, $\varphi\in[0,2\pi]$; $t_0=0$ – известное время прихода сигнала; T – длительность сигнала.

Модель гауссовской помехи $n(t)$ описывается квазибелым гауссовским шумом, так что отсчеты $\{n(t_j)\}$ помехи, взятые через интервал $\Delta t=t_{j+1}-t_j=1/f_0$, являются статистически независимыми.

Для измерения неизвестных неслучайных амплитуды и начальной фазы амплитудно-фазоманипулированного сигнала устройство обработки должно осуществлять преобразование Гильберта от смеси $s+n$ сигнала s и помехи n с целью формирования двух каналов обработки. Пусть в нашем распоряжении имеется устройство $C[+/\vee\wedge]$, осуществляющее взаимнооднозначное отображение линейного пространства $L(+)$ с операцией аддитивной суммы "+" (взаимодействия $s+n$ сигнала s и помехи n), в L-группу $L(+,\vee,\wedge)$ [12, 13]. Преобразователи $C[+/\vee\wedge]$ в каждом cos(sin)-квадратурном канале отображают линейное пространство сигналов $L(+)$ в L-группу, разветвляя каждый квадратурный канал на два дополнительных канала обработки:

$$\text{в cos-канале: } x_{1\vee}(t) = s_1(t) \vee n_1(t),\ x_{1\wedge}(t) = s_1(t) \wedge n_1(t);$$
$$\text{в sin-канале: } x_{2\vee}(t) = s_2(t) \vee n_2(t),\ x_{2\wedge}(t) = s_2(t) \wedge n_2(t),$$

где $s_1(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$; $s_2(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$; $n_1(t) = A_n(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_n(t))$; $n_2(t) = A_n(t)\sin(\omega_0 t + \varphi_n(t))$; $t \in T_s = [t_0, t_0 + T]$.

Если начальная фаза сигнала принимает значения на интервале $[0,2\pi]$, формирование оценок амплитуды и начальной фазы должно происходить с использованием всех четырех каналов обработки. В простейшем случае, когда начальная фаза сигнала принадлежит интервалу $[0,\pi/2]$, достаточно двух каналов обработки.

Рассмотрим дискретный алгоритм обработки. Временные отсчеты мгновенных значений сигнала $s_j = s(t_j)$ и помехи $n_j = n(t_j)$ являются элементами L-группы: $s_j \in L(+,\vee,\wedge)$, $n_j \in L(+,\vee,\wedge)$. Отсчеты s_j и n_j сигнала s и помехи n берутся на области определения сигнала $t_j \in T_s = [0,T]$ через интервал $\Delta t = 1/f_0$, что обеспечивает независимость отсчетов помехи $\{n(t_j)\}$, причем номер отсчета j изменяется в пределах $0,1,\ldots,N-1$; $N = T/\Delta t = T f_0$; $f_0 = \omega_0/2\pi$.

Полезный сигнал в cos(sin)-квадратурном канале состоит из множества повторяющихся элементов $\{s_1(t_j)\}$ ($\{s_2(t_j)\}$), $t_j = j\Delta t$; $j = 0,1,\ldots,N-1$, причем:

$$s_1(t_j) = A\cdot\cos(\varphi) = s_1,\ s_2(t_j) = A\cdot\sin(\varphi) = s_2,\ t_j \in T_s = [0,T],$$

где s_1 – значение сигнала в cos-квадратурном канале в момент времени t_j;

s_2 – значение сигнала в sin-квадратурном канале в момент времени t_j.

Таким образом, каждая пара отсчетов мгновенных значений $s_1(t_j)$, $s_2(t_j)$ сигнала в квадратурных каналах содержит информацию об амплитуде A и начальной фазе φ. Для простоты последующих рассуждений будем полагать, что начальная фаза сигнала принадлежит интервалу $[0,\pi/2]$, то есть отсчеты сигнала в квадратурных каналах положительны: $s_1(t_j) \geq 0$, $s_2(t_j) \geq 0$. В каждый момент времени t_j результаты взаимодействия сигнала и помехи в квадратурных каналах определяются системой:

$$\begin{cases} x_1(t_j) = s_1(t_j) \vee n_1(t_j); \\ x_2(t_j) = s_2(t_j) \vee n_2(t_j). \end{cases} \quad (1).$$

