УДК 519.6:004.9

Д.Г. Зеленцов, Н.Ю. Науменко, Л.В. Новикова

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ТОЧНОСТЬЮ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Анотація. У статті наводиться докладний аналіз застосовності отриманих раніше залежностей у вигляді аналітичних функцій довговічності стержневого елемента довільного перерізу, що підлягає корозійному зносу. Пропонується підхід, заснований на використанні математичного апарата теорії катастроф, за допомогою якого пояснюються особливості поведінки функцій довговічності.

Введение. Среди задач строительной механики значительный интерес представляет задача моделирования поведения конструкций, подверженных воздействию агрессивных сред. Одним из последствий такого воздействия является коррозионный износ – разрушение поверхностного слоя метала и, как следствие, изменение начальных геометрических характеристик конструкции, снижение её несущей способности и преждевременный выход из строя. Поведение корродирующей конструкции может быть исследовано путём численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (СДУ), описывающих процесс коррозии в её элементах. От точности решения СДУ зависит точность решения задачи в целом, поэтому проблема выбора параметров численных процедур, которые обеспечили бы её решение с заданной точностью и с минимальными вычислительными затратами, приобретает самостоятельное значение. Для решения данной проблемы в настоящей работе предлагается использование искусственных нейронных сетей. В качестве объекта исследования рассматриваются статически неопределённые шарнирно-стержневые системы в условиях воздействия сильноагрессивных сред.

Постановка задачи. В большинстве случаев механические напряжения в элементах конструкции приводят к ускорению коррозионного процесса, что нашло отражение в различных моделях коррозионного износа [1, 2]. В общем виде дифференциальное уравнение, описывающее коррозионный износ, имеет вид:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \cdot \psi(\sigma), \; \delta\big|_{t=0} = 0, \tag{1}$$

где δ – глубина коррозионного поражения; t - время; v_0 – скорость коррозии при отсутствии напряжений; σ – абсолютная величина напряжения; ψ – некоторая известная функция.

На изменение напряжения в *i*-м элементе системы оказывает влияние два фактора: уменьшение площади сечения этого элемента A_i и изменение осевого усилия Q_i, которое для статически неопределимых конструкций зависит от жёсткостных характеристик всех элементов $Q_i = Q_i(\bar{\delta})$. С учётом этого СДУ, описывающая коррозионный процесс в элементах статически неопределимых систем, имеет вид:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = v_0 \cdot \Psi_i(\sigma_i(\delta_i, Q_i(\bar{\delta}))), \; \delta_i\big|_{t=0} = 0; \quad i = \overline{1, N} \tag{2}$$

Так как решение задачи напряженно-деформированного состояния (НДС) для конструкции с произвольной геометрией, граничными условиями и условиями нагружения возможно только численно, функция напряжений имеет вид вычислительного алгоритма, как правило – метода конечных элементов [3]. Таким образом, решение СДУ (2) также возможно только численно, например, методом Эйлера:

$$\delta_i^s = \delta_i^{s-1} + \Delta t^s \cdot v_0 \cdot \psi\left(\sigma_i^{s-1}\left(\bar{\delta}^{s-1}\right)\right)., \tag{3}$$

где Δt^s – шаг интегрирования СДУ на s-й итерации.

Очевидно, что точность численного решения СДУ зависит от величины шага интегрирования, а также алгоритма его изменения в процессе решения задачи. Несмотря на то, что за последнее десятилетия проблеме моделирования поведения корродирующих конструкций уделялось значительное внимание, в известной литературе не встречается обоснованных рекомендаций относительно параметров численных методов. Один из алгоритмов управления точностью решения СДУ вида (2), использующий искусственную нейронную сеть (ИНС), предложен, очевидно, впервые, в работе [4]. При этом для решения СДУ был использован метод Эйлера с постоянным шагом интегрирования. В этой работе использовались сигмоидальные функции активации, что позволило применить для обучения сети алгоритм обратного распространения ошибки.

