

УДК 62-55:681.515

В.И. Гостев, доктор технических наук,
Н.И. Кунах, доктор технических наук,
О.В. Невдачина, аспирант ГУИКТ,
А.С. Артющик, аспирант ГУИКТ

АППРОКСИМАЦИЯ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ЗВЕНА ПАДЕ n -ГО ПОРЯДКА (ПРИБЛИЖЕНИЕМ ПАДЕ n -ГО ПОРЯДКА) ЗВЕНА ЧИСТОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ ДЛЯ AQM-СИСТЕМ

В работе исследована методом логарифмических частотных характеристик комплексная передаточная функция звена Паде n -го порядка, которое аппроксимирует звено чистого запаздывания в системах активного управления очередью пакетов сетей TCP/IP.

Ключевые слова: аппроксимация, комплексная передаточная функция, звено Паде n -го порядка, AQM-системы.

У роботі досліджено методом логарифмічних частотних характеристик комплексну передавальну функцію ланки Паде n -го порядку, яка апроксимує ланку чистого запізнювання в системах активного управління чергою пакетів в мережах TCP/IP.

Ключові слова: апроксимація, комплексна передавальна функція, ланка Паде n -го порядку, AQM-системи.

In paper the complex transfer function of link of Pade- n order which approximates a link of pure delay in the systems of an active management of the turn of packages of networks TCP/IP is investigated by a method of logarithmic frequency characteristics.

Keywords: approximation, complex transfer function, link of Pade- n order, AQM-system.

Во многих работах [1–4] системы активного управления очередью пакетов (AQM-системы) в сетях TCP/IP исследуются как системы автоматического управления с обратной связью. Схема линеаризованной AQM системы управления приведена на рис. 1. Объект управления в этой системе имеет следующие параметры: C – емкость связи (пакеты/сек), N – коэффициент нагрузки – **load-factor** (число TCP сессий), q – предполагаемая (средняя) длина очереди (в пакетах), $R_o = q/C + T_p$ – время следования туда и обратно – **round trip time** (в сек), T_p – задержка распространения (в сек), p – вероятность маркировки/отбрасывания пакетов. Задача регулятора – обеспечить устойчивость и качественные показатели системы управления. Во-первых, у системы должен быть приемлемый переходный процесс. Во-вторых, регулятор должен обеспечить робастность системы к вариациям параметров модели.

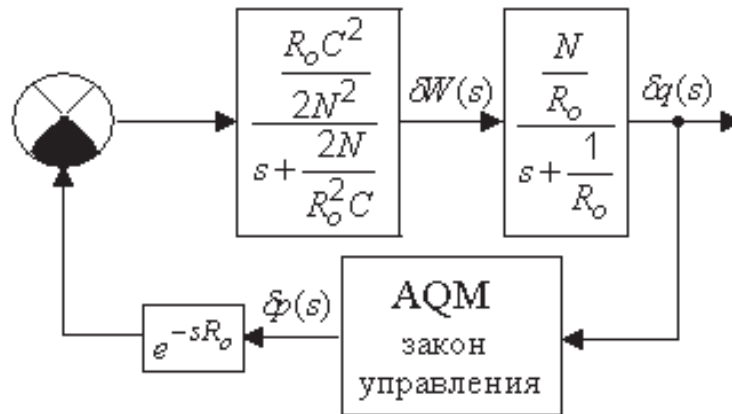


Рис. 1. Блок-схема лінеаризованої AQM системи управління

Анализ устойчивости и робастности AQM-систем значительно упрощается, если звено чистого запаздывания аппроксимировать приближением **Паде**. В работе рассмотрены различные приближения **Паде** и изучается вопрос о точности такого приближения.