Предположим, что среди всех отсчетов помехи $\{\{n_{1,2}(t_j)\}\}$, $j = 0,1,\ldots,N-1$, найдется хотя бы один $n_{1,2}(t_i)$, такой, что:

$$n_{1,2}(t_i) < s_{1,2}(t_i) \quad (2).$$

Тогда i-й отсчет результата взаимодействия сигнала и помехи будет равен i-му отсчету сигнала $x_{1,2}(t_i) = s_{1,2}(t_i)$, который может быть использован в качестве оценки $\hat{s}_{1,2}$ мгновенного значения сигнала в квадратурном канале: $\hat{s}_{1,2}\ x_{1,2}(t_i) = s_{1,2}(t_i)$.

Очевидно, что для выполнения (2) достаточно, если $n_{1,2}(t_i)<0$. Тогда на основании свойства поглощения алгебраической решетки будет справедливо равенство:

$$x_{1,2}(t_i)\wedge x_{1,2}(t_j)=s_{1,2}(t_i)\wedge[s_{1,2}(t_j)\vee n_{1,2}(t_j)]=$$
$$=\hat{s}_{1,2}\wedge[\hat{s}_{1,2}\vee n_{1,2}(t_i)]=\hat{s}_{1,2} \qquad (3).$$

В предположении существования хотя бы одного отсчета $n_{1,2}(t_i)$ из множества $\{n_{1,2}(t_j)\}$, такого, что $n_{1,2}(t_i)<s_{1,2}(t_i)$, из (2) следует, что статистика $y_{1,2}(t_N)$ совпадает с оценкой сигнала $\hat{s}_{1,2}$ в соответствующем квадратурном канале, при условии, что из обработки исключены отрицательные значения $\{x_{1,2}(t_j)\}$:

$$y_{1,2}(t_N)=\bigwedge_{j=0}^{N-1}x^{+}_{1,2}(t_j)=\hat{s}_{1,2}=A\begin{Bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{Bmatrix} \qquad (4),$$

$$x^{+}_{1,2}(t_j)=\begin{cases}x_{1,2}(t_j)=s_{1,2}(t_j)\vee n_{1,2}(t_j), & x_{1,2}(t_j)\geq 0;\\ 0, & x_{1,2}(t_j)<0\end{cases} \qquad (4а).$$

Располагая статистиками $y_{1,2}(t_N)$, легко получить оценки амплитуды $\hat{A}$ и начальной фазы $\hat{\varphi}$ сигнала $s(t)$:

$$\hat{A}=\sqrt{y_1^2(t_N)+y_2^2(t_N)} \qquad (5а),$$
$$\hat{\varphi}=\mathrm{arctg}\big(y_2(t_N)/y_1(t_N)\big) \qquad (5б).$$

Оценим вероятность ошибки $P(C_{\text{ош}\,1,2})$ приема сигнала $s_{1,2}(t)$ в отдельно взятом квадратурном канале. Полагаем, как и ранее, что начальная фаза j сигнала принадлежит интервалу $[0,\pi/2]$. Ошибка приема сигнала (ошибка формирования оценки $\hat{s}_{1,2}$) в квадратурном канале будет иметь место при наступлении события $C_{\text{ош}\,1,2}$, которое заключается в том, что при взаимодействии сигнала и помехи в отдельно взятом квадратурном канале $s_{1,2}(t_j)\vee n_{1,2}(t_j)$ в каждый момент времени t_j для всех значений $\{n_{1,2}(t_i)\}$, $j=0,1,...,N-1$ выполняется неравенство: $n_{1,2}(t_j)>s_{1,2}(t_j)=s_{1,2}$.

