УДК 004.056, 004.75

В.Б. Дудикевич,
доктор технічних наук, професор,
І.Р. Опірський,
кандидат технічних наук

МІНІМАКСНІ ВЛАСТИВОСТІ ПОСЛІДОВНОЇ ПРОЦЕДУРИ ВАЛЬДА В ЗАДАЧАХ ПЕРЕВІРКИ ДВОХ СКЛАДНИХ ПРОГНОЗІВ У ІНФОРМАЦІЙНИХ МЕРЕЖАХ ДЕРЖАВИ

У статті проведено аналіз і наведено вирішення задачі мінімаксних властивостей послідовної процедури Вальда при перевірці двох складних прогнозів, що може використовуватись при прогнозуванні та попередженні несанкціонованого доступу. Визначено співвідношення, що дозволяють розрахувати ефективність послідовного правила Вальда в порівнянні з рівномірно найкращим непослідовними правилом. Доведено, що при практично інтересних значеннях в околиці точки послідовне правило Вальда має близькі або навіть гірші характеристики в порівнянні з найкращим непослідовним правилом. Визначено, що в непослідовній рівномірно потужній процедурі необхідна менша кількість спостережень, ніж у послідовній процедурі Вальда.

Ключові слова: *послідовна перевірка, прогноз, правило Вальда, послідовне правило, спостереження, інформаційні мережі держави, помилка, асимптотичний розклад.*

В статье проведен анализ и представлено решение задачи минимаксных свойств последовательной процедуры Вальда при проверке двух сложных прогнозов, что может использоваться при прогнозировании и предупреждении несанкционированного доступа. Определены соотношения, позволяющие рассчитать эффективность последовательного правила Вальда по сравнению с равномерно лучшим непоследовательными правилом. Доказано, что при практически интересных значениях в окрестности точки последовательное правило Вальда имеет близкие или даже худшие характеристики по сравнению с лучшим непоследовательным правилом. Определено, что в непоследовательной равномерно мощной процедуре необходимо меньшее количество наблюдений, чем в последовательной процедуре Вальда.

Ключевые слова: *последовательная проверка, прогноз, правило Вальда, последовательное правило, наблюдение, информационные сети государства, ошибка, асимптотическое разложение.*

In the paper the analysis and presentation of the problem solution of the minimax properties of the sequential procedure of Wald when testing two composite forecasts that can be used for predicting and preventing unauthorized access are carried out. The ratio that allows to calculate the efficiency of the Wald sequential rules compared to the uniformly best inconsistent rule is defined. It is proved that for practically interesting values in a neighbourhood of a point consistent rule of Wald has a similar or even worse *performance than the best of an inconsistent rule. It is determined that inconsistent uniformly powerful procedure needs fewer observations than in the sequential procedure of Wald.*

Keywords: *sequential testing, prediction, rule, Wald rule, sequential rule, observation, state information network , error, asymptotic expansi*

Вплив поступових змін параметрів мережі може передбачити можливе несанкціоноване підключення до мережі. Цей висновок, здавалося б, повинен означати, що проведення прогнозуючого контролю є доцільним у всіх без винятку випадках та застосовується до всіх видів підключення. Однак такий висновок був би надмірно поспішним. Наявна статистика жодним чином не стосується питання про те, наскільки передчасні зміни в інформаційній мережі держави (далі – ІМД), що призводять до несанкціонованого доступу (далі – НСД), могли б бути представленими значеннями тих чи інших контрольних параметрів. Так, наприклад, підключення з компіляцією визначити дуже важко і воно не впливає на зміни параметрів [1].

Таким чином, деяка частина змін характеристик ІМД не може бути віднесена в цей час до НСД, які можна було б з достатньою вірогідністю передбачити на основі контрольних змін. Кожна ж частина цих змін може належати до цієї групи. Конкретної відповіді на це питання поки що немає. Але без відповіді не можна вирішити задачу визначення загальної ефективності прогнозного контролю, яка певною мірою залежить від відношення інтенсивності прогнозованих НСД.

При складанні загальних алгоритмів контролю реального стану ІМД необхідно розраховувати затрати на проведення тої чи іншої форми контролю з відповідним підвищенням ефективності експлуатації мережі. Це, зокрема, означає існування певного нижнього порогу інтенсивності передбачення НСД, припадаючи на одну прогнозовану атаку, для якої ще призначається доцільним проведення прогнозованого контролю. Якщо інтенсивність атак, які можуть контролюватись кожним прогнозним параметром, виявляється нижче цього порогу, то прогноз стає недоцільним.

Слід очікувати, що прогнозування НСД може бути ефективним для вузлів ІМД з яскраво вираженими безперервними властивостями, що містять значне число компонентів, процеси в яких відрізняються сильною взаємозумовленістю.

