

УДК 681.3

**В.И. Гостев,**

доктор технических наук, профессор,

**И.В. Панченко,**

кандидат технических наук

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ВЫХОДЕ НЕЧЕТКОГО РЕГУЛЯТОРА ПРИ ИДЕНТИЧНЫХ ТРЕУГОЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ НА УНИВЕРСАЛЬНОМ МНОЖЕСТВЕ $[-A, A]$

*Предложены аналитические выражения для управляющих воздействий на выходе нечеткого регулятора при идентичных треугольных функциях принадлежности на универсальном множестве  $[-a, a]$ .*

**Ключевые слова:** нечеткий регулятор, функции принадлежности, универсальное множество, лингвистическое правило.

*Запропоновано аналітичні вирази для керуючих впливів на виході нечіткого регулятора при ідентичних трикутних функціях приналежності на універсальній множині  $[-a, a]$ .*

**Ключові слова:** нечіткий регулятор, функції приналежності, універсальна множина, лінгвістичне правило.

*Analytical expressions for operating actions on an output of an indistinct regulator at identical triangular membership functions on universal set  $[-a, a]$  are considered.*

**Keywords:** unclear regulator, functions of belonging, universal set, linguistic rule.

Расчет нечетких регуляторов возможен при условии определения управляющих воздействий на выходе регулятора при заданных функциях принадлежности [1–3].

Рассмотрим нечеткий регулятор с идентичными треугольными функциями принадлежности на универсальном множестве  $[-a, a]$ .

Пусть на универсальном множестве  $U = [-a, a]$  заданы два нечетких подмножества, функции принадлежности (ФП) которых для каждой лингвистической величины определяются по формулам (см. рис. 1):

$$\mu_1(u) = \frac{a-u}{2a}, \quad u \in [-a, a]; \quad \mu_2(u) = \frac{a+u}{2a}, \quad u \in [-a, a].$$

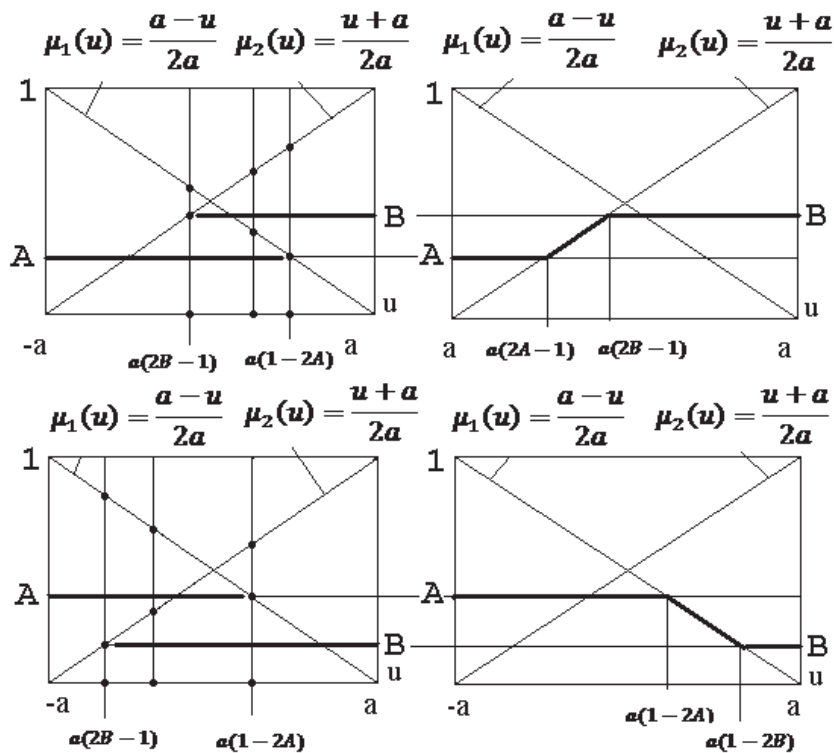


Рис. 1

При поступлении на нечеткий регулятор в какой-то момент времени значений входных переменных – ошибки системы  $\theta^*$ , первой производной  $\dot{\theta}^*$  и второй производной  $\ddot{\theta}^*$  от ошибки системы с шагом квантования  $h$  осуществляется пересчет входных переменных в переменные  $u_1^*, u_2^*, u_3^*$  на универсальное множество  $U = [-a, a]$  и расчет значений ФП для этих переменных (см. рис. 1). Точками на универсальном множестве отмечены возможные для этого момента времени значения переменных  $u_1^*, u_2^*, u_3^*$ .