Обозначим передаточную функцию звена **Паде** любого порядка как $K_{pade_n}(s)$. Тогда можно записать для звена чистого запаздывания:

приближение **Паде** первого порядка

$$e^{-sR_o} \approx K_{pade1}(s) = (1 - \frac{R_o}{2}s) / (1 + \frac{R_o}{2}s), \quad (1)$$

приближение **Паде** второго порядка

$$e^{-sR_o} \approx K_{pade2}(s) = (1 - \frac{R_o}{2}s + \frac{R_o^2}{12}s^2) / (1 + \frac{R_o}{2}s + \frac{R_o^2}{12}s^2), \quad (2)$$

приближение **Паде** третьего порядка

$$\begin{aligned} e^{-sR_o} \approx K_{pade3}(s) = \\ = (1 - \frac{R_o}{2}s + \frac{R_o^2}{10}s^2 - \frac{R_o^3}{120}s^3) / (1 + \frac{R_o}{2}s + \frac{R_o^2}{10}s^2 + \frac{R_o^3}{120}s^3), \end{aligned} \quad (3)$$

приближение **Паде** четвертого порядка

$$\begin{aligned} e^{-sR_o} \approx K_{pade4}(s) = \\ = (1 - \frac{R_o}{2}s + \frac{3R_o^2}{28}s^2 - \frac{R_o^3}{84}s^3 + \frac{R_o^4}{1680}s^4) / (1 + \frac{R_o}{2}s + \frac{3R_o^2}{28}s^2 + \frac{R_o^3}{84}s^3 + \frac{R_o^4}{1680}s^4). \end{aligned} \quad (4)$$

Чтобы определить передаточную функцию звена **Паде** порядка N , т.е. $K_{pade_n}(s)$, можно использовать следующую программу **MATLAB**:

```
Rdelay=1; N=;
[humpade,denpade]=pade(Rdelay,N);
tfpade=tf(humpade,denpade)
```

Например, для $N=2$ эта программа **MATLAB** дает следующий результат:

Transfer function:

$$\frac{s^2 - 6s + 12}{s^2 + 6s + 12}$$

Теперь числитель и знаменатель полученной передаточной функции надо разделить на свободный член 12 и произвести замену переменной s на $R_o s$. В результате получим

$$K_{pade2}(s) = \frac{+\frac{R_o^2}{12}s^2 - \frac{R_o}{2}s + 1}{+\frac{R_o^2}{12}s^2 + \frac{R_o}{2}s + 1}$$

Для $N=3$ эта программа **MATLAB** дает следующий результат:

Transfer function:

$$\frac{-s^3 + 12s^2 - 60s + 120}{s^3 + 12s^2 + 60s + 120}$$

Числитель и знаменатель полученной передаточной функции делим на свободный член 120 и производим замену переменной s на $R_o s$. В результате получим

$$K_{pade3}(s) = \frac{-\frac{R_o^3}{120}s^3 + \frac{R_o^2}{10}s^2 - \frac{R_o}{2}s + 1}{\frac{R_o^3}{120}s^3 + \frac{R_o^2}{10}s^2 + \frac{R_o}{2}s + 1}$$

Рассматривая передаточные функции звеньев **Паде** любого порядка $K_{pade_n}(s)$, можно заключить, что *комплексная передаточная функция звена Паде любого порядка определяется по формуле:*

$$K_{pade_n}(j\omega)\Big|_{s=j\omega} = \frac{a - jb}{a + jb}. \quad (5)$$

Наприклад, для приближения **Паде** первого порядка

$$a = 1, \quad b = \frac{R_o}{2} \omega.$$

Для приближения **Паде** второго порядка

$$a = 1 - \frac{R_o^2}{12} \omega^2, \quad b = \frac{R_o}{2} \omega.$$

Для приближения **Паде** третьего порядка

$$a = 1 - \frac{R_o^2}{10} \omega^2, \quad b = \frac{R_o}{2} \omega + \frac{R_o^3}{120} \omega^3.$$

Для приближения **Паде** четвертого порядка

$$a = 1 - \frac{3R_o^2}{28} \omega^2 + \frac{R_o^4}{1680} \omega^4, \quad b = \frac{R_o}{2} \omega + \frac{R_o^3}{84} \omega^3.$$

На основании выражения (5) можно заключить, что модуль комплексной передаточной функции звена **Паде** любого порядка равен единице, т.е.