Коло навіть найбільш важливих запитань, пов'язаних з проблемою прогнозу НСД в ІМД, є достатньо широке. Вичерпне дослідження цих усіх питань навряд чи можна розглянути в одній статті. Тому не всі перелічені проблеми будуть розглянуті однаковою мірою. Більше того, деякі питання взагалі не будуть порушені в цій статті.

Питанням послідовної перевірки прогнозів при незалежних однаково розподілених спостереженнях присвячена значна кількість робіт [2–6]. Багато результатів цієї статі справедливі не лише для незалежних однорідних спостережень, але й для деяких моделей неоднорідних корельованих спостережень (наприклад, для розрізнення сигналів на фоні корельованих перешкод). Деякі питання, пов'язані з послідовною перевіркою прогнозів і їх оцінюванням, наведені у [7]. Для моделювання процесів НСД з інформацією в ІМД широкого використання набули теоретичні моделі безпеки, які досить детально описані в [8–10]. Сама проблема достовірності інформації, що передається, поглиблено досліджувалась, зокрема, в низці робіт Вольтером, Гуткнехтом, Вейкертом та іншими [11–13]. Дослідження ж та аналіз проблематики прогнозування НСД в ІМД можна зустріти в наших попередніх наукових роботах [14–18]. Отже, в цій статті ми продовжуємо заглиблюватись у проблему прогнозування НСД в ІМД, використовуючи сучасний математичний апарат теорії ймовірності, а саме баєсовську постановку задачі.

Об'єкт дослідження – прогнозування несанкціонованого доступу в інформаційних мережах держави при умовно екстремальній постановці задачі.

Предмет дослідження – аналіз та дослідження проблематики прогнозування НСД в ІМД на основі теорії ймовірності.

Мета роботи – визначення оптимальних послідовних правил при послідовній перевірці декількох прогнозів НСД в ІМД в умовно екстремальній постановці задачі.

Основна частина

Розглянемо задачу послідовної відмінності двох складних однопараметричних прогнозів $H_i : \theta \in \Theta_i, i = 0,1,\ \Theta_0 = (-\infty, \theta_0\ ], \Theta_1 = [\theta_1, \infty),\ \theta_0 < \theta_1$, за незалежними спостереженнями $x_1, x_2, ..., x_n, ...$, що мають загальне розподілення зі щільністю $p_\theta(x)$. Звичайно, бажано було б знайти рівномірно найкраще послідовне вирішальне правило, що мінімізує в класі $\Delta(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1)$ умовний середній час спостереження $\overline{\tau}_\theta = M_\theta \tau(u)$ при всіх $\theta \in \Theta_0 \bigcup \Theta_1$. Однак такого правила, мабуть, не існує, оскільки для кожної пари точок $\theta' \in \Theta_0, \theta'' \in \Theta_1$ оптимальне правило Вальда з ВП $p_\theta(x^n{}_1) / p_\theta(x^n{}_1)$ і, відповідно, в класі послідовних критеріїв відношення ймовірностей немає єдиного, що забезпечувало б мінімум $\overline{\tau}_\theta$ рівномірно по θ. Існування правила поза цим класом, що задовольняє зазначений критерій оптимальності, досить сумнівне. Нехай розподілення спостережень таке, що для правила Вальда

$$u_n^*(\Lambda_n) = \begin{cases} 1, \Lambda_n \ge B, \\ 0, \Lambda_n \le A, \\ u_\Pi, \Lambda_n \in (A, B), n \ge 1, \end{cases}$$, в якому $\Lambda_n = \prod_{k=1}^{n} p_{\theta 1}(x_k) / p_{\theta_0}(x_k)$ і пороги

$A = A(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1), B = B(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1)$ вибрані, виходячи з вимог $\alpha_i^*(\theta_i) = \overline{\alpha}_i, i = 0,1,$ виконані умови

$$\alpha_i^*(\theta_i) \le \overline{\alpha}_i, \theta \in \Theta_i, i = 0,1; \quad (1)$$

$$\overline{\tau}_\theta^* \le \overline{\tau}_{\theta i}^*, \theta \in \Theta_i, i = 0,1. \quad (2)$$

Тут $\alpha^*{}_0(\theta) = P_\theta(\Lambda_{\tau^*} \ge B);\ \theta \in \Theta_0;\ \ \alpha^*{}_1(\theta) = P_\theta(\Lambda_{\tau^*} \le A);\ \ \theta \in \Theta_1$ – ймовірності помилкових рішень, що залежать від істинного значення параметра $\theta, \overline{\tau}^*{}_\theta = M_\theta \tau^*$. Зокрема, умови (1), (2) виконані для експоненціального сімейства розподілень.

