

# СИСТЕМИ ТА МЕТОДИ ОБРОБКИ ІНФОРМАЦІЇ

---

УДК 621.396.96:629.783

**Л.С. Беляєвський,**

доктор технічних наук, професор,  
академік Транспортної академії України, м. Київ,

**А.А. Сердюк,**

кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри Національного транспортного університету, м. Київ,

**Є.О. Топольський,**

кандидат технічних наук, доцент,  
доцент кафедри Національного транспортного університету, м. Київ

## АНАЛІЗ ІМОВІРНІСНО-ГЕОМЕТРИЧНОГО МЕТОДУ ВИЗНАЧЕННЯ МІСЦЕПОЛОЖЕННЯ РУХОМИХ ОБ'ЄКТІВ

*У статті наводиться обґрунтування методу мінімізації форматів похибок визначення координат і траєкторій рухомих об'єктів на основі обробки інформації багатопозиційних (у тому числі й супутникових) навігаційних систем та комплексів. Отримані результати дають можливість розробити методики та алгоритми просторово-часової обробки інформації у багатопозиційних та комплексних навігаційних системах, що забезпечать підвищення точності навігаційних визначень координат і траєкторій рухомих об'єктів.*

**Ключові слова:** навігаційні системи та комплекси, навігаційні визначення, точність та достовірність координат і траєкторій рухомих об'єктів, еліпс похибок, імовірно-геометричні методи.

*В статье приводится обоснование метода минимизации форматив погрешностей определения координат и траекторий подвижных объектов на основе обработки информации многопозиционных (в том числе и спутниковых) навигационных систем и комплексов. Полученные результаты дают возможность разработать методики и алгоритмы пространственно-временной обработки информации в многопозиционных и комплексных навигационных системах, обеспечивающих повышение точности навигационных определений координат и траекторий движущихся объектов.*

**Ключевые слова:** навигационные системы и комплексы, навигационные определения, точность и достоверность координат и траекторий движущихся объектов, эллипс погрешностей, вероятностно-геометрические методы.

*This publication presents study methods to minimize errors formats of the coordinates and trajectories of moving objects based on information processing in multiposition (including satellite) navigation systems and complexes.*

The obtained results allow developing methods and algorithms of space-time information processing in multiposition and complex navigation systems that will improve the accuracy of navigation determinations coordinates and trajectories of moving objects.

**Keywords:** navigation systems and complexes, navigation definitions, accuracy and reliability of coordinates and trajectories of moving objects, ellipses of errors, probabilistic-geometric methods.

*Актуальність напрямку досліджень та постановка задачі*

Забезпечення високої точності визначення координат і траєкторій руху об'єктів за вимірюваннями, що проводяться в навігаційних системах та комплексах, є актуальним завданням, що сприяє підвищенню безпеки та ефективності перевезень різними видами транспорту.

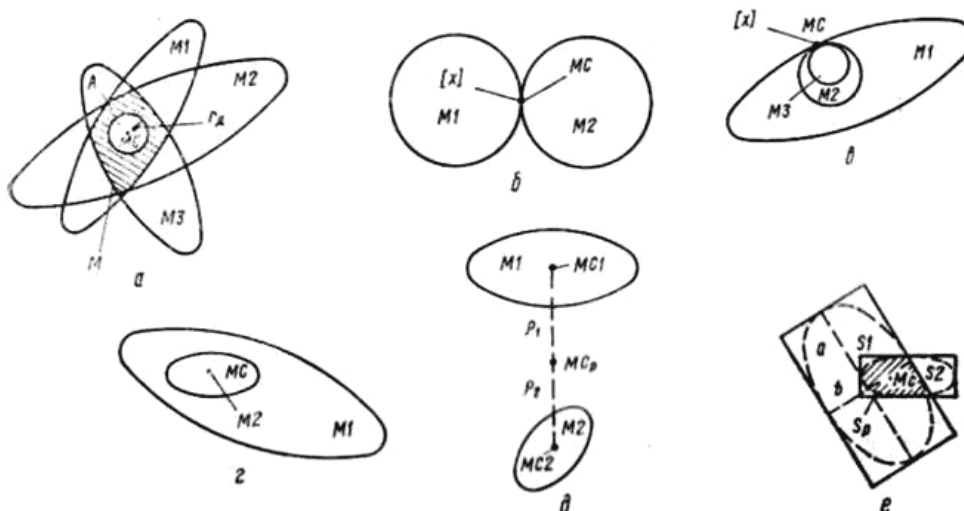
У попередніх роботах [1–10] вже розглядалися запропоновані авторами імовірно-геометричні методи навігаційних визначень, що забезпечують підвищення точності оцінки координат і траєкторій рухомих об'єктів (РО).