Считая, что события $\{C[n_{1,2}(t_j)>s_{1,2}(t_j)]\}$ независимы и наступают с вероятностью P_j, определим вероятность $P(C_{\text{ош}\,1,2})$ как произведение вероятностей:

$$P(C_{\text{ош}\,1,2})=\prod_{j=0}^{N-1}P_j \qquad (6).$$

Получение точного значения вероятности P_j в общем случае достаточно затруднительно. Вместе с тем достаточно просто получить оценку верхней границы P_j, исходя из следующих соображений. Каждая случайная величина $n_{1,2}(t_j)$ характеризуется гауссовской плотностью распределения вероятностей с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D_n. поэтому справедливо неравенство:

$$P_j = P\{C[n_{1,2}(t_j) > s_{1,2}(t_j) / s_{1,2}(t_j) \geq 0]\} \leq 0.5 \quad (7).$$

В соответствии с формулой (6) оценка верхней границы вероятности ошибки приема сигнала в квадратурном канале $P(C_{\text{ош}1,2})$ будет определяться соотношением:

$$P(C_{\text{ош}1,2}) \leq 2^{-N} \quad (8),$$

где N – число периодов узкополосного полезного сигнала $s(t)$, используемых при обработке, $N{=}T\,f_0$; T – длительность сигнала; $f_0{=}w_0/2\pi$ – несущая частота сигнала.

Поскольку оценка амплитуды $\hat{A}$ и оценка начальной фазы $\hat{\varphi}$ сигнала формируется на основе оценок сигналов в квадратурных каналах $\hat{s}_1$, $\hat{s}_2$ в соответствии с соотношениями (5а, б), вероятность правильного приема сигнала в них $P(C_{\text{пр}})$ равна произведению вероятностей $P(C_{\text{пр}1})$, $P(C_{\text{пр}2})$ правильного приема сигнала в каждом из каналов:

$$P(C_{\text{пр}}) = P(C_{\text{пр}1}) \cdot P(C_{\text{пр}2}) = P^2(C_{\text{пр}1\,2}) = [1 - P(C_{\text{ош}1,2})]^2 \quad (9).$$

Тогда вероятность ошибки приема сигнала в двух квадратурных каналах одновременно $P(C_{\text{ош}})$ (вероятность ошибки формирования оценок амплитуды и начальной фазы) равна:

$$P(C_{\text{ош}}) = 1 - P(C_{\text{пр}}) = 1 - [1 - P(C_{\text{ош}1,2})]^2 \quad (10).$$

В соответствии с неравенством (8) оценка верхней границы вероятности ошибки приема сигнала в целом будет определяться соотношением:

$$P(C_{\text{ош}}) \leq 2^{-(N-1)} \quad (11).$$

Соответственно нижняя граница вероятности правильного приема сигнала в целом (вероятности правильного формирования оценок амплитуды и начальной фазы) $P(C_{\text{пр}})$ будет определяться неравенством:

$$P(C_{\text{пр}}) \geq 1 - 2^{-(N-1)} \quad (12).$$

Оценим показатели качества обнаружения амплитудно-фазоманипулированного сигнала на фоне гауссовской помехи (шума) в условиях их взаимодействия в пространстве сигналов со свойствами L-группы. Решение об обнаружении сигнала γ_1 (или его необнаружении γ_0) принимается по оценке амплитуды $\hat{A}$ в сравнении ее с порогом обнаружения $l(F)$, значение которого определяется условной вероятностью ложной тревоги F и является фиксированной величиной: $\hat{A} > l(F)|_{\gamma 1}$, $\hat{A} < l(F)|_{\gamma 0}$. Расчет показателей качества обнаружения произведем в предположении, что начальная фаза сигнала φ принадлежит интервалу $[0,\pi/2]$, то есть оценка амплитуды в этом случае определяется статистикой (5а).

Известно, что функция распределения вероятностей $F_\xi(z)$ и плотность распределения вероятностей $p_\xi(z)$ случайной величины ξ, являющейся наименьшей из выборки одинаково распределенных случайных величин $\xi_1,....\xi_n$, каждая с функцией распределения вероятностей (ФРВ) $F(z)$ и плотностью распределения вероятностей (ПРВ) $p(z)$ [14] $\xi=\bigwedge_{i=1}\xi_i=\min[\xi_1,...,\xi_n]$, определяются выражениями:

$$F_\xi(z)=1-[1-F(z)]^n \quad (13а),$$

$$p_\xi(z)=np(z)\ [1-F(z)]^{n-1} \quad (13б).$$

Тем не менее, даже в предположении нормальности распределения случайных величин $\{n_{1,2}(t_i)\}$, получить точное выражение ПРВ или ФРВ оценки амплитуды $\hat{A}$ (5а) для расчета условной вероятности ложной тревоги F практически не представляется возможным. Между тем, нахождение условной ПРВ оценки амплитуды при условии отсутствия полезного сигнала ($s(t)=0$) в принимаемом случайном процессе $x(t)=n(t)$ достаточно просто на основе следующей теоремы [15, 16], которая приводится в упрощенном варианте.