Правило Вальда мінімізує умовні середні довжини в точках $\theta = \theta_i, i = 0,1,$ в класі правил $\Delta^0(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1) \subset \Delta(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1)$. За умови (1) правило Вальда належить класу $\Delta(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1)$ при всіх $\Theta \in \Theta_0 \cup \Theta_1$, а за умови (2) верхня грань $\overline{\tau}_\theta^*$ в областях Θ_i досягається в точках θ_i.

Тому при виконанні умов (1), (2) і при можливості забезпечення рівності $\alpha^*{}_i(\theta_i) = \overline{\alpha}_i$ на границях послідовне правило Вальда оптимальне наступному мінімаксному сенсу:

$$\bar{\tau}_{\theta_i}(u(\Lambda)) = \inf_{u(x)\in\Delta(\bar{\alpha}_0,\bar{\alpha}_1)} \sup_{\theta\in\Theta_i} \bar{\tau}_\theta(u(x)), \tag{3}$$

тобто мінімізує максимальні значення умовних середніх довжин у класі правил

$$\Delta(\bar{\alpha}_0,\bar{\alpha}_1) = \begin{Bmatrix} u(x):\alpha_i(\theta,u(x)) \le \bar{\alpha}_i, \\ \theta\in\Theta_i, \bar{\tau}_{\theta_i} < \infty, i = 0,1 \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Основними характеристиками правила Вальда є ймовірності помилок $\alpha^*{}_0(\theta) = P_\theta(z_{\tau^*} \ge a_1)$, $\theta \le \theta_0$, $\alpha^*{}_1(\theta) = P_\theta(z_{\tau^*} \le a_0)$, $\theta \ge \theta_1$, і умовна середня довжина $\tau^*{}_\theta = M_\theta \tau^*, \theta \in R^1$, які належать визначенню.

Нехай $h-$ нульовий корінь рівняння

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{p_{\theta_1}(x)}{p_{\theta_0}(x)}\right]^{h_\theta} p_\theta(x)dx = 1. \tag{5}$$

Неважко зрозуміти, що $h_\theta \in [-1, 1]$ в області $\theta \in [\theta_0, \theta_1]$, при чому $h_{\theta_1} = -1, h_{\theta_1} = 1$. Розглянемо область значень $\theta > \eta$, в якій $h_\theta < 0$ $(\eta \in (\theta_0, \theta_1))$. Введемо рівність $p^*{}_\theta(x^n{}_1) = p_\theta(x^n{}_1)\Lambda_n^{k_\theta}$ щільність розподілення $p^*{}_\theta(x^n{}_1)$, і розглянемо послідовне правило виду

$$\tau = \inf\{n : z_n^* \notin (a_0^*, a_1^*)\}, \quad u_\tau = \begin{cases} 1, z_\tau^* \ge a_1^*, \\ 0, z_\tau^* \le a_0^*, \end{cases} \tag{6}$$

де $z^*{}_n = \ln\left[p_\theta(x^n{}_1) / p^*{}_\theta(x^n{}_1)\right], a^*{}_i = -h_\theta a_i$.

Позначимо через $L_\theta = P_\theta(z^*{}_\tau \ge \alpha^*{}_0)$ ймовірність прийняття нульового прогнозу в правилі (6) при фіксованому θ. Оскільки $z^*{}_n = -h_\theta z_n$ і $h_\theta < 0$ при $\theta > \eta$, то правило (6) еквівалентне правилу Вальда. Тому

$$L_\theta = \begin{cases} \alpha_1^*(\theta), & \theta \ge \theta_1, \\ 1-\alpha_0^*(\theta), & \theta \le \theta_0. \end{cases}$$

Далі отримаємо

$$L_\theta = \int_{\{z_\tau^* \le a_0^*\}} p_\theta(x_1^\tau)dx_1^\tau = \exp(a_0^*) \int_{\{z_\tau^* \le a_0^*\}} \exp(\delta_0^*) \times p_\theta^*(x_1^\tau)dx_1^\tau = \exp(a_0^*)P_\theta^*(z_\tau^* \le a_0^*)e_0^*(\theta), \tag{7}$$

де $e^*{}_0(\theta) = M^*{}_\theta\left[\exp(\delta^*{}_0)\middle| z^*{}_\tau \le a^*{}_0\right]$, $\delta^*{}_0 = z^*{}_\tau - a^*{}_0$