У цій публікації пропонується обґрунтування методу мінімізації форматів похибок визначення координат і траєкторій РО на основі оброблення інформації багатопозиційних (у тому числі й супутникових) та комплексних навігаційних систем.

*Шляхи розв'язання проблеми*

Оцінимо місцеположення об'єкта на площині за вимірюваннями, одержаними від комплексу навігаційних систем (НС), кожна з яких забезпечує стандартизовану фігуру (формат) похибок у вигляді опуклих множин – еліпса, кола, прямокутника, квадрата, а в тривимірному евклідовому просторі – у вигляді об'ємних геометричних фігур: еліпсоїда, кулі, паралелепіпеда, куба та ін.), розміри яких визначаються заданою імовірністю оцінки місцезнаходження споживача (МС) (рис. 1).

Рис. 1. Взаємне розташування форматів похибок місцевизначення об'єктів



Кожний формат похибок становить геометричну фігуру, конфігурація якої визначається перетинами  $m$ -мірного тіла, що відображає заданий закон розподілу щільності ймовірностей похибок навігаційних визначень (НВ) в цьому

просторі. Для кожного формату існують свої найбільш імовірні координати МС, що визначаються з певним рівнем достовірності відповідно до закону розподілу щільності конкретного формату похибок.

Для визначення найбільш імовірних координат МС необхідно встановити критерії вибору (оцінки) результуючого формату похибок визначення МС з урахуванням геометрії порівнюваних вихідних незалежних форматів та їх орієнтації. Як показано на рис. 1, порівнювані формати похибок координат МС у просторі можуть розташовуватися по-різному, утворюючи різні підмножини. Для отримання найвищої точності необхідно попарно порівнювати формати в єдиній системі відліку: найменший результуючий з черговим. Послідовно повторюючи цю процедуру при отриманні інформації від інших джерел, необхідно скомбінувати формати й обробити їх. Шляхом накладання і взаємного проектування форматів похибок досягається мінімізація результуючого формату, що утворюється перетином опуклих множин. Координати місцерозташування об'єкта будуть відповідати центру тяжіння результуючого формату похибок, для якого є максимально правдоподібна оцінка просторового розташування й орієнтації.

При цьому постає низка питань.

1. Які гранично припустимі межі перетину опуклих множин з урахуванням різних варіантів їх взаємного положення, вказаних на рис. 1, при необмеженому зростанні їх числа (тобто як досліджувати асимптотичні властивості результуючих форматів похибок при збільшенні обсягу вибірки навігаційних параметрів (НП))?

2. З яких міркувань повинні бути задані мінімально допустимі розміри перетину опуклих множин, що визначаються критерієм припинення обробки великого числа надлишкових форматів?

3. Які оцінки результуючого формату похибок МС, якщо формати не перетинаються і розташовані: а) один всередині іншого; б) з рознесенням на площині (у просторі)?

Для відповіді на ці питання доведемо твердження, що ґрунтується на властивостях опуклих множин [7; 8].

*Твердження.* Перетин будь-якого числа  $n$  опуклих множин лінійного метричного простору, що містять довільну опуклу множину  $A$ , прагне до замикання останньої  $[A]$  при необмеженому зростанні  $n$ .

*Доведення.* Нехай  $M = \bigcap_{i=1}^n M_i$  і всі  $M_i$  – опуклі множини ( $M \neq \emptyset$ ). Нехай  $A$  – довільно задана випукла множина, що міститься в оболонці  $M$ . Тоді при необмеженому збільшенні  $n$  опукла оболонка  $M$  множини  $A$  згідно з наслідком з теореми про перетин опуклих множин [1] буде прямувати до найменшої опуклої множини, рівній замиканню множини  $A$ , тобто  $\inf M = [A]$ . Позаяк при цьому множина  $A$  всюди щільна в  $M$ , отже, як наслідок, твердження доведене.