В работах [5-7] предложен и обоснован эффективный численно-аналитический алгоритм решения СДУ, описывающих коррозионный процесс в шарнирно-стержневых системах (ШСС) и пластинах в условиях плоского нагружения и изгиба. Для таких конструкций получены аналитические формулы, позволявшие определить время, за которое напряжение в элементе конструкции увеличивается от σ_0 до σ. Так, например, для стержня при осевом нагружении эта формула имеет вид:

$$t^*_{\text{ан}} = t_0 - \frac{2kQ}{v_0 \cdot |d|}\left\{\operatorname{arctg}\frac{2a\delta - P_0}{|d|} + \operatorname{arctg}\frac{P_0}{|d|}\right\}, \tag{4}$$

Здесь A_0, P_0 − площадь и периметр сечения в начальный момент времени; Q − величина осевого усилия; $t_0 = \dfrac{\delta^*}{v_0}$; a − коэффициент формы сечения; $c = A_0 + kQ$; $d = \sqrt{\left|P_0^{\,2} - 4ac\right|}$; $d \neq 0$; δ^* − глубина коррозионного износа, соответствующая предельному состоянию элемента.

Значение δ^* для растянутого стержня может быть определено из решения квадратного уравнения

$$A_0 - P_0\delta + a\delta^2 = \frac{Q}{[\sigma]}, \tag{5}$$

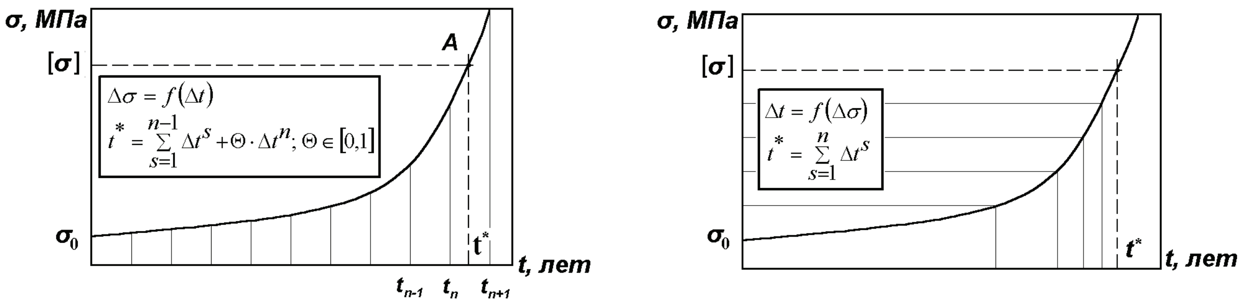
где $[\sigma]$ - предельно допустимое значение напряжения.

Эта формула получена для модели коррозионного износа, предложенной В.М. Долинским [8]:

$$\frac{d\delta}{dt} = v_0 \cdot (1 + k \cdot \sigma(\delta)), \tag{6}$$

где k − коэффициент влияния напряжений. При этом значение осевого усилия Q полагается постоянным, и данная формула может быть использована для определения долговечности статически определимых ШСС, когда изменения усилий в их элементах не происходит. При исследовании статически неопределимых конструкций она не может быть применена непосредственно.

В известных численно-аналитических алгоритмах предлагается использовать равномерный шаг по напряжению, $\Delta\sigma = \frac{[\sigma]-\sigma_0}{n} = \mathrm{const}$, а соответствующее значение Δt определить по формуле (4). К преимуществам этого алгоритма следует отнести более высокую точность, отсутствие необходимости уточнения результата решения, а также то, что в последней точке (для $\sigma = [\sigma]$) задача НДС не решается (рис. 1).



а) б)

Рисунок 1 – Численное (а) и численно-аналитическое (б) решение задачи долговечности

Очевидно, что точность численно-аналитического алгоритма будет зависеть от количества точек разбиения интервала $(\sigma_0;[\sigma])$. Постановка задачи управления точностью предполагает определение такого наименьшего количества точек разбиения интервала изменения напряжения, чтобы погрешность численно-аналитического алгоритма не превышала предельно допустимого значения $[\varepsilon]$.

Алгоритм управления точностью решения СДУ. Для управления точностью решения при использовании численно-аналитического алгоритма требуется нейронная сеть с целочисленной функцией активации для выходного элемента, в отличие от нейронной сети, описанной в [4].

На основании анализа факторов, влияющих помимо шага интегрирования, на точность решения СДУ, который приведен в [4], авторами предложена нейронная сеть с пятью входными элементами, семью элементами скрытого слоя, и одним входным элементом (рис. 2).