($M^*{}_\theta$ – математичне очікування по розподіленню $p^*{}_\theta$). Нехай $\alpha_\theta = P^*{}_\theta(z^*{}_\tau \ge a^*{}_1)$, $\delta^*{}_1 = z^*{}_\tau - a^*{}_1$ отримаємо

$$\alpha_\theta = \int_{\{z_\tau^* \ge a_1^*\}} p_\theta^*(x_1^\tau)dx_1^\tau = \exp(-a_1^*) \int_{\{z_\tau^* \ge a_1^*\}} \exp(-\delta_1^*) p_\theta(x_1^\tau)dx_1^\tau = \exp(-a_1^*)(1-L_\theta)e_1(\theta), \tag{8}$$

де $e_1 = M_\theta\left[\exp(-\delta^*{}_1)\middle| z^*{}_\tau \ge a^*{}_1\right]$. Комбінуючи (7), (8) з урахуванням того факту, що $P^*{}_\theta(z^*{}_\tau \ge a^*{}_0) = 1 - \alpha^*{}_\theta$, отримаємо

$$L_\theta = \frac{e_0^*(\theta)\exp(-h_\theta a_0)\left[1 - e_1(\theta)\exp(h_\theta a_1)\right]}{1 - e_1(\theta)e_0(\theta)\exp(h_\theta(a_1 - a_0))}. \tag{9}$$

Аналогічно доказується, що рівність (9) справедлива в області $\theta < \eta$, де $h_\theta > 0$.

Для того, щоб скористатись точною рівністю (9), необхідно знайти значення $e^*{}_0$, e_1, що, зазвичай, не вдається. Однак, як і для випадкових простих прогнозів, можна знайти оцінки, що дозволяють при розрахунках використовувати аналітичний апарат. Оскільки правило Вальда еквівалентне правилу (6), в якому $z^*{}_n = \ln \prod_{i=1}^{n} \frac{p_\theta(x_i)}{p^*_\theta(x_i)}$, то проводячи для останнього міркування аналогії [19], можна показати, що для оперативної характеристики L_θ при $\theta > \eta$ справедливий асимптотичний розклад

$$L_\theta = \frac{\beta_{0\theta} \exp(-h_\theta a_0)[1 - \beta_{1\theta} \exp(h_\theta a_1)]}{1 - \beta_{0\theta}\beta_{1\theta} \exp(h_\theta (a_1 - a_0))} + a(\exp[h_\theta (a_1 - a_0)])\ |a_i| \to \infty, \tag{10}$$

де
$$\beta_{0\theta} = \frac{\varphi_{\theta-}(1)}{\varphi'_{\theta-}(0)};\ \ \beta_{1\theta} = -\frac{\varphi_{\theta+}(0)}{\varphi'_{\theta+}(1)}; \tag{11}$$

$\varphi_{\theta\pm}(\lambda)$ – компоненти канонічної факторизації функцій $\varphi_\theta(\lambda) = 1 - M^*{}_\theta \exp[\lambda |h_\theta| z'(x)]$. Аналогічно при $\theta < \eta$ справедлива співвідношення (10), (11), з тою відмінністю, що як функцію, що характеризується, беремо $\varphi_\theta(\lambda) = 1 - M_\theta \exp[\lambda h_\theta z'(x)]$.

Тепер отримаємо вираз для умовної середньої довжини $\bar{\tau}^*{}_\theta$. Для цього скористаємось тотожністю Вальда $M_\theta z_{\tau^*} = \bar{\tau}^*{}_\theta M_\theta z'(x)$, що справедливе для значень θ, при яких $M_\theta z'(x) \neq 0$, і очевидною рівністю $M_\theta z_{\tau^*} = (1 - L_\theta)(a_1 + \bar{\delta}_{1\theta}) + L_\theta (a_0 + \delta_{0\theta})$, де $\bar{\delta}_{1\theta} = M_\theta(\delta_1 | z_{\tau^*} \geq a_1)$; $\bar{\delta}_{0\theta} = M_\theta(\delta_0 | z_{\tau^*} \leq a_0)$ – умовні середні перескоки величиною z_{τ^*} порогів a_0 і a_1. Звідси отримаємо, що при $M_\theta z'(x) \neq 0$,

$$\bar{\tau}^*_\theta = \frac{(1 - L_\theta)a_1 + L_\theta a_0 (1 - L_\theta)\bar{\delta}_{1\theta} + L_\theta \bar{\delta}_{0\theta})}{M_\theta z'(x)}. \tag{12}$$

Оскільки $L_\theta = \alpha^*{}_1(\theta) \leq \bar{\alpha}_1$ в області $\theta \geq \theta_1$ і $1 - L_\theta = \alpha^*{}_0(\theta) \leq \bar{\alpha}_0$ в області $\theta \leq \theta_0$, при достатньо малих $\bar{a}_i$ з (12) випливає апроксимація

$$\tau^*_\theta \approx \begin{cases} \dfrac{(1 - \alpha^*_1(\theta))a_1 + \alpha^*_1(\theta)a_0 + M_\theta \delta_1}{M_\theta z'(x)}, \ \theta \geq \theta_1, \\ \dfrac{(1 - \alpha^*_0(\theta))a_0 + \alpha^*_0(\theta)a_1 + M_\theta \delta_0}{M_\theta z'(x)}, \ \theta \leq \theta_0, \end{cases} \tag{13}$$

де $\delta_i = z_{\tau i} - a_i$ – перескоки порогів a_i в односторонніх правилах $\tau_1 = \inf\{n : z_n \geq a_1\}$; $\tau_0 = \inf\{n : z_n \leq a_0\}$ $(i = 0,1)$.