З доведення твердження і властивостей опуклих множин [1; 2] випливають висновки.

*Висновок 1.* Найменша з усіх опуклих оболонок  $M$ , що містить перетин  $n$  опуклих множин, є замикання множини  $\{x_k\}$  точок дотику цих множин або принаймні одна спільна точка їх дотику  $\{x_k\}$ .

$$\inf M = \inf \bigcap_{i=1}^n M_i = [\{x_k\}] \in M \quad (1)$$

*Висновок 2.* Найбільша опукла оболонка, що містить множину  $A$ , є найбільшою з тих опуклих множин лінійного простору  $R$ , що перетинаються, або принаймні весь простір  $R$ , якщо він єдиний, що містить множину  $A$ :

$$\sup M = \sup \bigcap_{i=1}^n M_i; (\theta) \quad (2)$$

*Висновок 3.* Перетин перетину пари опуклих множин з третьою опуклою множиною менше перетину пари множин. Дійсно, якщо  $M = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$  і  $M_1, M_2, M_3$  – опуклі множини, то  $M$  також опукла множина, для якої  $M_1 \cap M_2$  є опуклою оболонкою і  $M \in (M_1 \cap M_2)$ , тобто висновок доведено.

Таким чином, твердження і висновки показали можливість встановлення таких меж:

а) заданої опуклої множини, наприклад кола-радіуса  $r_d$  (див. рис. 1, а), або еліпса, що є нижньою межею перетину надлишкового числа порівнюваних множин (форматів), що поступово зменшуються, при їх спільному обробленні;

б) граничних меж перетинів порівнюваних форматів.

Звідси випливає, що обробка форматів похибок МС зводиться до мінімізації площі (об'єму простору) результуючої геометричної фігури, обмеженої перетином опуклих множин, тобто порівнюваних форматів. Тому для оцінювання ступеня узгодженості порівнюваних форматів (їх подібності, толерантності) доцільно ввести мінімізований критерій якості

$$I_{\cap} = \min |S_1 \cap S_2| = \min |S_p| \quad (3)$$

де  $S_1, S_2$  – площа порівнюваних форматів;  $S_p[M]$  – площа результуючої фігури, обмеженої замиканням перетину форматів  $[M]$ . Для  $n$  форматів, що перетинаються, (3) прийме вигляд

$$I_{\cap} = \min \left| \bigcap_{i=1}^n S_i \right|; i = \overline{1, n} \quad (4)$$

Коли перетин порівнюваних форматів наближений до граничних меж або утворюється пуста множина, доцільно ввести критерії якості у вигляді функціоналів, що максимізуються:

різниці об'єднання і перетину форматів

$$I_{\cup-\cap} = \max \left| \bigcup_{i=1}^n S_i - \bigcap_{i=1}^n S_i \right|; i = \overline{1, n}; \quad (5)$$

симетричної різниці

$$I_{\Delta} = \max |S_i \Delta S_j| = \max |(S_i \setminus S_j) \cup (S_j \setminus S_i)|;$$

$$I_{\Delta} = \max \left| (S_i \setminus S_j) \bigcup_{i,j=1}^n (S_j \setminus S_i) \right|; i, j = \overline{1, n}; i \neq j; \quad (6)$$

доповнення

$$I_C = \max \left| S_j \setminus \bigcap_{i=1}^n S_i \right| = \max \left| C \bigcap_{i=1}^n S_i \right|; i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

де  $S_j$  – найбільший з форматів, що перетинаються в (7).

Для вкладених форматів, але які не дотикаються межами (рис. 1, г) за результуючий приймається найменший з порівнюваних, додаток до якого (до найбільшого формату) максимізується згідно з (7). Зазначимо, що критерії оцінювання узгодженості порівнюваних форматів похибок МС (3)–(7) задовольняють аксіомам лінійного метричного простору [1].