Теорема 1. *Пусть случайные величины $\xi_1,....\xi_n$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения вероятностей $F(x)$ и плотностью распределения вероятностей $p(x)$, причем ПРВ $p(x)$ симметрично относительно нуля: $p(x)=p(-x)$. Тогда медианная оценка $\tilde{X}_n$ центра симметрии ПРВ сходится по распределению к случайной величине с нормальным распределением с математическим ожиданием $m=0$ и дисперсией $D=1/(4\,p^2(0)n)$.*

Осуществим преобразование $g(\cdot)$ над данной выборочной совокупностью:

$$g(\xi_j)=\begin{cases}\xi_j, \xi_j\geq 0\\ 0,\ \xi_j<0\end{cases}$$

Тогда наименьшая $\eta=\min\{g(\xi_1),...,g(\xi_n)\}$ из $n-$независимых случайных величин $g(\xi_1),...,g(\xi_n)$ будет сходиться по распределению к случайной величине с ПРВ $p_\eta(y)$:

$$p_\eta(y)=2(1-2^{-n})\delta(y)+(2\cdot 2^{-n}/\sqrt{2\pi D_\eta})\exp\left(-y^2/2D_\eta\right),\ y\geq 0 \quad (14),$$

$$D_\eta=D=1/(4\,p^2(0)n) \quad (14а),$$

где $p(0)$ – значение ПРВ случайной величины ξ_j при $x=0$.

Применительно к условным ПРВ $p(y,\hat{s}_{1,2}/s=0)$ оценок сигналов в квадратурных каналах $\hat{s}_{1,2}$ это означает следующее. Поскольку по условию распределение мгновенных значений помехи в каналах $n_{1,2}(t_i)$ считаем нормальным с нулевым математическим ожиданием и дисперсией D_n, с учетом (14, 14а) условные ПРВ $p(y,\hat{s}_{1,2}/s=0)$ оценок сигналов в квадратурных каналах определяются выражениями:

$$p(y,\hat{s}_{1,2}/s\equiv 0)=2(1-2^{-N})\delta(y)+(2\cdot 2^{-N}/\sqrt{2\pi D_{1,2}})\exp\left(-y^2/2D_{1,2}\right) \quad (15),$$

где y>0; $D_{1,2}=(4(1/\sqrt{2\pi D_n})^2 N)^{-1}=\pi D_n/2N$; D_n – дисперсия помехи; N – число периодов полезного сигнала, используемых при обработке в течение длительности сигнала T.

С учетом (15) и (5а) условная ПРВ $p(z,\hat{A}/s=0)$ оценки амплитуды сигнала при условии его отсутствия будет определяться выражением:

$$p(z,\hat{A}/s\equiv 0)=2(1-2^{-N})\delta(z)+(z\cdot 2^{-N}/D_{1,2})\exp\left(-z^2/2D_{1,2}\right),\ z\geq 0 \quad (16).$$

Условная вероятность ложной тревоги F в соответствии с (16) будет равна:

$$F=2^{-N}\exp\left(-l^2(F)/(2D_{1,2})\right) \quad (17),$$

где $l(F)$ – порог обнаружения как функция вероятности ложной тревоги.

Условная ПРВ $p(u,\hat{\varphi}/s=0)$ оценки начальной фазы при отсутствии сигнала определяется выражением:

$$p(u,\hat{\varphi}/s\equiv 0)=[1(u)-1(u-2\pi)]/2\pi \quad (18),$$

где $1(u)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда.