Співвідношення (10) – (13) дозволяють оцінити характеристики правила Вальда в задачі перевірки складних прогнозів. Якщо в них покласти

$e^*_0 \approx e_1 \approx \beta_{0\theta} \approx \beta_{1\theta} \approx 1,\ \bar{\delta}_{1\theta} \approx \bar{\delta}_{0\theta} \approx M_\theta \delta_i \approx 0$, то отримаємо апроксимації Вальда, що ігнорують перескоки порогів.

У точці $\theta^* \in (\theta_0, \theta_1)$, де $M_{\theta^*} z'(x) = 0$, формули міняються. Для знаходження $\bar{\tau}^*_{\theta^*}$ використовуємо рівність $M(S_\tau - \bar{\tau} Ms')^2 = \bar{\tau} Ds'$, і той факт, що $M_{\theta^*} z^2{}_{\tau^*} = (1 - L_{\theta^*}) a_1^2 + L_{\theta^*} a_0^2 + (1 - L_{\theta^*}) \bar{\delta}^2_{1\theta^*} + L_{\theta^*} \bar{\delta}^2_{0\theta^*}$, де $\bar{\delta}^2_{1\theta^*} = M_{\theta^*}(z^2_{\tau^*} - a_1^2 | z_\tau \geq a_1)$; $\bar{\delta}^2_{0\theta^*} = M_{\theta^*}(z^2_{\tau^*} - a_0^2 | z_{\tau^*} < a_0)$.

У результаті

$$\bar{\tau}^*_{\theta^*} = \frac{(1 - L_{\theta^*})(a_1^2 + \bar{\delta}^2_{1\theta^*}) + L_{\theta^*}(a_0^2 + \bar{\delta}^2_{0\theta^*})}{M_{\theta^*}[z'(x)]^2}. \tag{14}$$

Зазвичай $h_\theta \to 0$ при $0 \to \theta^*$ (тобто $\theta^* = \eta$). Використовуючи (7) і останню обставину, знаходимо

$$L_\eta = a_1 / (a_1 - a_0). \tag{15}$$

Підстановка (15) в (14) дає

$$\bar{\tau}^*_\eta = \frac{|a_0| a_1 + a_1 \bar{\delta}^2_{0\theta^*} - a_0 \bar{\delta}^2_{1\theta^*}}{M_{\theta^*}[z'(x)]^2}. \tag{16}$$

Цікавим є порівняння ефективності правила Вальда з найкращим послідовними правилом, що базується на раніше фіксованому числі спостережень $n(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1)$, при якому забезпечується ймовірність помилок $\alpha_i(\theta_i, n) = \bar{\alpha}_i, \alpha_i(\theta_i, n) \leq \bar{\alpha}_i, \theta \in \Theta_i, i = 0,1$. Визначимо ефективність правила Вальда таким чином:

$$\nu_\theta = \frac{n(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1) - \bar{\tau}^*_\theta}{n(\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1)}. \tag{17}$$

Для прикладу розглянемо задачу відмінностей прогнозів по середньому значенню гаусівської послідовності $x_n, n = 1, 2, \ldots,\ p_\theta(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-(x - \theta)^2 / 2\}$. Водночас не важко побачити

$$\begin{gathered} z'(x) = (\theta_1 - \theta_0)x - (\theta_1^2 - \theta_0^2)/2;\ M_\theta z'(x) = \\ = (\theta_1 - \theta_0)[(\theta - (\theta_1 + \theta_0)/2];\quad D_\theta z'(x) = (\theta_1 + \theta_0)^2, \theta \in R^1, \end{gathered} \tag{18}$$

а рішення рівняння (5)

$$h_\theta = \frac{2(\theta - \theta_0)}{\theta_1 + \theta_0} - 1. \tag{19}$$

Знайти явний вид факторизаційних елементів $\varphi_{\theta\pm}(\lambda)$ вдається, однак можна показати, що

$$\beta_0 = \beta_1 = \frac{2}{(\theta_1 - \theta_0)^2} \exp\left\{ -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} F\left(-\frac{\sqrt{(\theta_1 + \theta_0)^2 n}}{2}\right) \right\}. \qquad (20)$$

Як бачимо з (18), $M_{\theta^*} z'(x) = 0,$ в точці $\theta^* = (\theta_1 + \theta_0)/2,$ при $\theta^* = \eta$ $(h_{\theta^*} = 0)$.

