УДК 621.3.019.3

Б.П. Креденцер,
доктор технических наук, профессор
В.В. Вишневский,
доктор технических наук, доцент
Д.И. Могилевич,
кандидат технических наук, профессор

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МИНИМАКСНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ, ХАРАКТЕРИЗИРУЮЩИХ КАЧЕСТВО ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СИСТЕМ С ВРЕМЕННЫМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ, ПРИ ИЗВЕСТНЫХ МОМЕНТАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАРАБОТКИ ДО ОТКАЗА

Для систем с временным резервированием получены формулы для оценки минимаксных (гарантированных) значений функционалов (коэффициента простоя и средних удельных затрат), характеризующих качество технического обслуживания, при известном математическом ожидании и дисперсии наработки до отказа.
Ключевые слова: *оценка значений функционалов, качество технического обслуживания, система с временным резервированием.*

Для систем з часовим резервуванням отримано формули для оцінки мінімаксних (гарантованих) значень функціоналів (коефіцієнта простою і середніх питомих витрат), що характеризують якість технічного обслуговування, при відомому математичному очікуванні і дисперсії напрацювання до відмови.
Ключові слова: *оцінка значень функціоналів, якість технічного обслуговування, система з тимчасовим резервуванням.*

For the systems with a time reservation were obtained the formulas for the evaluation of minimax (guaranteed) of functionals (coefficient of idle time and average unit costs), describing the quality of service, with a known expectation value and variance of time to failure.
Keywords: *evaluation of functionals, quality of service, the system with time redundancy.*

Рассмотрим систему с временным резервированием, включающую в себя объект и пополняемый резерв времени [1]. Предположим, что возникающие в объекте отказы проявляются мгновенно, а для их предупреждения и устранения предусмотрено проведение двух видов восстановительных работ: периодического технического обслуживания, в основу которого положено проведение планово-предупредительных профилактик, и внеплановых аварийно-профилактических ремонтов. Предусмотренный в системе пополняемый резерв времени расходуется при выполнении этих восстановительных работ.

Установим следующую очередность выполнения восстановительных работ. Пусть в момент начала функционирования (t=0) планируется проведение технического обслуживания через неслучайное (детерминированное) время T, определяющее периодичность обслуживания. Если до назначенного времени объект не отказал ($t_о > T$, где $t_о$ – наработка объекта до отказа), то в этот момент начинается обслуживание, продолжительность которого $t_{то}$ – случайная величина с произвольной функцией распределения $F_{то}(x)$ и конечным математическим ожиданием $\bar{t}_{то}$. Если отказ объекта возник раньше (то есть $t_о < T$), то он выявляется мгновенно и сразу же начинается восстановление работоспособности объекта. Время восстановления – случайная величина $t_в$ с произвольной функцией распределения $F_в(x)$ и конечным математическим ожиданием $\bar{t}_в$ (при этом $\bar{t}_в > \bar{t}_{то}$). Если обслуживание (или восстановление) объекта выполняется за допустимое время $t_{д1}$(или $t_д$), определяющее используемый в системе резерв времени, то оно относится к полезному времени, в противном случае (при $t_{то} > t_{д1}$ или $t_в > t_д$) – к простоям системы.

После выполнения каждой из указанных выше восстановительных работ система (объект + резерв времени) полностью обновляется, в момент их окончания очередное техническое обслуживание перепланируется и далее весь процесс обслуживания и ремонта повторяется.

Качество технического обслуживания и ремонта рассматриваемой системы оценивается с помощью двух показателей: комплексного показателя надежности – коэффициента технического использования $K_{ти}(T)$ и стоимостного показателя – средних удельных затрат $\overline{C}(T)$, то есть затрат, приходящихся на единицу времени пребывания системы в подмножестве работоспособных состояний.

