УДК 621.391

С.Л. Волков, кандидат технічних наук
Н.Ф. Казакова, кандидат технічних наук

ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧНОЇ РЕГУЛЯРИЗАЦІЇ

Здійснюється теоретичне обґрунтування суті статистичного методу регуляризації. Наведено переваги застосування методу при проектуванні та експлуатації телекомунікаційних мереж.

Ключові слова: *статистична регуляризація, якість обслуговування, неповнота, недостовірність.*

Осуществлено теоретическое обоснование сущности статистического метода регуляризации. Приведены преимущества применения метода при проектировании и эксплуатации телекоммуникационных сетей.

Ключевые слова: *статистическая регуляризация, качество обслуживания, неполнота, недостоверность.*

Theoretical statement of the regularization statistical method essence is resulted. Advantages of an application of this method in designing and service of telecommunications networks are proved.

Keywords: *statistical regularization, quality of service, incompleteness, unauthenticity.*

На практиці достатньо часто трапляються завдання визначення вхідних параметрів телекомунікаційної системи, що задовольняють заданим вихідним характеристикам. Необхідність вирішення таких завдань, необхідних для забезпечення відповідного QoS (*Quality of Service – якість обслуговування*), постає на різних етапах функціонування телекомунікаційної мережі й полягає в послідовному вирішенні низки близьких завдань із вхідними даними, які змінюються.

Опис телекомунікаційної системи в загальному вигляді можна представити як відображення певного набору параметрів на деякий простір характеристик [1]. Відповідне операторне рівняння має вигляд:

$$AX=Y, \tag{1}$$

де A – лінійний оператор, який описує роботу системи (прямокутна матриця відповідної розмірності), X – шукана вектор-функція, Y – відома вектор-функція, яка є елементами метричних просторів параметрів системи U і характеристик системи F відповідно:

$$X=\{x_1,x_2,...,x_n\}\in U,\ Y=\{y_1,y_2,...,y_m\}\in F\ .$$

Як параметри x розглядаються абонентська ємкість та продуктивність вузлів телекомунікаційної системи, їх зв'язність та ін. Характеристики системи y – це пропускна здатність телекомунікаційної мережі, кількість абонентів, що підключаються, відсоток втрачених пакетів, час затримки і т.д.

За своєю суттю, оптимізація телекомунікаційної системи за параметрами якості обслуговування належить до класу некоректно (погано) поставлених завдань. Першим систематичне вивчення таких завдань здійснив Ж. Адамар, який тоді ж увів поняття коректної постановки завдань математичної фізики, намагаючись з'ясувати ті типи крайових умов, які є найбільш природними для різних диференціальних рівнянь. Протягом тривалого часу багато учених вважали некоректно поставлені завдання нецікавими і такими, що не мають практичного значення. Зокрема, завдання Коші для рівняння Лапласа наводилося в Адамара, а потім ще в ряді підручників як приклад завдання, позбавленого фізичного сенсу. Необхідність розгляду некоректно поставлених завдань і правильна їх постановка вперше була показана А.М. Тихоновим. При систематичному дослідженні таких завдань основну роль відіграють умови єдиності та стійкості. У зв'язку з цим, було введено ряд нових понять, таких як коректність за Тихоновим, квазірішення, регуляризація. Одночасно були розроблені алгоритми чисельного рішення.

На сьогодні сформульовано велику кількість некоректно поставлених завдань, які належать як до класичних розділів математики, так і до різних класів важливих прикладних завдань. Цими завданнями є вирішення лінійних інтегральних рівнянь першого роду, завдання підсумовування рядів Фур'є, коефіцієнти яких відомі лише приблизно, завдання оптимального управління, вирішення вироджених і погано обумовлених систем лінійних рівнянь алгебри та вирішення інших важливих прикладних проблем.

У зв'язку з викладеним вище, для оптимізації телекомунікаційної системи за параметрами якості обслуговування (тобто для забезпечення заданого QoS) сформулюємо й отримаємо регуляризоване рішення саме для вказаного випадку.

Основними публікаціями, у яких проведено аналіз впливу самоподібності мережевого трафіку на показники QoS, а також розглянуто алгоритми оптимізації вхідних параметрів, є роботи [1, 3]. У них наведено результати імітаційного моделювання мовного трафіку й визначено те, що оптимізація, яка полягає в знаходженні екстремуму функціонала нев'язності якості обслуговування, залежить від ступеня самоподібності: зі збільшенням показника Херста H точність оптимізації збільшується, проте при $H \to 1$ точність починає знижуватися. На підставі отриманих чисельних результатів був зроблений висновок про нестійкість знайдених рішень залежно від початкового значення оптимізації. Тут же як досконаліші методи оптимізації були розглянуті алгоритми мінімізації функціонала нев'язності Хука-Джівса (метод прямого пошуку) і функціонала Тихонова. Для досягнення цієї мети також була показана доцільність використання методу Кулакова та алгоритму Нелдера-Міда. Строгий математичний виклад даних методів наведено в [2, 4]. Результати оптимізації параметрів QOS з використанням алгоритму мінімізації функціонала нев'язності Хука-джівса за запропонованою в [2] моделлю, показали, що в досліджуваного функціонала можливе існування декількох локальних мінімумів, а отже, існує вірогідність того, що в процесі моделювання *глобальний мінімум так і не буде знайдений*. Крім того, зміна початкової точки моделювання, проведена для оцінки стійкості отриманих результатів, показала зростання значення функціонала нев'язності майже удвічі, що може свідчити про некоректність моделі в цілому.