Співвідношення (10), (12), (16), (17), (20) дозволяють розрахувати характеристики правила Вальда на розглянутому прикладі. Використовуючи наслідок 2 § 3 гл. 2 роботи [20], отримуємо, що рівномірне найбільш потужне непослідовне правило в цьому випадку існує і визначається співвідношення

$$u_n(S_n) = \begin{cases} 1, S_n \geq H, \\ 0, S_n < H \end{cases} \qquad (S_n = \sum_{1}^{n} x_k).$$

Позначимо через $\alpha_{0n}(\theta) = P_\theta(S_n \geq H),\ \theta \in \Theta_0;\ \alpha_{1n} = P_\theta(S_n < H), \theta \in \Theta_1$ ймовірності помилок, що відповідають правилу. Очевидно, що

$$P_\theta(S_n < H) = F\left[(H - n\theta)/\sqrt{n}\right], \theta \in R^1, \qquad (21)$$

де $F(t) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{y} \exp(-t^2/2)dt$ – інтервал ймовірностей.

Тому

$$\alpha_n(\theta) = 1 - F\left[(H - n\theta)/\sqrt{n}\right], \theta \in \Theta_0;\ \alpha_{1n}(\theta) = F\left[(H - n\theta)/\sqrt{n}\right], \theta \in \Theta_1; \qquad (22)$$

звідки випливає, що $\alpha_{in}(\theta) \leq \alpha_{in}(\theta_i), \theta \in \Theta_i, i = 0,1.$

Вважаючи $\alpha_{in}(\theta_i) = \overline{\alpha}_i$,i =0,1 і вирішуючи отриману зі співвідношення (22) систему відносно n, отримаємо, що $u_n \in \Delta(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1)$ при

$$H(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1) = (\frac{f_{1-\overline{\alpha}_0} + f_{1-\overline{\alpha}_0})(\theta_1 f_{1-\overline{\alpha}_0} + \theta_0 f_{1-\overline{\alpha}_0})}{(\theta_1 - \theta_0)^2};\ n = n(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1) = (f_{1-\overline{\alpha}_0} + f_{1-\overline{\alpha}_0})^2/(\theta_1 - \theta_0)^2, \qquad (23)$$

де $f_p = F^{-1}(p)$ – p-квантиль стандартного нормального розподілення.

Співвідношення (10)–(16), (18)–(23) дозволяють розрахувати ефективність (17) послідовного правила Вальда в порівнянні з рівномірно найкращим непослідовними правилом, яке забезпечує в точках θ_i задані ймовірності помилок $\overline{\alpha}_i (i = 0,1)$, а в областях $\Theta_i \setminus \theta_i$ – найменші $\overline{\alpha}_i$. Залежність ефективності v_Θ від параметра Θ при $\alpha_i = 10^{-1}, i = 0,1$ наведена в табл.1. При даних параметрах ефективність послідовного методу перевищує в областях Θ_i 50 % (тобто відбувається виграш в середньому часі спостереження більш ніж у 2 рази). Ефективність v_Θ не залежить від параметра $(\theta_1 - \theta_0)^2$, причому в точках θ_0, θ_1 вона визначається співвідношеннями

$$v_0(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1) \approx 1 - \frac{2\beta(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1)}{(f_{1-\overline{\alpha}_0} + f_{1-\overline{\alpha}_1})^2};\quad v_1(\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1) \approx 1 - \frac{2\beta(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_0)}{(f_{1-\overline{\alpha}_0} + f_{1-\overline{\alpha}_1})^2},$$ а в

точці $\eta = (\theta_1 + \theta_0)/2$ – співвідношенням

$$v_\eta \approx 1 - \frac{\ln\left[(1 - \overline{\alpha}_0)/\overline{\alpha}_1\right] \ln\left[(1 - \overline{\alpha}_1)/\overline{\alpha}_0\right]}{(f_{1-\overline{\alpha}_0} + f_{1-\overline{\alpha}_1})^2}. \qquad (24)$$

В області (θ_0, θ_1) ефективність падає, досягнувши в симетричному випадку $\overline{\alpha}_0 = \overline{\alpha}_1$ мінімального значення в середній точці $\eta = (\theta_1 + \theta_0)/2$.