Для случая полной исходной информации в работе [2] получены следующие расчётные соотношения для указанных выше показателей качества:

$$K_{ти}(T) = \frac{\int_0^T \overline{F}(t)\,dt + BF(T) + A\overline{F}(T)}{\int_0^T \overline{F}(t)\,dt + CF(T) + D\overline{F}(T)}, \qquad (1)$$

$$\overline{C}(T) = \frac{LF(T) + K\overline{F}(T)}{\int_0^T \overline{F}(t)\,dt + BF(T) + A\overline{F}(T)}, \qquad (2)$$

где $F(t)$ – функция распределения наработки объекта до отказа; T – периодичность обслуживания (детерминированная величина); $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$; A, B, C, D, K, L – постоянные, значения которых зависят от режима использования объекта (непрерывное или эпизодическое использование), от вида функций распределения $F_{то}(x)$ и $F_в(x)$ и значений их параметров, а также от величины резервного времени и значений средних затрат $c_{в}$ и $c_{то}$ за единицу времени выполнения соответственно восстановления и обслуживания объекта.

Пусть функции распределения $F_{в}(x)$ и $F_{то}(x)$ известны (или заданы), а информация о функции распределения наработки объекта до отказа $F(x)$ ограничена знанием только лишь двух начальных моментов

$$s_1 = \bar{t}_{о} = \int_0^{\infty} x dF(x), \quad s_2 = \int_0^{\infty} x^2 dF(x), \tag{3}$$

причем $s_2 < s_1^2$ и $s_2 - s_1^2 = \sigma^2$. Обозначим через K_2 множество функций распределения $F(x)$, удовлетворяющих этому ограничению.

Для сформулированных выше условий, когда функция распределения $F(t)$ неизвестна, необходимо определить граничные значения показателей качества технического обслуживания и ремонта, а также оптимальную периодичность обслуживания T*, при которой эти значения обеспечиваются.

Для удобства решения данной задачи перейдем от коэффициента технического обслуживания $K_{ти}(T)$ к коэффициенту простоя (коэффициенту неготовности) $K_{п}(T)$, используя формулу (1):

$$K_{п}(T) = 1 - K_{ти}(T) = \frac{(C-B)F(T) + (D-A)\overline{F}(T)}{\int_0^{T} \overline{F}(t)\,dt + CF(T) + D\overline{F}(T)}. \tag{4}$$

В этом случае формулы для коэффициента простоя $K_{п}(T)$ и средних удельных затрат $\overline{C}(T)$ имеют одинаковый вид (различаются только значениями параметров при $F(T)$ и $\overline{F}(T) = 1 - F(T)$, а именно [3]:

$$K(F,T) = \frac{\alpha_1 F(T) + \alpha_2 \overline{F}(T)}{m_1 F(T) + m_2 \overline{F}(T) + \int_0^{T} \overline{F}(t)\,dt}, \tag{5}$$

где α_1, α_2, m_1, m_2, s_1, s_2, T − параметры.

Таким образом, необходимо определить, при каких значениях указанных выше параметров существует конечное значение оптимальной периодичности обслуживания $T^* < \infty$ при $F(t) \in K_2$ такое, что

$$T^* = \arg\inf_{T} \sup_{F \in K_2} K(F,T). \tag{6}$$

Оптимальная периодичность обслуживания T* определяет граничное значение (точную нижнюю оценку) функционала $K(F,T)$ (формула (5)).

Введем обозначения: $m=m_2-bm$ и $b=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$ и примем условия $F \in K_2$, $\alpha_1 > \alpha_2$, $m>0$, которые определяются физическим смыслом параметров A, B, C, D, K и L. Тогда выражение (5) преобразуется к виду:

$$K(F,T)=\frac{\alpha_1\left[F(T)+b\overline{F}(T)\right]}{m_1F(T)+m_2\overline{F}(T)+\int\limits_0^T\overline{F}(t)dt}, \tag{7}$$

а задача сведется к следующему: найти минимакс (точную нижнюю границу) дробно-линейного функционала (7), т.е. определить

$$\inf_T \sup_{F\in K_2} K(F,T)=\alpha_1 \inf_T \sup_{F\in K_2}\frac{F(T)+b\overline{F}(T)}{m_1F(T)+m_2\overline{F}(T)+\int\limits_0^T\overline{F}(t)dt}=\alpha_1 \inf_T \sup_{F\in K_2} J(F)=K\left(F,T^*\right), \tag{8}$$

где $b=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$, $\alpha_1>\alpha_2$.