Як альтернатива в [4] був розглянутий алгоритм мінімізації функціонала Тихонова. Суть його полягає в побудові сімейства коректних завдань (регуляризуючого сімейства), залежного від параметра регуляризації α, яке володіє тією властивістю, що при $\alpha \to 0$ вирішення коректної задачі спрямоване на дійсне вирішення початкової некоректної задачі. Відомо, що існує дві основні проблеми використання методу регуляризації Тихонова:

– невизначеність з вибором параметра α, значення якого необхідно знати апріорі;

– припущення *про можливість* контролю точної верхньої межі помилки під час експерименту.

На практиці другий пункт може призвести до загладжених рішень, що пов'язано зі значенням фактичної помилки, яка зазвичай менша від свого максимального значення.

Результати імітаційного моделювання телекомунікаційної системи з використанням алгоритму мінімізації функціонала Тихонова заданими апріорними значеннями $0 \leq \alpha \leq 14$ і заданою погрішністю [3] показали незначну зміну функціонала нев'язності при великих значеннях $(\alpha \geq 6)$, що свідчить про стійкість результатів оптимізації. Проте при невеликих значеннях $(\alpha < 6)$ спостерігалося різке зниження стійкості отримуваних рішень, що привело до перевищення заданих за погрішностями вимог до коливань функціонала нев'язності по QoS.

Метою роботи є теоретичний виклад суті статистичного методу регуляризації, строгий математичний опис якого наведено в [2, 5], а також обґрунтування переваги застосування цього методу при проектуванні та експлуатації телекомунікаційних мереж.

Як показано в [6], у статистиці, машинному навчанні та теорії зворотних завдань під *регуляризацією* розуміють додавання до вихідних умов деякої додаткової інформації з метою вирішення некоректно поставленої задачі або запобігання перенавчанню. Ця інформація часто набуває вигляду штрафу за складність моделі. Наприклад, це можуть бути обмеження гладкості результуючої функції або обмеження за нормою векторного простору. З байєсовської точки зору багато методів регуляризації відповідають додаванню деяких апріорних розподілів на параметри моделі. Подібні проблеми виникають в різних областях науки. Наприклад, метод найменших квадратів може бути розглянутий як проста форма регуляризації. Регуляризація Тихонова для інтегральних рівнянь дозволяє балансувати між відповідністю даних і маленькою нормою рішення. Останнім часом зросла популярність методу нелінійної регуляризації.

Метод статистичної регуляризації заснований на використанні в якості апріорних даних інформації про розподіл вірогідності початкових даних, що призводить до заміни точного рішення на деяке наближене. Такий підхід має наступні переваги:

– завдання вирішення некоректного рівняння виступає як завдання обробки експериментальних даних, для якого введення імовірнісних понять є неминучим, оскільки помилка правої частини (1) носить випадковий характер і може бути охарактеризована лише імовірнісним чином;

– статистичний метод дозволяє використовувати попередній досвід, враховуючи його в апріорному розподілі;

– за відсутності апріорної інформації можливе використання наявних припущень про шукану функцію.

Сформулюємо поставлене завдання як завдання математичної статистики. Для цього запишемо (1) в наступному вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = y_i, \ i = \overline{1,m}. \tag{2}$$

Припустимо, що права частина рівняння (2) вимірюється із середньоквадратичною помилкою σ_i, і для конкретизації функції щільності вірогідності помилок припустимо, що σ_i за різних i є незалежними й розподіленими за нормальним законом з математичним очікуванням, рівним нулю. Таке припущення, відповідно до центральної граничної теореми, є цілком виправданим, оскільки число доданків σ_i велике, а внесок кожного в суму – малий. В результаті вимірювань вектора Y при заданому векторі X з врахуванням (2) умовна вірогідність отримання визначається за формулою:

$$P(Y|X) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(y_i - \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j\right)^2}{2\sigma_i^2}}. \tag{3}$$

Ввівши діагональну матрицю помилок W з матричними елементами

$$w_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\sigma_i^2}; \ i,j = 1,m; \ \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases},$$

запишемо умовну вірогідність (3) в наступному вигляді:

$$P(Y|X) = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(X, A^T W A) + (A^T W Y, X)}, \tag{4}$$

де C_1 – не залежна від X константа.