При $\overline{\alpha}_0 \to 0, \overline{\alpha}_1 \to 0$ наявний чотирьохкратний виграш по часу спостереження. В точці η виграш суттєво менший. Зі співвідношення (24) враховуючи ті обставини, що $f_{1-\alpha}^2 = 2|\ln\alpha|(1 + o(1)),\ \alpha \to 0$, отримуємо

$$\nu_\eta = \begin{cases} 1 - \ln\alpha^{-1}/8 \ при\ \overline{\alpha}_0 = \overline{\alpha}_1 = \alpha \to 0; \\ 1 - \ln\overline{\alpha}^{-1}/2 \ при\ \overline{\alpha}_0 \to 0, \overline{\alpha}_1 \to const; \\ 1 - \ln\overline{\alpha}^{-1}/2 \ при\ \overline{\alpha}_1 \to 0, \overline{\alpha}_0 \to const. \end{cases} \tag{25}$$

З асимптотичної формули (25) випливає, що в точці η в симетричному випадку $(\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_0 = \alpha)$ при малих допустимих ймовірностях помилок $(\alpha < 0{,}0004)$ в непослідовній рівномірно потужній процедурі необхідна менша кількість спостережень, ніж у послідовній процедурі Вальда. Виграш непослідовної процедури росте зі зменшенням α і прямує до безкінечності при $\alpha \to 0$ У несиметричних випадках $(\overline{\alpha}_0 << \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_1 << \overline{\alpha}_0)$ оптимальна непослідовна процедура виграє в процедури Вильда при $\theta = \eta$, коли $\overline{\alpha}_1 < 0{,}135$, $\overline{\alpha}_0 < 0{,}135$ відповідно. Залежність ν_η від $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_0$, отримана за допомогою формули (24), що дозволяє уточнити зроблені якісні висновки, наведена в табл. 2. З даних таблиць видно, що при практично інтересних значеннях $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1$ в околиці точки послідовне правило Вальда має близькі або навіть гірші характеристики в порівнянні з найкращим непослідовним правилом. Тому цікаво знаходити послідовні правила, що забезпечать задовільні характеристики при $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$, що не дуже програватимуть правилу Вальда в інших точках.

Таблиця 1

Залежність ефективності ν_Θ від параметра Θ при $\alpha_i = i\ ,^{1-}10\ = 0{,}1$

h_θ	1	2	3	4
L_θ	0,1	0,012	0,0014	0,0001
ν_θ,%	46	57	68	83

Таблиця 2

Залежність ν_η від $\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_0$

$\overline{\alpha}_1$	0,1	0,01	0,008	0,001	0,1	0,01
$\overline{\alpha}_0$	0,1	0,01	0,008	0,001	0,001	0,001
ν_η	0,265	0,024	-0,001	-0,249	0,18	-0,08

При достатньо тривалому середньому часі спостереження співвідношення (5), (6), (7) залишаються справедливими для корельованих спостережень, таких, що існує однозначне перетворення, що має властивості $\widetilde{p}(\widetilde{x}_1^n) = \prod_{k=1}^{n} \widetilde{p}_{ik}(\widetilde{x}_k), i = \overline{0, M-1}, n = \overline{2, N}$ та $|J_n(\widetilde{x}_1^n)| = |J_{n+1}(\widetilde{x}_1^{n+1})| \frac{\partial F_{n+1}(x_1^{n+1})}{\partial x_{n+1}} |x_h = H_h(\widetilde{x}_1^k), k = \overline{1, n+1}$ і процес $\{\widetilde{z}_n\}$ при достатньо великих n може бути замінений однорідним марковським процесом $\{\varepsilon_n\}$ $P_{\theta i}(\tilde{z}_n < h) \to P_{\theta i}(\varepsilon_n < h), n \to \infty$. Водночас у них варто замінити $M_\theta z'$ на $M_\theta \varepsilon' (\varepsilon_n = \sum_1^n \varepsilon'_k, \tilde{z}_n = \sum_1^n z'_k)$.

Висновки

У статті визначено співвідношення, що дозволяють оцінити характеристики правила Вальда в задачі перевірки складних прогнозів, а також розрахувати ефективність послідовного правила Вальда в порівнянні з рівномірно найкращим непослідовними правилом.