Взаємне рознесення розташування форматів оцінки МС на площині (рис. 1, д) або у просторі можливе лише за наявності великих відхилень значень параметрів порівнюваних форматів. У цьому випадку критерії якості необхідно характеризувати, використовуючи звичайну евклідову метрику й мінімізуючи відстань  $\rho(S_1, S_2)$  між форматами:

$$I_{\rho} = \min \rho(S_1, S_2) = \min \{ \inf [\rho(a, b)] \}, \quad (8)$$

де нижня межа множин  $S_1$  і  $S_2$  береться за всіма точками  $a \in S_1$  і  $b \in S_2$ .

Мінімізація відстані (8) еквівалентна мінімізації скалярного добутку  $R_a, R_b$ , а відповідно,

$$\cos \theta = \frac{\max_{\theta \rightarrow \theta_{\max}} (R_a, R_b)}{\|R_a\|} \cdot \|R_b\| = \sum_{j=1}^m R_{aj} R_{bj} / \left( \sum_{j=1}^m R_{aj}^2 \sum_{j=1}^m R_{bj}^2 \right)^{U, b}; j = \overline{1, m}, \quad (9)$$

де  $R_{aj}, R_{bj}$  – радіус-вектори з початку координат системи до точок  $a \in S_1$  і  $b \in S_2$  (що є центрами  $S_1$  і  $S_2$ , тобто точками МС у  $m$ -мірному евклідовому просторі);  $\theta$  – кут між векторами  $R_a$  і  $R_b$ ;  $\|\cdot\|$  – евклідова норма вектора. За (8) і (9) можна встановити допустимі лінійні і кутові відстані між порівнювальними форматами, при яких ще можна спільно обробляти формати. Для цього будують усереднений формат похибок із центром, розташованим на відріжку  $\rho(a, b)$  ближче до формату з меншою площею, тобто на відстанях, пропорційних до відношення площ форматів (рис. 1, д, точка  $MCp$ ):

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{S_2}{S_1} \quad (10)$$

Критерії (3)–(9) можуть бути використані для оптимізації результуючого формату похибок МС. На практиці для спрощення обчислень на ЕОМ ці задачі

можуть вирішуватись із застосуванням вихідних прямокутних форматів похибок МС (рис. 1, е), що апроксимують площу рівновеликого або вписаного стандартизованого еліпса похибок, побудованого з урахуванням заданої імовірності визначення МС. Це пов'язано з тим, що саме прямокутний формат найбільш повно відповідає вимогам практики навігації РО, є більш інформативним, ніж круговий та забезпечує менш трудомісткі розрахунки точності навігації РО, ніж еліптичний.

Оскільки результуючий формат похибок МС – це багатокутник (багатогранник у  $m$ -мірному просторі), то після побудови його необхідно апроксимувати більш простою фігурою, що дає можливість отримати більш точну оцінку МС в розумінні критерію якості, що використовується.

Отже, необхідно відшукати МС у межах результуючого формату похибок, що являє собою інформаційну множину  $S = \cap S_i$ , тобто таку точку  $\hat{S} \in S$ , яка мінімізує показник якості оцінки:

$$Q = \max |\hat{S} - S|. \quad (11)$$

Позаяк істинне положення РО, що характеризується вектором  $\varepsilon \in S$ , заздалегідь належить результуючому формату похибок, мінімум функціоналу (11) обмежує зверху максимальну похибку оцінки координат

$$\|\hat{S} - \varepsilon\| \leq \hat{Q} = \min_{\hat{S} \in S} \max_{s \in S} \|\hat{S} - s\| \quad (12)$$

Як випливає з (12), найкраща у сенсі функціоналу (11) оцінка  $\hat{S}$  має геометричну інтерпретацію у вигляді центра  $n$ -мірної кулі з мінімальним радіусом  $Q$ , що описана навколо результуючого формату похибок, тобто опуклого багатогранника.

Розглянуті критерії вибору й мінімізації результативного формату шляхом послідовного попарного порівняння вихідних форматів похибок адекватно можуть бути використані для одночасного порівняння будь-яких комбінацій  $m$  форматів із заданого числа джерел інформації  $n$ . При цьому може бути отримана надлишкова кількість комбінацій форматів  $M = C_n^m$ , утворених на основі закономірностей групування навігаційних параметрів.