Для нечеткого вывода используем алгоритм Мамдани [1]. Лингвистическое правило управления нечеткого регулятора формулируется в виде:

$$\text{Если } (\theta^* = a_1^j) \text{ и } (\dot{\theta}^* = a_2^j) \text{ и } (\ddot{\theta}^* = a_3^j), \text{ то } (m^* = a_c^j), j = \overline{1,2},$$

где  $a_1^j, a_2^j$  и  $a_3^j$  – лингвистические оценки ошибки, первой производной ошибки и второй производной ошибки, рассматриваемые как нечеткие терм-множества, определенные на универсальном множестве,  $j = \overline{1,2}$ ;  $a_c^j$  – лингвистические оценки управляющего воздействия на объект, выбираемые из терм-множества переменной  $m$ . Лингвистические оценки выбираются из терм-множеств лингвистических переменных  $\theta^*, \dot{\theta}^*, \ddot{\theta}^*$  и  $m^*$ :

$$a_i^j \in \{\text{отрицательная (1), положительная (2)}\}.$$

В соответствии с лингвистическими правилами управления функция принадлежности управляющего воздействия  $\mu_c(u)$  нечеткому терм-множеству “отрицательная” ограничена сверху значением:

$$A = \min[\mu_1(u_1^*), \mu_1(u_2^*), \mu_1(u_3^*)], \quad (1)$$

функція належності управляючого впливу  $\mu_{2c}(u)$  нечеткому терм-множеству “положительная” ограничена сверху значением:

$$B = \min[\mu_2(u_1^*), \mu_2(u_2^*), \mu_2(u_3^*)]. \quad (2)$$

Результирующая функция принадлежности для управляющего воздействия определяется как:

$$\mu_c(u) = \mu_{1c}(u) \vee \mu_{2c}(u), \quad (3)$$

т.е. получается формированием максимума

$$\mu_c(u) = \max[\mu_{1c}(u), \mu_{2c}(u)]. \quad (4)$$

Для определения конкретного значения управляющего воздействия  $m^*$  формируется “результирующая фигура”, ограниченная результирующей ФП, и производится поиск абсциссы “центра тяжести результирующей фигуры”  $u_c$ . Общая формула для определения абсциссы “центра тяжести результирующей фигуры” при универсальном множестве  $U = [-a, a]$  записывается в виде:

$$u_c = \frac{\int_{-a}^a u \mu(u) du}{\int_{-a}^a \mu(u) du}. \quad (5)$$

Отметим весьма существенный факт. Какие бы значения не принимали переменные  $u_1^*, u_2^*, u_3^*$  на универсальном множестве  $U = [-a, a]$ , в зависимости от соотношений величин  $A$  и  $B$  “результирующая фигура” может принимать только две конфигурации: при  $A < B$  и при  $A > B$ , эти конфигурации показаны на рис. 1.

При  $A < B$  “абсцисса центра тяжести результирующей фигуры” определяется по формуле:

$$u_c = \frac{A \int_{-a}^{a(2A-1)} u du + \frac{1}{2a} \int_{a(2A-1)}^{a(2B-1)} (u+a) u du + B \int_{a(2B-1)}^a u du}{A \int_{-a}^{a(2A-1)} du + \frac{1}{2a} \int_{a(2A-1)}^{a(2B-1)} (u+a) du + B \int_{a(2B-1)}^a du}. \quad (6)$$

После вычислений, учитывая, что неопределенные интегралы

$$\int u du = \frac{1}{2}u^2 \text{ и } \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3,$$