Функционал $J(F)$ в формуле (8) можно представить следующим образом:

$$J(F)=\frac{I_1(F)}{I_2(F)}=\frac{\int\limits_0^\infty f_1(x)\,dF(x)}{\int\limits_0^\infty f_2(x)\,dF(x)}, \tag{9}$$

где

$$f_1(x)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\le x\le T,\\ b & \text{при } x>T,\end{cases} \tag{10}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}x+m_1 & \text{при } 0\le x\le T,\\ T+m_2 & \text{при } x>T.\end{cases} \tag{11}$$

Далее сформулированную выше задачу будем решать в такой последовательности: найдем сначала $\sup\limits_{F\in K_2} J(F)$ – наибольшее значение (точную верхнюю границу) функционала $J(F)$, а затем по формуле (8) − значение минимакса (точную нижнюю оценку) функционала $K(F,T)$.

Обозначим $\sup\limits_{F\in K_2} J(F)$ через r. В работе [4] показано, что если существует наименьшее значение (точная нижняя граница) дробно-линейного функционала рассматриваемого нами вида, равное r, то оно достигается на тех же функциях распределения, на которых достигается или сколь угодно близко приближается наименьшее значение линейного функционала

$$I(F) = I_1(F) - rI_2(F), \tag{12}$$

равное нулю. Подставив выражения $I_1(F)$ и $I_2(F)$ из формулы (9) в (12), получим:

$$I(F) = \int\limits_0^{\infty} [f_1(x) - rf_2(x)]dF(x) = \int\limits_0^{\infty} f_3(x,r)dF(x), \tag{13}$$

где

$$f_3(x,r) = \begin{cases} 1 - r(x+m_1) \text{ при } 0 \le x \le T, \\ b - r(T+m_2) \text{ при } x > T. \end{cases} \tag{14}$$

Отметим, что какой бы не была функция распределения $F \in K_2$, всегда будет справедливо неравенство $r < \dfrac{1}{m_1}$, что легко проверить непосредственно с учетом того, что $m > 0$.

Найдем функции распределения, на которых достигается наименьшее значение функционала $I(F)$ (формула (13)). Для этого необходимо найти многочлен

$$U_{\text{o}}(x) = U_1 + U_2 x + U_3 x^2, \tag{15}$$

обладающий следующими свойствами:

1) $U_{\text{o}}(x_i) = f_3(x_i, r),\ 1 \le i \le k,\ k = \overline{1,3},$ (16)

где x_i – точки роста функций распределения из E_2 ($E_2 \subset K_2$ – подмножество крайних точек выпуклого множества K_2);

2) для всех $x \ge 0$ $U_{\text{o}}(x) \ge f_3(x,r).$ (17)

Если такой многочлен найден, то

$$\sup_{F\in K_2} J(F) = \int\limits_0^{\infty} U_{\text{o}}(x)\,dF(x),$$

а так как $\sup\limits_{F \in K_2} J(F) = 0$, то уравнение

$$\int\limits_0^\infty U_o(x)\,dF(x) = 0 \tag{18}$$

может служить для нахождения наименьшего значения r. Точки x_i, которые удовлетворяют условиям (16) и (17), называют точками роста экстремальных функций распределения. Если в какой-либо из точек x_i функция $f(x)$ будет иметь разрыв, то будем считать, что

$$U_o(x_i) = \max\left(f(x_i - 0), f(x_i + 0)\right).$$

При рассмотрении всех возможных положений точек роста функции распределения из множества E_2 по отношению к T, которые обладают свойствами (16) и (17), можно сделать вывод о возможности только следующего расположения точек: $x_1 \le T, x_2 > T$. В других возможных случаях при выполнении условия (16) условие (17) не выполняется, причем в точке x_2 многочлен (15) должен принимать минимальное значение.