$$\left| K_{pade_n}(j\omega)_{s=j\omega} \right| = 1,$$

а аргумент комплексной передаточной функции звена **Паде** любого порядка, т.е. частотная характеристика звена **Паде** любого порядка

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right), \text{ радиан,}$$

$$\text{или } \varphi(\omega) = 57,3 \times \left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{b}{a}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) \right), \text{ градусов.}$$

Наиболее часто используется аппроксимация передаточной функции звена чистого запаздывания приближением **Паде** второго порядка. Для звена **Паде** второго порядка частотная характеристика определяется как

$$\varphi(\omega) = 57,3 \times \left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{\frac{R_o}{2} \omega}{1 - \frac{R_o^2}{12} \omega^2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{R_o}{2} \omega}{1 - \frac{R_o^2}{12} \omega^2}\right) \right).$$

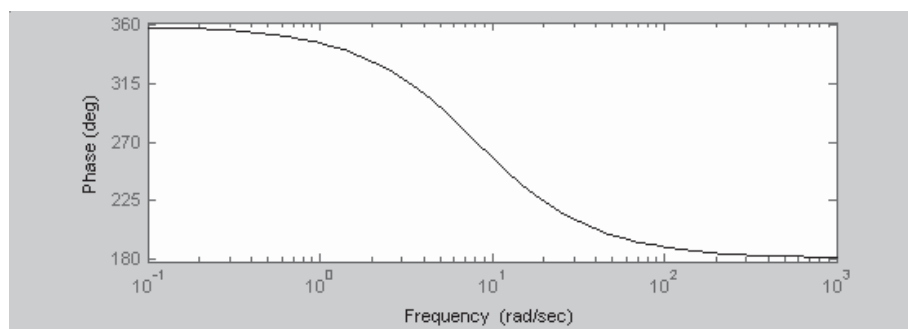
Например, таблица значений рассчитанной частотной характеристики звена **Паде** второго порядка при $R_o = 0,246$ сек определяется:

ω рад./сек	$\varphi(\omega)$ градусов
0.01	- 0.141
0.02	- 0.282
0.03	- 0.423
0.04	- 0.564
0.06	- 0.846
0.08	- 1.128
0.1	- 1.410
0.2	- 2.819
0.3	- 4.229
0.4	- 5.638
0.6	- 8.458
0.8	- 11.277
1	- 14.096
2	- 28.189
3	- 42.271
4	- 56.314
6	- 84.088
8	- 110.932
10	- 136.110

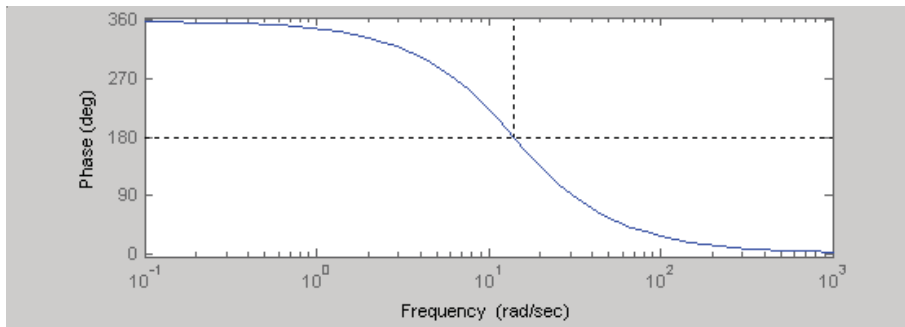
Фазочастотные характеристики звена **Паде** первого, второго, третьего и четвертого порядков, полученные в системе **MATLAB**, показаны на рис. 2.

Как показывают расчеты, уже частотная характеристика звена **Паде** второго порядка в диапазоне частот от нуля до 10 рад/сек (в диапазоне, который является существенным для **AQM**-систем), с достаточной точностью (в диапазоне от нуля до 1 рад/сек с точностью, менее одного процента, от 1 до 10 рад/сек с точностью 1–4 процента) совпадает с частотной характеристикой звена чистого запаздывания.