получаем при  $A < B$ :

$$u_c = \frac{\frac{2\alpha^2}{3}(A^3 - B^3) - \alpha^2(A^2 - B^2)}{2aB + a(A^2 - B^2)}. \quad (7)$$

При  $A > B$  абсцисса “центра тяжести результирующей фигуры” определяется по формуле:

$$u_c = \frac{A \int_{-a}^{a(1-2A)} u du + \frac{1}{2a} \int_{a(1-2A)}^{a(1-2B)} (u+a) du + B \int_{a(1-2B)}^a u du}{A \int_{-a}^{a(1-2A)} du + \int_{a(1-2A)}^{a(1-2B)} (u+a) du + Ba \int_{a(1-2B)}^a du}. \quad (8)$$

После вычислений получаем при  $A > B$ :

$$u_c = \frac{\frac{2\alpha^2}{3}(A^3 - B^3) - \alpha^2(A^2 - B^2)}{2aA - a(A^2 - B^2)}. \quad (9)$$

Например, при  $A=0.1$ ,  $B=0.4$  и  $a=1$  после вычислений получаем  $u_c 0.1662$ ; при  $A=0.4$ ,  $B=0.1$  и  $a=1$  получаем  $u_c -0.1662$ .

Основными параметрами цифровых нечетких регуляторов, при которых производится их синтез и расчет, являются, во-первых, количество и форма функций принадлежности  $\mu_i(u)$  лингвистических терм-множеств и, во-вторых, диапазоны изменения входных и выходной лингвистических переменных: *ошибка, первая производная ошибки, вторая производная ошибки, управляющее воздействие на объект*, т. е.  $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ ,  $[\dot{\theta}_{\min}, \dot{\theta}_{\max}]$ ,  $[\ddot{\theta}_{\min}, \ddot{\theta}_{\max}]$ ,  $[m_{\min}, m_{\max}]$ . Для дискретной ошибки  $\theta(k)$  с шагом дискретности  $h$  в качестве первой и второй производных от ошибки обычно вычисляют первую и вторую разность по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}(k) &= [\theta(k) - \theta(k-1)] / h; \\ \ddot{\theta}(k) &= [\dot{\theta}(k) - \dot{\theta}(k-1)] / h = [\theta(k) - 2\theta(k-1) + \theta(k-2)] / h^2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Эти особенности обусловлены тем, что на вход нечеткого регулятора, как правило, поступают три лингвистических переменных: *ошибка системы*  $\theta$ , *скорость изменения (первая производная) ошибки*  $\dot{\theta}$ , *ускорение (вторая производная) ошибки*  $\ddot{\theta}$ , которые качественно можно охарактеризовать двумя терм-множествами (лингвистическими величинами), например, *отрицательная* – 1, *положительная* – 2. Эти терм-множества описываются на универсальном множестве  $U[-a, a]$  соответственно двумя функциями принадлежности ФП:  $\mu_1(u)$  и  $\mu_2(u)$ . ФП определяет степень принадлежности каждого элемента  $u$  множеству  $U$  числом между  $-a$  и  $a$ , которое называют степенью истинности рассматриваемой лингвистической переменной данному терму. Поэтому функции  $\mu_1(u)$  и  $\mu_2(u)$  должны быть симметричными друг относительно друга и пересекаться при значении  $u=0$ . Кроме того, функция  $\mu_1(u)$  должна быть убывающей, а  $\mu_2(u)$  – возрастающей.

Функции принадлежности для входных переменных: *ошибка системы*  $\theta$ , *скорость изменения (первая производная) ошибки*  $\dot{\theta}$ , *ускорение (вторая производная) ошибки*  $\ddot{\theta}$  являются *входными*. Функции принадлежности для входных переменных, как правило, одни и те же. Функции принадлежности для выходной переменной – *управляющее воздействие на объект управления*  $t$  являются *выходными*. Для выходной лингвистической переменной могут использоваться такие же ФП, как и для входных лингвистических переменных или отличные от них ФП.