Определим условную вероятность правильного обнаружения D сигнала $s(t)$ в смеси $x(t)=s(t)\vee n(t)$. Для этого получим выражение для условной ПРВ $p(z,\hat{A}/s)$ оценки амплитуды при условии присутствия сигнала $s(t)$ в смеси $x(t)$. Учитывая то, что при условии правильного приема сигнала (правильного формирования оценок сигнала $\hat{s}_{1,2}$ в обоих квадратурных каналах) ПРВ оценки амплитуды $\hat{A}$ описывается дельта-функцией, условная ПРВ оценки амплитуды $p(z,\hat{A}/s)$ будет определяться выражением:

$$p(z,\hat{A}/s)=P(C_{\text{ош}})p(z,\hat{A}/s\equiv 0)+P(C_{\text{пр}})\delta(z-A) \quad (19),$$

где $P(C_{\text{ош}})$, $P(C_{\text{пр}})$ – вероятности ошибочного и правильного приема сигнала в целом, определяемые соотношениями (11) и (12) соответственно; $p(z,\hat{A}/s\equiv 0)$ – условная ПРВ оценки амплитуды сигнала в его отсутствие, определяемая выражением (16); $\delta(z\text{-}A)$ – условная ПРВ оценки $\hat{A}$ амплитуды A, при условии правильного приема сигнала в целом (правильного формирования оценок сигнала $\hat{s}_{1,2}$ в квадратурных каналах).

В свою очередь, условная ПРВ $p(u,\hat{\varphi}/s)$ оценки $\hat{\varphi}$ начальной фазы φ сигнала равна:

$$p(u,\hat{\varphi}/s) = P(C_{\text{ош}})p(u,\hat{\varphi}/s \equiv 0) + P(C_{\text{пр}})\delta(u-\varphi) \qquad (20),$$

где $p(u,\hat{\varphi}/s=0)$ – условная ПРВ оценки начальной фазы сигнала в его отсутствие, определяемая выражением (18);

$\delta(u\text{-}\varphi)$ – условная ПРВ оценки начальной фазы при условии правильного приема сигнала в целом (правильного формирования оценок сигнала в квадратурных каналах).

При выборе амплитуды A сигнала $s(t)$ больше порога обнаружения $A>l(F)$ условная вероятность правильного обнаружения D в соответствии с (19) будет определяться выражением:

$$D = P(C_{\text{ош}})\cdot F + P(C_{\text{пр}}) \qquad (21).$$

Условная вероятность правильного обнаружения D, так же как и вероятности $P(C_{\text{ош}})$, $P(C_{\text{пр}})$, практически не зависит от отношения сигнал–шум, и при достаточно малых F описывается функцией:

$$D(A) = P(C_{\text{пр}})\cdot 1[A\text{-}l(F)] \qquad (22),$$

где $1(z)$ – единичная ступенчатая функция Хевисайда.

В соответствии с (12), нижняя граница условной вероятности правильного обнаружения будет определяться соотношением:

$$D \geq 1 - 2^{-(N-1)} \qquad (23),$$

где $N=Tf_0$ – число периодов узкополосного полезного сигнала $s(t)$, используемых при обработке на интервале его существования.

Таким образом, вероятность правильного обнаружения (21) амплитудно-фазоманипулированного сигнала на фоне помех (шумов) в условиях их взаимодействия в пространстве сигналов со свойствами L-группы определяется вероятностями правильного $P(C_{\text{пр}})$ и ошибочного $P(C_{\text{ош}})$ приема сигнала и является инвариантом по отношению к условиям параметрической и непараметрической априорной неопределенности при F=const.

Оценим показатели качества различения амплитудно-фазоманипулированных сигналов на фоне помех (шумов) в условиях их взаимодействия в пространстве сигналов со свойствами L-группы. Для характеристики качества различения сигналов из совокупности $\{s_i\}$ воспользуемся метрикой между ПРВ $p_{\hat{s}_i}(y)$, $p_{\hat{s}_j}(y)$ оценок $\hat{s}_i$, $\hat{s}_j$ сигналов s_i, s_j, $i\neq j$:

$$d_{ij}[p_{\hat{s}_i}(y), p_{\hat{s}_j}(y)] = 0.5\int\limits_{Y}\left|p_{\hat{s}_i}(y) - p_{\hat{s}_j}(y)\right|dy \qquad (24),$$

где $p_{\hat{s}_i}(y) = p(y_1, \hat{A}_i / s_i) \cdot p(y_2, \hat{\varphi}_i / s_i)$; $p(y_1, \hat{A}_i / s_i)$ – условная ПРВ оценки амплитуды сигнала s_i; $p(y_2, \hat{\varphi}_i / s_i)$ – условная ПРВ оценки начальной фазы сигнала s_i.