Таким образом, задача нахождения функций распределения, на которых функционал $J(F)$ достигает наибольшего значения $\sup\limits_{F \in K_2} J(F)$, свелась к задаче нахождения многочлена $U_o(x)$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) точка $x_2 > T$ есть точка минимума многочлена $U_o(x)$, причем

$$U_o(x_2) = f_3(x_2, r) = b - r(T + m_2); \tag{19}$$

2) $U_o(x_1) = f_3(x_2, r) = 1 - r(x_1 + m_1)$ при $0 \le x \le T$; (20)

3) $U_o(x) = f_3(x_2, r)$ для всех $x \ge 0$. (21)

Многочлен, который удовлетворяет условиям (19) и (20), имеет вид:

$$U_o(x) = \frac{(1-b) + r(T - x_1 + m_2 - m_1)}{(x_2 - x_1)^2}(x - x_2)^2 + b - r(T + m_2). \tag{22}$$

Для этого многочлена справедливо неравенство:

$$U_o(x) \ge b - r(T + m_2)$$

для всех $x \ge 0$. Поэтому для выполнения условия (21) достаточно, чтобы выполнялось неравенство:

$$U_о(x) \ge 1 - r(T + m_1) \tag{23}$$

для $0 \le x \le T$.

Условие (23) эквивалентно условию:

$$\frac{(1-b) + r(T - x_1 + m_2 - m_1)}{(x_2 - x_1)^2}(x - x_2)^2 + b - r(T + m_2) \ge 0 \tag{24}$$

для $0 \le x \le T$. После несложных преобразований можно прийти к следующему условию:

$$\left[x - \frac{(2x_2 - x_1)((1+b) + r(T - m_1 + m_2) - rx_2^2)}{(1-b) + r(T - x_1 + m_2 - m_1)}\right](x - x_1) \ge 0 \tag{25}$$

для $0 \le x \le T$ или условию

$$(x - x_1)(x - a) \ge 0 \quad \text{при } 0 \le x \le T, \tag{26}$$

где

$$a = \frac{(2x_2 - x_1)((1+b) + r(T - m_1 + m_2) - rx_2^2)}{(1-b) + r(T - x_1 - m_1 + m_2)}.$$

Между значениями x_1 и a возможны следующие соотношения: $x_1 = a$; $x_1 > a$ и $x_1 < a$.

В первом случае ($x_1 = a$) справедливо равенство:

$$x_1 + x_2 = \frac{2(1-b)}{r} + 2(T + m_2 - m_1). \tag{27}$$

При этом условие (26), а следовательно, и условие (23) выполняются при значениях x_1 и x_2, которые удовлетворяют равенству (27).

Во втором случае ($x_1 > a$) справедливо неравенство:

$$x_1 + x_2 > \frac{2(1-b)}{r} + 2(T + m_2 - m_1), \tag{28}$$

при котором условия (26) и (23) выполняются только при x_1=0.

В третьем случае ($x_1 < a$) получаем неравенство:

$$x_1 + x_2 < \frac{2(1-b)}{r} + 2(T + m_2 - m_1), \tag{29}$$

при котором условие (23) выполняется только при x_1=T.

Каждый из рассмотренных выше случаев вместе с условиями на моменты

$$p_1+p_2=1,\ x_1p_1+x_2p_2=s_1,\ x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 = s_2 \tag{30}$$

и условием (18) дает возможность найти точную нижнюю границу исследуемого многочлена, а также экстремальные точки роста x_1 и x_2, как функции от s_1, s_2, b, m_1, m_2, T.

Более детальное исследование возможных соотношений между значениями x_1 и a (x_1=a; $x_1 > a$ и $x_1 < a$), проведенное в работе[5], позволило определить верхнюю границу $\sup\limits_{F\in K_2} J(F)$ для функционала $J(F)$ (формула (9)). Полученный результат в формализованном виде можно представить следующим образом: если известны только первые два момента s_1 и s_2 функции распределения $F(t)$ наработки объекта до отказа, а ее конкретный вид неизвестен, то наибольшее значение (точная верхняя граница) функционала $J(F)$ изменяется в зависимости от значений параметров s_1, s_2, b, m_1, m_2, и T. Эта зависимость показана в табл. 1.

Таблица 1

Область параметров	Точки роста		Супремум
	x_1	x_2	
$D<0$ $0<T<T_1$ $T_1<T$	0 x_0	$B(0)$ $B(x_0)$	$r_1(T)$ $r_2(T)$
$D>0$ $0<T<T_1$ $T_1<T<T_2$	0 x_0	$B(0)$ $B(x_0)$	$r_1(T)$ $r_2(T)$
$D>0$ $T_2<T<T_3$ $T_3<T$	T x_0	$B(T)$ $B(x_0)$	$r_3(T)$ $r_2(T)$

Распределение наибольших значений функционала $J(F)$, $F \in K_2$, в зависимости от параметров s_1, s_2, b, m_1, m_2, T.