Далі введемо симетричну ненегативну певну матрицю Ω, за допомогою якої утворимо стабілізуючий функціонал

$$\Omega[X] = (X, \Omega X) \tag{5}$$

і побудуємо статистичний ансамбль гладких функцій з параметром гладкості α:

$$P_\alpha(X) = C_\alpha \mathrm{e}^{-\frac{\alpha(X, \Omega X)}{2}}, \tag{6}$$

де константа C_α визначає умову нормування.

Функціонал (5) характеризує ступінь гладкості функції, наприклад, норму її q-ї похідної:

$$\Omega[x(z)] = \int \left[\frac{d^q x(z)}{dz^q} \right]^2 dq,$$

де матриця Ω є кінечно-різницевим еквівалентом введеного функціонала.

Визначимо $P_\alpha(X)$ як апріорну вірогідність для шуканої вектор-функції X і знайдемо рішення в статистичному ансамблі (6) із заданим параметром гладкості α. Для цього за формулою Байеса розрахуємо апостеріорний розподіл для X:

$$P(Y \mid X, \alpha) = \frac{P(X \mid Y) P_\alpha(X)}{\int P(X \mid Y) P_\alpha(X) dx}.$$

Підставляючи (4) і (6), отримуємо:

$$P(Y \mid X, \alpha) = C_2 \, \mathrm{e}^{-\frac{(\alpha, [A^T WA + \alpha\Omega] X) + (A^T WY, X)}{2}}, \tag{7}$$

де C_2 – константа, яка не залежить від X.

Формула (7) при заданому апріорі α дає якнайповніше вирішення цієї задачі. При цьому як відновлена функція X приймається математичне очікування за розподілом (7):

$$M[X_\alpha] = (A^T WA + \alpha\Omega)^{-1} \cdot A^T WY. \tag{8}$$

Помилка відновлення x_i визначається як середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma(x_i) = \sqrt{[(A^T WA + \alpha\Omega)^{-1}]_{ii}}. \tag{9}$$

Наближене значення параметра α отримуємо на підставі (5) та усереднюванням по ансамблю гладких функцій (6):

$$M[X, \Omega X] = \sum_{i,j} \Omega_{ij} M[x_i, x_j] = \sum_{i,j} \Omega_{ij} \frac{(\Omega^{-1})_{ij}}{\alpha} = \frac{n}{\alpha}, \;\; \alpha = \frac{n}{M[X, \Omega X]},$$

де $M[X, \Omega X]$ – приблизне значення функціонала (5) для очікуваного X.

Повніша апріорна інформація про функцію X може бути отримана в результаті проведення серії статистичних вимірювань. Наприклад, при визначенні середньої затримки проходження пакетів в телекомунікаційній системі слід скористатися результатами вимірювань числа користувачів в системі, що виконуються протягом певного проміжку часу. Далі на підставі отриманих вибіркових статистичних даних обчислити середню функцію $X_0 = M[X_{\text{вибірк}}]$ і кореляційну матрицю C з елементами $c_{ij} = M\left[(x_{i\,\text{вибірк}} - x_{0i})(x_{j\,\text{вибірк}} - x_{0j})\right]$.

Оскільки кореляційна матриця відома, то як апріорний розподіл для X можна вибрати такий гасівський розподіл, у якого кореляційна матриця збіжиться з матрицею C:

$$P(X) = const\, e^{-\frac{\left(X, C^{-1}X\right)}{2}}.$$

Таким чином, знання кореляційної матриці для X дає регулюючий функціонал без жодної невизначеності в константі регуляризації.

Замінюючи в (8) і (9) $\alpha\Omega$ на C^{-1}, отримуємо відновлену функцію

$$M[X_\alpha] = (A^T WA + C^{-1})^{-1} \cdot A^T WY$$

та її помилку $\sigma(x_i) = \sqrt{[(A^T WA + C^{-1})^{-1}]_{ii}}$.

Для використання розглянутої методики при програмуванні завдань пошуку безумовного локального екстремуму функції наведемо наступний алгоритм, який складається з двох фаз – *досліджуючий пошук* та *пошук за зразком*. Відзначимо, що цей алгоритм належить до прямих методів, тобто безпосередньо спирається на значення функції [6], але він (при деякій модифікації) дозволяє вирішити вище зазначену задачу *віднайдення глобального мінімуму*.