Условные ПРВ оценок амплитуды и начальной фазы сигнала s_i определяются выражениями:

$$p(y_1, \hat{A}_i / s_i) = P(C_{\text{ош},i}) p(y_1, \hat{A}_i / s_i \equiv 0) + P(C_{\text{пр},i}) \delta(y_1 - A_i) \quad (25),$$

$$p(y_2, \hat{\varphi}_i / s_i) = P(C_{\text{ош},i}) p(y_2, \hat{\varphi}_i / s_i \equiv 0) + P(C_{\text{пр},i}) \delta(y_2 - \varphi_i) \quad (26),$$

где $P(C_{\text{ош},i})$, $P(C_{\text{пр},i})$ – вероятности ошибки и правильного приема сигнала s_i в целом, определяемые соотношениями (11) и (12); $p(y_1, \hat{A}_i / s_i \equiv 0)$, $p(y_2, \hat{\varphi}_i / s_i \equiv 0)$ – условные ПРВ оценок амплитуды $\hat{A}_i$ и начальной фазы $\hat{\varphi}_i$ сигнала s_i в его отсутствии, определяемые выражениями (16) и (18); $\delta(y_1 - A_i)$, $\delta(y_2 - \varphi_i)$ – условные ПРВ оценок амплитуды и начальной фазы сигнала s_i при условии его правильного приема в целом.

Считая вероятности $P(C_{\text{ош},i})$, $P(C_{\text{пр},i})$ одинаковыми для сигналов s_i, s_j, $i \neq j$, метрика d_{ij} (24) с учетом (25), (26) будет равна:

$$d_{ij}^{A,\varphi}[p_{\hat{s}_i}(y), p_{\hat{s}_j}(y)] = P^2(C_{\text{пр}}) + 2P(C_{\text{пр}})P(C_{\text{ош}}) = $$
$$= P(C_{\text{пр}}) + P(C_{\text{пр}})P(C_{\text{ош}}) \quad (27).$$

Выражение (27) определяет показатели качества различения амплитудно-фазоманипулированных сигналов на фоне гауссовских помех (шумов) по двум информационным параметрам одновременно – амплитуде и начальной фазе.

Показатели качества различения сигналов из совокупности $\{s_i\}$ лишь по одному информационному параметру – амплитуде или начальной фазе будут определяться выражениями:

$$d_{ij}^{A}[p_{\hat{A}_i}(y_1), p_{\hat{A}_j}(y_1)] = 0.5 \int_{Y_1} |p(y_1, \hat{A}_i / s_i) - p(y_1, \hat{A}_j / s_j)| dy_1 \quad (28),$$

$$d_{ij}^{\varphi}[p_{\hat{\varphi}_i}(y_2), p_{\hat{\varphi}_j}(y_2)] = 0.5 \int_{Y_2} |p(y_2, \hat{\varphi}_i / s_i) - p(y_2, \hat{\varphi}_j / s_j)| dy_2 \quad (29).$$

С учетом (25) и (26), показатели качества различения сигналов для оценок (5а, б) в соответствии с (13) будут определяться соотношениями:

$$d_{ij}^{A}[p_{\hat{A}_i}(y_1), p_{\hat{A}_j}(y_1)] = P(C_{\text{пр}}) \geq 1 - 2^{-(N-1)} \quad (30а),$$

$$d_{ij}^{\varphi}[p_{\hat{\varphi}_i}(y_2), p_{\hat{\varphi}_j}(y_2)] = P(C_{\text{пр}}) \geq 1 - 2^{-(N-1)} \quad (30б),$$

где N – число периодов полезного сигнала $s(t)$, используемых при обработке.

Таким образом, показатели качества различения (27), (30а,б) амплитудно-фазоманипулированных сигналов на фоне помех (шумов) в условиях их взаимодействия в пространстве сигналов со свойствами L-группы определяются вероятностями правильного $P(C_{пр})$ и ошибочного $P(C_{ош})$ приема сигналов и являются инвариантами по отношению к условиям параметрической и непараметрической априорной неопределенности.