В табл. 1 приведены следующие соотношения:

$$D = \left[(1-b)s_1 + m\right]^2 + (2-b)\sigma^2;$$

$$T_1 = \frac{\sigma^2 + bs_1^2 - 2ms_1}{2s_1}; \quad T_{2/3} = \frac{s_1 - m \pm \sqrt{D}}{2-b};$$

$$B(0) = \frac{s_2}{s_1}; \quad B(T) = \frac{s_2 - s_1 T}{s_1 - T};$$

$$x_0 = \frac{\left\lfloor T + m - \sqrt{(T + m - bs_1)^2 + b\sigma^2} \right\rfloor}{b};$$

$$B(x_0) = T + m + s_1(1-b) + \sqrt{(T + m - bs_1)^2 + b\sigma^2};$$

$$r_1(T) = \frac{\sigma^2 + bs_1^2}{Ts_1^2 + m_2 s_1^2 + m_1\sigma^2}; \tag{31}$$

$$r_2(T) = \frac{2}{2m_1 + x_0 + s_1}; \tag{32}$$

$$r_3(T) = \frac{\sigma^2 + b(s_1 - T)^2}{(m_1 + T)\sigma^2 + (s_1 - T)^2(m_2 + T)}, \tag{33}$$

где $b = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$; $m = m_2 - bm_1$; $\sigma^2 = s_2 - s_1^2$.

Из табл. 1 видно, что $r_i(T) = \sup\limits_{F \in K_2} J(F), i = 1,2,3$. Проведем исследование функционалов $r_1(T)$, $r_2(T)$, $r_3(T)$ при изменении параметра T – периодичности проведения технического обслуживания. Нетрудно видеть, что функционалы $r_1(T)$ и $r_2(T)$ являются монотонно убывающими функциями от параметра T, поэтому их минимумы достигаются в крайних правых точках области определения.

Проведем исследование функционала $r_3(T)$. Если существуют значения T из интервала $T_2 < T < T_3$ такие, что

$$r_3(T) < \frac{1}{m_1 + s_1}, \tag{34}$$

то этим будет доказано существование конечного значения оптимальной периодичности технического обслуживания, т.е. доказана целесообразность проведения обслуживания. Неравенство (34) эквивалентно неравенству

$$T^2 - T\left[s_1(1+b) - m\right] + \sigma^2 - s_1(m - bs_1) < 0. \tag{35}$$

Определим корни квадратного трехчлена в неравенстве (35):

$$T'_{1/2} = 0{,}5\left[s_1(1+b) - m \mp \sqrt{\left[s_1(1-b)+m\right]^2 - 4\sigma^2}\,\right]. \tag{36}$$

Сравнивая T_2, T_3 с $T'_{1/2}$, видим, что $(T'_1, T'_2) \in (T_2, T_3)$. Если выполняется условие

$$\left[s_1(1-b)+m\right]^2 > 4\sigma^2, \tag{37}$$

то неравенство (34) выполняется в интервале $T'_1 < T < T'_2$, в котором будет находиться минимальное значение $r_3(T)$. В противном случае выполняется неравенство $r_3(T) > \dfrac{1}{m_1 + s_1}$, т.е. проводить техническое обслуживание нецелесообразно.

Оптимальное значение периодичности обслуживания T^* определяется с помощью процедуры оптимизации выражения $r_3(T)$ (формула (33)). Это можно сделать двумя путями: непосредственным построением графика зависимости $r_3(T)=f(T)$ и определением оптимального значения T^* и соответствующего ему экстремального (минимального) значения выражения $r_3(T)$, а также графическим методом. Для реализации второго пути возьмем производную $\dfrac{dr_3(T)}{dt}$ и приравняем ее нулю. В результате получим следующее уравнение для определения оптимального значения периодичности обслуживания T^*:

$$\sigma^2 s_1\left[s_1(1+b) - 2m\right] + \sigma^4 + b s_1^4 = V(T), \tag{38}$$

где

$$V(T) = 2\left[2bs_1^3 + \sigma^2(2s_1 - m)\right]T - \left[\sigma^2(3-b) + 6bs_1^2\right]T^2 + 4bs_1T^3 - bT^4. \tag{39}$$

Это уравнение целесообразно решать графическим методом.