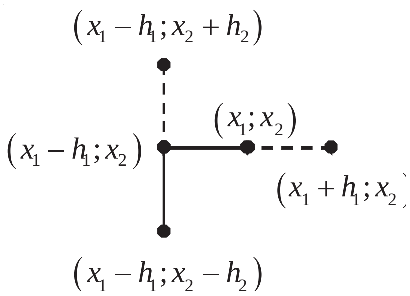
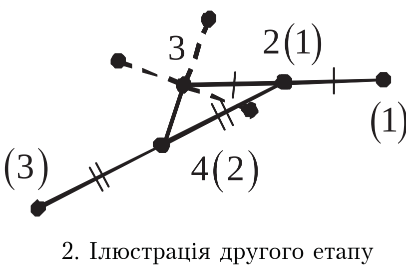


Рис. 1. Ілюстрація першого етапу для двох перших координат

На початковому етапі задаємо стартову точку 1 і кроки h_i за координатами (рис. 1). Далі фіксуємо значення всіх координат, окрім першої. Після цього необхідно обчислити значення функції в точках x_0+h_0 та x_0-h_0, де x_0 – перша координата точки, а h_0 – значення кроку за цією координатою. Після цього пе-реходимо в точку з найменшим значенням функції. У цій точці фіксуємо значення всіх координат, окрім другої; обчислюємо значення функції в точках x_1+h_1 та x_1-h_1; переходимо в точку з найменшим значенням функції і т.д. для всіх координат. У випадку, якщо для якої-небудь координати значення в початковій точці менше, ніж значення для обох напрямів кроку, то крок по цій координаті зменшується. Коли кроки по всіх координатах h_1 стануть меншими від відповідних значень x_i, алгоритм завершується і точка 1 визнається точкою мінімуму.

Таким чином, провівши досліджуючий пошук по всіх координатах, ми отримаємо нову точку з найменшим значенням функції в окрузі: позначимо її 2. Тепер переходимо до другої фази алгоритму (рис. 2).



2. Ілюстрація другого етапу для двох координат

На етапі пошуку за зразком відкладаємо точку 3 в напрямі від 1 до 2 на тій же відстані. Її координати вираховуємо за формулою $\bar{x}_3 = \bar{x}_1 + \lambda(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$, де x_1 – точка з номером i, λ – параметр алгоритму, який обирається рівним 2. Потім в новій точці 3 проводимо досліджуючий пошук, як на першій фазі алгоритму, за винятком того, що крок на цій фазі не зменшується. Якщо на цій фазі в результаті досліджуючого пошуку вдається отримати точку 4, відмінну від точки 3, то точку 2 перейменуємо на 1, а 4 – на 2 і повторюємо пошук за зразком. У випадку, якщо не вдається знайти точку 4, відмінну від точки 3, то точку 2 перейменуємо на точку 1 і повторимо першу фазу алгоритму досліджуючого пошуку.

У дужках відмічено номери точок після перейменування. З рисунку стає зрозумілим, як алгоритм корегує свій напрям залежно від знайдених значень функції.

Вирішення некоректних завдань, зокрема оптимізація вхідних параметрів телекомунікаційної системи за заданими параметрами якості обслуговування, вимагає регуляризації, тобто привнесення деяких додаткових даних про вхідні параметри. Розглянутий метод статистичної регуляризації має відмінну рису, а саме – точну і відповідну сутності досліджуваної телекомунікаційної системи форму, до якої вноситься апріорна інформація. Це, порівняно з методами, запропонованими в [1], дає наступні переваги:

– однозначну статистичну оцінку погрішності результату відновлення;

– однозначну статистичну оцінку параметра регуляризації;

– отримання (на підставі додаткової статистичної апріорної інформації про шукану функцію) регулюючого функціонала без жодної невизначеності в константі регуляризації.

Подальші дослідження передбачають створення імітаційної моделі для підтвердження правильності теоретичних викладень і вироблення рекомендацій для практичного застосування даного методу при аналізі роботи існуючих телекомунікаційних мереж та при проектуванні нових.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Шелухин О.И.* Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения / О.И. Шелухин, А.В. Осин, С.М. Смольский ; под ред. О.И Шелухина. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 386 с.

2. *Грешилов А.А.* Некорректные задачи цифровой обработки информации и сигналов / А.А. Грешилов. – М. : Университетская книга ; Логос, 2009. – 360 с. : ил.

3. *Шелухин О.И.* Оптимизация параметров телекоммуникационных сетей методом регуляризации Тихонова / О.И. Шелухин, А.В. Пружинин, А.В. Осин // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2006. – № 6. – С. 63–72.

4. *Тихонов А.Н.* Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979

5. *Турчин В.Ф.* Использование методов математической статистики для решения некорректных задач / В.Ф. Турчин, В.П. Козлов, М.С. Малкевич // УНФ. – 1970 – Т. 102, вып. 3.

6. Регуляризация (математика) [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http : // ru.wikipedia.org/ wiki/Регуляризация_(математика)

Отримано 29.03.2012