Определим показатели качества оценивания $q_{\hat{A}}$, $q_{\hat{\varphi}}$ параметров полезного сигнала с неизвестными неслучайными амплитудой A и начальной фазой j на фоне помех (шумов) в условиях их взаимодействия в пространстве сигналов со свойствами L-группы. Для характеристики качества оценивания параметров сигналов воспользуемся метрикой d между ПРВ $p(z,\hat{\lambda}/s)$, $p(z,\hat{\lambda}_0/s)$ оценки $\hat{\lambda}$ параметра λ сигнала s при использовании совокупности отсчетов и единственного отсчета в ходе обработки соответственно [17]:

$$q_{\hat{\lambda}} = d[p(z,\hat{\lambda}/s), p(z,\hat{\lambda}_0/s)] = 0.5\int\limits_{Z}\left|p(z,\hat{\lambda}/s) - p(z,\hat{\lambda}_0/s)\right|dz \qquad (31).$$

Определим сначала показатель качества оценивания амплитуды $q_{\hat{A}}$ амплитудно-фазоманипулированного сигнала на фоне помех (шумов) при использовании структурообразующей функции алгоритма обработки (4):

$$q_{\hat{A}} = d[p(z,\hat{A}/s), p(z,\hat{A}_0/s) = 0.5\int\limits_{Z}\left|p(z,\hat{A}/s) - p(z,\hat{A}_0/s)\right|dz \qquad (32),$$

$$p(z,\hat{A}/s) = P(C_{ош})p(z,\hat{A}/s \equiv 0) + P(C_{пр})\delta(z - A) \qquad (32а),$$

где $p(z,\hat{A}/s)$ – ПРВ оценки амплитуды при использовании совокупности из N отсчетов $\{s_i \vee n_i\}, i = 0,1,...,N-1$ в ходе обработки; $P(C_{ош})$, $P(C_{пр})$ – вероятности ошибочного и правильного приема сигнала в целом, определяемые соотношениями (11), (12) соответственно; $p(z,\hat{A}_0/s)$ – ПРВ оценки $\hat{A}_0$ амплитуды $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$ при использовании единственного отсчета $\{s_i \vee n_i\}$, i=0 в ходе обработки, определяемая распределением Релея-Райса:

$$p(z,\hat{A}_0/s) = \delta(z) + (z/2D_n)\exp\left(-(z^2 + A^2)/2D_n\right)I_0(zA/D_n) \qquad (32б),$$

где $z \geq 0$; $A_{1,2}$ – значения амплитуды сигнала в квадратурных каналах; D_n – дисперсия помехи.

С учетом (32а,б), показатель качества оценивания амплитуды сигнала $q_{\hat{A}}$ (32) равен:

$$q_{\hat{A}} = d[p(z,\hat{A}/s), p(z,\hat{A}_0/s)] = P(C_{пр}) \qquad (33).$$

Определим показатель качества оценивания начальной фазы $q_{\hat{\varphi}}$ полезного сигнала с неизвестными неслучайными амплитудой и начальной фазой на фоне помех (шумов) при использовании структурообразующей функции алгоритма обработки (4):

$$q_{\hat{\varphi}} = d[p(u,\hat{\varphi}/s), p(u,\hat{\varphi}_0/s)] = 0.5\int_U |p(u,\hat{\varphi}/s) - p(u,\hat{\varphi}_0/s)|du \quad (34),$$

$$p(u,\hat{\varphi}/s) = P(C_{\text{ош}})p(u,\hat{\varphi}/s \equiv 0) + P(C_{\text{пр}})\delta(u-\varphi) \quad (34а);$$

$$p(u,\hat{\varphi}_0/s) = [1(u) - 1(u-2\pi)]/2\pi \quad (34б),$$

где $p(u,\hat{\varphi}/s)$ – ПРВ оценки начальной фазы при использовании совокупности из отсчетов в ходе обработки; $P(C_{\text{ош}})$, $P(C_{\text{пр}})$ – вероятности ошибочного и правильного приема сигнала в целом, определяемые соотношениями (11) и (12) соответственно; $p(u,\hat{\varphi}_0/s)$ – ПРВ оценки начальной фазы при использовании единственного отсчета в ходе обработки, определяемая равновероятным распределением.