Отже, описаний геометричний метод оцінки результуючого формату похибок МС передбачає попередню побудову еліпсів (прямокутників), у межах яких із заданою імовірністю знаходиться шукане МС. Методика побудови еліпсів похибок МС ґрунтується на вираженні розмірів півосей еліпса через середньо квадратичне відхилення (СКВ) похибок радіонавігаційних вимірів і задані їх коефіцієнти достовірності ( $\lambda$ ). При визначенні МС за інформацією  $N$  різних навігаційних систем (НС) імовірність невиходу МС за межі результуючого формату похибок визначається як:

$$P_H = 1 - \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^m (1 - P_{ij}), \quad (13)$$

де  $P_{ij}$  – імовірності невиходу МС за межі  $ij$ -го еліпса похибок;  $N$  – число спільно оброблюваних форматів НС;  $m$  – число форматів однієї НС, отриманих при

вимірюванні в різні моменти (кількість сканувань);  $P_H$  зростає при збільшенні  $N$  і  $m$ .

Імовірність невиходу МС за межі результуючого формату похибок, що мінімізується, буде зростати лише при фіксації допустимих відхилень навігаційних параметрів (при оцінці МС), стосовно яких масштаб закону розподілу (по осі абсцис) буде зменшуватись. При цьому результуюче СКВ буде функцією площі результуючого формату похибок МС і, зокрема, для прямокутного формату може бути представлено як:

$$\sigma_p = \text{ent} \left( \frac{S_p}{2b} \right) / \lambda \approx \left( \frac{2a}{\lambda} \right) \quad (14)$$

де  $a$ ,  $b$  – велика і мала півосі еліпса похибок, вписаного у прямокутний результуючий формат похибок (або рівновеликого йому).

У практичних задачах навігації важливо оцінювати імовірність правильного вибору елементарного формату з допустимими розмірами (встановленими, наприклад, з використанням (12)), а також визначити оптимальну орієнтацію результуючого формату похибок МС.

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Беляевский Л.С., Новиков В.С., Олянюк П.В.* Обработка и отображение радионавигационной информации. М.: Радио и связь, 1990. 231 с.
2. *Беляевский Л.С.* Обработка и контроль информации в РНС с учетом геометрии форматов погрешностей измерений. Вопросы оптимального обслуживания и ремонта АмРЭО воздушных судов. Киев, 1985. С. 34–42.
3. *Беляевский Л.С.* Особенности оптимизации точностных характеристик пространственно-разнесенных структур СРНС с учетом эксплуатационных факторов. Технологические процессы при эксплуатации РЭОГА. Киев, 1987. С. 47–53.
4. *Беляевский Л.С., Черкашин В.Г.* Точность радиоэлектронных измерительных систем. Киев: Техника, 1981. 146 с.
5. Алгоритмы навигационных определений по совокупности измерительных данных комплексов радионавигационных средств. Технологические процессы при эксплуатации РЭОГА. Киев, 1985. С. 18–25.
6. *Беляевский Л.С.* Формализация методики оценки погрешностей навигационных определений по избыточной радионавигационной информации. Пути совершенствования методов и средств навигации и управления движением воздушных судов. Т. р. ОЛАГА. 1985. С. 32–38.
7. *Левковець П.Р., Беляевський Л.С., Топольськов Є.О.* та ін. Застосування методів просторово-часової обробки інформації в диспетчерських центрах при вирішенні задач управління міським пасажирським автотранспортом. Вісник НТУ. 2006. Вип. 13. Ч. 2. С. 44–49.
8. *Беляевський Л.С., Топольськов Є.О., Сердюк А.А.* Алгоритмізація процесів формування і вибору груп навігаційних параметрів в автоматизованих системах управління транспортом із використанням супутникових технологій. Автошляховик України: Окремий випуск. Вісник центрального наукового центру ТАУ. К., 2011. Вип. 14. С. 34–36.
9. *Беляевський Л.С., Данчук В.Д., Сердюк А.А.* та ін. Глобальні супутникові системи навігації та зв'язку на транспорті. К: Видавництво НТУ, 2017. 285 с.
10. *Беляевський Л.С., Топольськов Є.О.* Обґрунтування методик і алгоритмів просторово-часової обробки навігаційної інформації в автоматизованих супутникових системах управління наземним транспортом. Вісник Північного наукового центру ТАУ. 2004. Вип. 7. С. 51–55.

Отримано 03.01.2018

Рецензент Єрохін В.Ф., д.т.н., проф.