Показано, що при певних параметрах ефективність послідовного методу перевищує в областях Θ_i 50 % (тобто відбувається виграш в середньому часі спостереження більш ніж у 2 рази). З асимптотичної формули випливає, що в точці η у симетричному випадку ($\overline{\alpha}_1 = \overline{\alpha}_0 = \alpha$) при малих допустимих ймовірностях помилок ($\alpha < 0{,}0004$) в непослідовній рівномірно потужній процедурі необхідна менша кількість спостережень, ніж у послідовній процедурі Вальда. Виграш непослідовної процедури росте зі зменшенням α і прямує до безкінечності при $\alpha \to 0$ У несиметричних випадках ($\overline{\alpha}_0 << \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_1 << \overline{\alpha}_0$) оптимальна непослідовна процедура виграє в процедури Вильда при $\theta = \eta$ коли $\overline{\alpha}_1 < 0{,}135$, $\overline{\alpha}_0 < 0{,}135$ відповідно. З даних таблиць видно, що при практично інтересних значеннях $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1$ в околиці точки η послідовне правило Вальда має близькі або навіть гірші характеристики в порівнянні з найкращим непослідовним правилом.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Путинцев Н.Д.* Аппаратный контроль управляющих цифровых вычислительных машин / Н.Д. Путинцев. – М. : Сов. радио, 1986. – 236 с.

2. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники / Б.Р. Левин. – М. : Радио и связь, 1989. – 656 с.

3. *Башаринов А.Е.* Методы статистического последовательного анализа и их радиотехнические применения / А.Е. Башаринов, Б.С. Флейшман. – М. : Сов. Радио, 1982. – 352 с.

4. *Ширяев А.Н.* Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки / А.Н. Ширяев. – М. : Наука, 1986. – 272 с.

5. *Lai T.L.* Optimal stopping and Sequential tests which minimize the maximum expected sample size / T.L. Lai // Ann.Statist. – 1993. – V. 1, № 4. – P. 659–673.

6. *Sherman S.* Non-mean-square error criteria / S. Sherman // IRE Trans. On inform. Theory. – 1998. – V. 4. – № 3. – P. 125–136.

7. *Тартановский А.Г.* Адаптивные алгоритмы последовательной проверки гипотез и оценивания параметров / А.Г. Тартановский // Тр. МФТИ : Радиотехника и электроника, 1979. – С. 29–31.

8. *Мельников В.В.* Безопастность информации в автоматизированных системах / В.В. Мельников. – М. : Финансы и статистики, 2003. – 368 с.

9. *Браїловський М.М.* Технічний захист інформації на об'єктах інформаційної діяльності / М.М. Браїловський, С.М. Головань, В.В. Домарєв. – К. : Вид. ДУІКТ, 2007. – 178 с.

10. *Девянин П.Н.* Теоретические основы компьютерной безопастности / П.Н. Девянин, О.О. Махальський, Д.І. Правиков та ін. – М. : Радио и связь, 2000. – 193 с.

11. *Gutknecht W.* Die Sicherheit einer Nachricht als Funktion der Bandbreiten und der Stцrungen in Nachrichtenkandlen und den Analogrechnern zur Nachrichtenentzerrung. Staatsexamensarbeit / W. Gutknecht. – Arb., Univ. Marburg (Lahn), 1983. – 308 z.

12. *Kran B.M.* Beitrag zur Theoric der Optimierung gestцrter linearer Unertragungskanдle unter BerrЛcksichtigung der optimalen InformationsЛbertradung. Diss. / B.M. Kran. – TH Karl-Marx-Stadt, 1987. – 204 z.
13. *Lцhn K., Weinerth H., Wolter H.,* Zur Frage der Fehlerfortpflozung und Sicherheil bei der Ubermittlung von elektronischen analogrechnern zur RЛckrechnung, АЕЛ, 15, 1981. – 455–466 z.
14. *Опірський І.Р.* Технології попередження та прогнозування НСД на основі математичного апарату Баєсовських усічених процесів прийняття рішень / І.Р. Опірський // Інформаційна безпека. – № 2 (14). – 2014. – С. 125–134.
15. *Опірський І.Р.* Технології попередження та прогнозування НСД на основі математичного апарату Баєсовських не усічених процесів прийняття рішень / І.Р. Опірський // Інформаційна безпека. – № 3 (15), 2014. – С. 52–60.
16. *Опірський І.Р.* Оптимізація послідовних процесів прийняття рішень при умовно екстремальній постановці задачі / І.Р. Опірський // Інформаційна безпека. – № 4 (16), 2014. – С. 120–127.
17. *Опірський І.Р.* Особливості процедури прогнозування несанкціонованого доступу / І.Р. Опірський // НАУ: Захист інформації, спецвипуск, 2014. – С. 74–80.
18. *Опірський І.Р.* Проблематика основного постулату прогнозування НСД / І.Р. Опірський // Сучасна спеціальна техніка. – № 2 (41). – 2015. – С. 3–9.
19. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статической радиотехники / Б.Р. Левин. – М. : Радио и связь, 1989. – 656 с.
20. *Леман Э*. Проверка статистических гипотез / Э. Леман. – М. : Наука, 1979. – 408 с.

Отримано 14.07.2016
Рецензент Рибальський О.В., д.т.н.