С учетом (34а, б), показатель качества оценивания начальной фазы сигнала (34) равен:

$$d[p(u,\hat{\varphi}/s), p(u,\hat{\varphi}_0/s)] = P(C_{\text{пр}}) \quad (35).$$

Таким образом, показатели качества оценивания информационных параметров (33), (35) амплитудно-фазоманипулированного сигнала на фоне помех (шумов) в условиях их взаимодействия в пространстве сигналов со свойствами L-группы определяются вероятностью ошибки приема $P(C_{\text{ош}})$ (вероятностью правильного приема $P(C_{\text{пр}})$) сигнала и являются инвариантами по отношению к условиям параметрической и непараметрической априорной неопределенности.

Обобщив полученные результаты, характеризующие качество решения задач обнаружения, различения и оценивания параметров амплитудно-фазоманипулированных сигналов на фоне помех (шумов) в условиях их взаимодействия в пространстве сигналов со свойствами L-группы, можно сделать следующий вывод. Показатели качества оптимальной обработки сигналов в пространстве сигналов со свойствами L-группы (21), (27), (30а, б), (33), (35) определяются вероятностью ошибочного приема $P(C_{\text{ош}})$ (вероятностью правильного приема $P(C_{\text{пр}})$) сигналов, практически не зависят от отношения сигнал-помеха (сигнал-шум) $q^2 = E/N_0$ и являются инвариантами по отношению к условиям параметрической и непараметрической априорной неопределенности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Богданович В.А.* Теория устойчивого обнаружения, различения и оценивания сигналов / В.А. Богданович, А.Г. Вострецов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 320 с.

2. *Куликов Е.И.* Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е.И. Куликов, А.П. Трифонов. – М. : Сов. Радио, 1978. – 428 с.

3. *Сейдж Э.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении / Э. Сейдж, Дж. Мелс ; пер. с англ. ; под ред. Б.Р. Левина. – М. : Связь, 1976. – 496 с.

4. *Трифонов А.П.* Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А.П. Трифонов, Ю.С. Шинаков. – М. : Радио и связь, 1986. – 264 с.

5. *Сосулин Ю.Г.* Теория обнаружения и оценивания стохастических сигналов / Ю.Г. Сосулин. – М. : Сов. Радио, 1978. – 320 с.

6. *Амиантов И.Н.* Избранные вопросы статистической теории связи / И.Н. Амиантов. – М. : Сов. Радио, 1971. – 416 с.

7. *Тихонов В.И.* Оптимальный прием сигналов / В.И. Тихонов. – М. : Радио и связь, 1983. – 320 с.

8. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – М. : Радио и связь, 1989. – 656 с.

9. *Биркгоф Г.* Теория решеток / Г. Биркгоф. – М. : Наука, 1984. – 568 с.

10. Общая алгебра / В.А. Артамонов, В.Н. Салий, Л.А. Скорняков и др. ; под общ. ред. Л.А. Скорнякова. – Т. 2. – М. : Наука, 1991. – 480 с.

11. *Попов А.А.* Различение детерминированных сигналов на фоне помехи в пространстве сигналов со свойствами алгебраической решетки / А.А. Попов // Вісник Державного університету інформаційно-комунікаційних технологій. – 2011. – № 2. – С. 175–184.

12. Пат. 56925 Украины, МПК H04B15/00. Устройство отображения пространства сигналов / Попов А.А. ; опубл. 25.01.11, Бюл. № 2.

13. Пат. 60051 Украины, МПК H04B15/00. Способ отображения пространства сигналов / Попов А.А. ; опубл. 10.06.11, Бюл. № 11.

14. *Тихонов В.И.* Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / В.И. Тихонов, В.Н. Харисов. – М. : Радио и связь, 1991. – 608 с.

15. *Леман Э.* Теория точечного оценивания / Э. Леман. – М. : Наука, 1991. – 448 с.

16. *Закс Ш.* Теория статистических выводов / Ш. Закс. – М. : Мир, 1975. – 776 с.

17. *Попов А.А.* Сравнительный анализ оценок неизвестного неслучайного параметра сигнала в линейном пространстве и *К*-пространстве / А.А. Попов // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 2008. – № 7. – С. 29–39.

Отримано 19.05.2011