Отобразим диапазоны  $[x_{\hat{ii}}, x_{\hat{ai}}]$  изменения параметров  $x_i, i = \overline{1, n}$  на универсальное множество  $U = [-a, a]$ .

При этом пересчет фиксированного значения параметра  $x_i^* \in [x_{\hat{ii}}, x_{\hat{ai}}]$  в соответствующий элемент  $u^* \in [-a, a]$  определяется пропорцией:

$$(x_{\hat{ai}} - x_{\hat{ii}}) / (2a) = (x_i^* - x_{\hat{ii}}) / (u^* + a)$$

или

$$(u^* + a) / (2a) = (x_i^* - x_{\hat{ii}}) / (x_{\hat{ai}} - x_{\hat{ii}})$$

из которой получаем

$$u^* = a[2(x_i^* - x_{\hat{ii}}) / (x_{\hat{ai}} - x_{\hat{ii}}) - 1]. \quad (11)$$

Диапазоны изменения входных переменных  $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ ,  $[\dot{\theta}_{\min}, \dot{\theta}_{\max}]$ ,  $[\ddot{\theta}_{\min}, \ddot{\theta}_{\max}]$  и текущие значения входных переменных  $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$  пересчитываются (отображаются) на универсальное множество  $U = [-a, a]$  по формулам:

$$\left. \begin{aligned} u_1^* &= a[2(\theta^* - \theta_{\min}) / (\theta_{\max} - \theta_{\min}) - 1]; \\ u_2^* &= a[2(\dot{\theta}^* - \dot{\theta}_{\min}) / (\dot{\theta}_{\max} - \dot{\theta}_{\min}) - 1]; \\ u_3^* &= a[2(\ddot{\theta}^* - \ddot{\theta}_{\min}) / (\ddot{\theta}_{\max} - \ddot{\theta}_{\min}) - 1] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Для упрощення нормировки (пересчета значений сигналов в значения элементов единого универсального множества) диапазоны изменения входных сигналов (параметров нечеткого регулятора) принимаем симметричными:

$$A_m = \theta_{\max} = -\theta_{\min}; \quad B_m = \dot{\theta}_{\max} = -\dot{\theta}_{\min}; \quad C_m = \ddot{\theta}_{\max} = -\ddot{\theta}_{\min}.$$

Тогда формулы (12) для нормировки (пересчета) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} u_1^* &= a[(\theta^* + A_m)/(A_m) - 1]; \\ u_2^* &= a[(\dot{\theta}^* + B_m)/(B_m) - 1]; \\ u_3^* &= a[(\ddot{\theta}^* + C_m)/(C_m) - 1] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Полученное в результате решения значение ненормированного выхода  $u_c$  нечеткого регулятора на универсальном множестве  $U = [-a, a]$  пересчитывается в значение *управляющего воздействия на объект управления* по формуле:

$$m^* = m_{\min} + (m_{\max} - m_{\min}) \frac{a + u_{\tilde{n}}^*}{2a}. \quad (14)$$

Аналогично при симметричных диапазонах выходной переменной ( $D_m = m_{\max} = -m_{\min}$ ) пересчет осуществляют по формуле:

$$m^* = -D_m + D_m \frac{a + u_{\tilde{n}}^*}{a}. \quad (15)$$

Получены все аналитические выражения для расчета нечетких регуляторов с идентичными треугольными функциями принадлежности на универсальном множестве  $U = [-a, a]$ .

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Гостев В.И.* Нечеткие регуляторы в системах автоматического управления / В.И. Гостев. – К. : Издательство “Радиоаматор”, 2008. – 972 с.
2. *Гостев В.И.* Проектирование нечетких регуляторов для систем автоматического управления : монография / В.И. Гостев. – Нежин : ООО “Видавництво “Аспект-Поліграф”, 2009. – 416 с.
3. *Гостев В.И.* Проектирование нечетких регуляторов для систем автоматического управления / В.И. Гостев. – СПб. : БХВ-Петербург, 2011. – 416 с.

Отримано 14.10.2014.