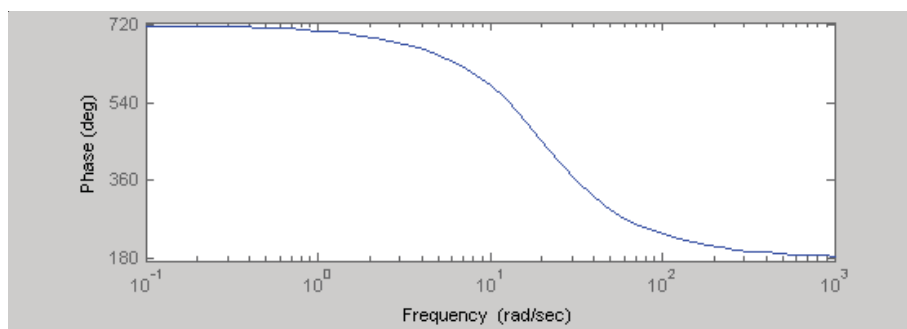
Использование передаточной функции звена **Паде** второго порядка вместо передаточной функции звена чистого запаздывания позволяет весьма просто определять логарифмические амплитудные и фазочастотные характеристики **AQM**-систем, используя пакет **Control System Toolbox 5.0** интерактивной системы **MATLAB** [5], что значительно облегчает анализ **AQM**-систем и выбор и расчет регуляторов для этих систем.



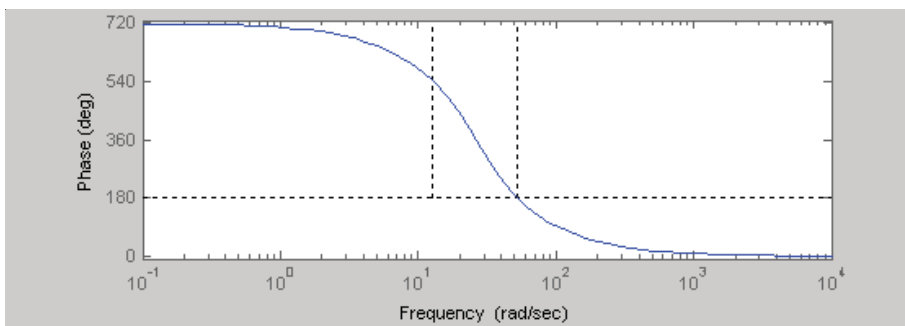
а)



б)



в)



г)

Рис. 2. Фазочастотные характеристики звена Паде: а) первого порядка, б) второго порядка, в) третьего порядка, г) четвертого порядка

На основании данной работы можно заключить, что при исследовании AQM-систем наиболее целесообразной заменой передаточной функции звена чистого запаздывания является передаточная функция звена Паде второго порядка с точки зрения получения достаточной точности результатов и упрощения анализа характеристик систем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hollot C.V. "A Control Theoretic Analysis of RED," in Proceedings of IEEE/INFOCOM / Hollot C.V., Misra V., Towsley D., Gong W.B., April, 2001. – p. 1510–1519.

2. *Hollot C.V.* “Analysis and design of controllers for AQM routers supporting TCP flows”. IEEE/ACM Transactions on Automatic Control / Hollot C.V., Misra V., Towsley D., Gong W.B. – vol. 47. – № 6. – p. 945–959.

3. *Hollot C.V.* “On Designing Improved Controllers for Routers Supporting TCP Flows”, in Proceedings of IEEE INFOCOM’2001 / Hollot C.V., Misra V., Towsley D., Gong W.B., April 2001 – p. 1726–1734.

4. *Гостев В.И.* Фаззи-системы активного управления очередью в сетях TCP/IP : монография / В.И. Гостев, С.Н. Скуртов. – Нежин : ООО “Видавництво “Аспект-Поліграф”, 2011. – 464 с.

5. *Дорф Р.* Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп ; пер. с англ. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 832 с.

Отримано 16.04.2013