Для определения минимакса $\inf\limits_{T} \sup\limits_{F\in K_2} J(F)$ (точной нижней оценки) функционала $J(F)$ (выражение 9) можно воспользоваться формулой:

$$\inf_{T\in(T'_1, T'_2)} \sup_{F\in K_2} J(F) = \frac{2b\left(s_1 - T^*\right)}{2m_2\left(s_1 - T^*\right) + T^*\left(4s_1 - 3T^*\right) - s_2}, \tag{40}$$

которая получена в предположении, что оптимальное значение периодичности обслуживания T^* удовлетворяет уравнению (38).

Далее по формуле (8) окончательно определяем точную нижнюю оценку функционала $K(F,T)$:

$$\inf_{T\in(T_1',T_2')}\sup_{F\in K_2}K(F,T)=\alpha_1\inf_{T\in(T_1',T_2')}\sup_{F\in K_2}J(F)=K(F,T^*)=\frac{2\alpha_1 b(s_1-T^*)}{2m_2(s_1-T^*)+T^*(4s_1-3T^*)-s_2}. \quad (41)$$

Переходя к коэффициенту технического использования, получаем точную верхнюю оценку этого показателя:

$$K_{\text{ти}}(F,T^*)=1-K(F,T^*)=1-\frac{2\alpha_1 b(s_1-T^*)}{2m_2(s_1-T^*)+T^*(4s_1-3T^*)-s_2}. \quad (42)$$

Таким образом, получены точные оценки функционалов, характеризующих качество технического обслуживания и ремонта систем с временным резервированием для случая, когда вид функции распределения наработки объекта до отказа неизвестен, а известны только два начальных момента s_1 и s_2 этой функции. Формулы для функционала, характеризующего коэффициент простоя и средние удельные затраты, имеют одинаковый вид, но различаются только входящими в них параметрами (выражение (5)). Для этого функционала получена точная нижняя оценка (формула (41)). Этот результат позволил получить точную верхнюю оценку $K_{\text{ти}}(F,T^*)=1-K(F,T^*)$ для коэффициента технического использования (выражение (42)).

Значения коэффициентов α_1, α_2, m_1, m_2, s_1 и s_2, входящих в рассмотренные выше функционалы, зависят от режима использования объектов (непрерывное или эпизодическое использование) и от предусмотренного в системе пополняемого резерва времени, который может быть величиной случайной $(\tau_{\text{д}})$ или детерминированной ($t_{\text{д}}$=const). Конкретные расчетные соотношения для показателей качества технического обслуживания и ремонта для каждого из указанных выше режимов использования объектов будут приведены в последующих статьях авторов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Креденцер Б.П.* Прогнозирование надежности систем с временной избыточностью / Б.П. Креденцер. – К. : Наукова думка, 1978. – 240 с.

2. Модели технического обслуживания систем с избыточностью / [Б.П. Креденцер, С.В. Ленков, М.И. Резников, В.В. Зубарев] / под ред. Б. П. Креденцера. – К.: Феникс, 2002. – 192с.

3. *Стойкова Л.С.* Выбор оптимального периода обслуживания системы с временным резервом / Л.С. Стойкова // Кибернетика и системный анализ. – 1994. –№ 1. – С. 118–123.

4. *Стойкова Л.С.* Некоторые слабые необходимые условия экстремума интеграла Лебега-Стилтьеса на классе распределений / Л. С. Стойкова // Докл. АН Украины. – 1993. – № 12 – С. 89–96.

5. *Голодников А.Н.* Определения оптимального периода предупредительной замены на основе информации о математическом ожидании и дисперсии времени безотказной работы системы / А. Н. Голодников, Л.С. Стойкова // Кибернетика. – 1978. – № 3. – С. 110–118.