 ISSN 1562-9945

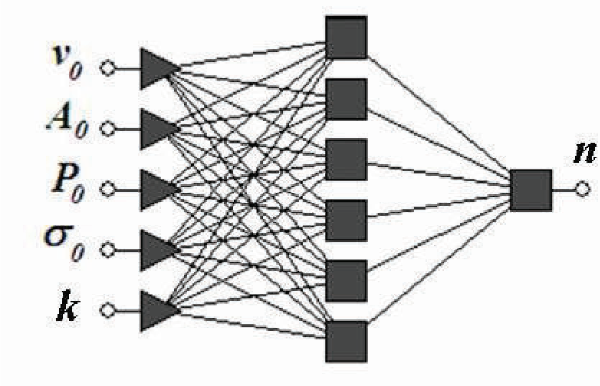


Рисунок 2 – Архитектура нейронной сети

Входными параметрами сети являются: начальная площадь A_0 и периметр P_0, начальное напряжение σ_0, скорость коррозии v_0 и коэффициент влияния напряжения на скорость коррозии k. Выходной элемент – минимальное количество шагов по напряжению n, при котором обеспечивается заданная точность численного решения СДУ.

В качестве функции активации скрытого слоя использовалась сигмоидальная функция вида:

$$f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-c \cdot x)}, \tag{7}$$

Для выходного элемента принималась кусочно-непрерывная функция:

$$f(x) = \mathrm{int}\left\{\frac{k}{1 + \exp(-c \cdot x)}\right\} + 1, \tag{8}$$

Необходимое число образцов N для обучения сети определялось на основании рекомендаций, приведенных в [9]:

$$N \geq \frac{W_{\sum}}{\varepsilon}, \tag{9}$$

где $W_{\sum}$ – количество весовых коэффициентов сети, ε – заданная допустимая погрешность сети. При $W_{\sum} = 50$ и заданной погрешности $\varepsilon \leq 0{,}005$, для обучения сети было использовано 10 000 образцов.

Алгоритм обучения ИНС. Использование формулы вида (7) исключает возможность применения алгоритма обратного распространения ошибки для обучения сети. Поэтому в работе для этой цели был использован вещественный генетический алгоритм [10].

Генетические алгоритмы имитируют процесс эволюции популяции как циклический итерационный процесс, во время которого к популяции применяются основные биологические операторы: селекция, кроссовер, мутация.

Применительно к данной задаче генетический алгоритм используется для минимизации (по коэффициентам матриц весов) функции средней ошибки сети

$$E = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left| y_n\left(\overline{\omega}\right) - z_n \right| \to \min. \qquad (10)$$

Здесь y_n – вектор выходных значений НС, зависящий от значений всех весовых коэффициентов $\overline{\omega}$, z_n – вектор эталонных значений.

Для решения задачи минимизации применялся вещественный генетический алгоритм с использованием простейшего и эвристического операторов кроссовера. Количество хромосом принималось равным количеству весовых коэффициентов НС, то есть 50. Обучение проводилось для заданных значений погрешности численного решения 0,025; 0,05 и 0,075; решение достигалось не более, чем за 130 эпох. При этом значение функции ошибки (10) не превышало 0,035.

Процедура получения обучающей выборки. Как отмечалось выше, на изменение напряжения в *i*-м элементе оказывают влияние два фактора: изменение геометрических характеристик и изменение величины внутренних усилий. Как показано в [6], влияние первого фактора значительно превосходит влияние второго. Таким образом, если известно количество интервалов *n*, обеспечивающих необходимую точность численно-аналитического алгоритма при постоянных значениях усилий ($Q_i = \text{const}$), то и при изменяющихся усилиях данная точность будет обеспечена. Поэтому аналитическая формула (4) может быть использована для обучения НС.

Входные данные НС для одного образца выбирались случайным образом. Для удобства рассматривались стержни кольцевого сечения с внешним радиусом *R* и внутренним *r*. Произвольное сечение стержня с площадью *A* и периметром *P* с высокой степенью точности может быть сведено к кольцевому сечению с радиусами $R = \frac{P}{2\pi}$ и

 ISSN 1562-9945

$r = \sqrt{\dfrac{4A - P^2}{4\pi}}$. Для полученных параметров стержня аналитически решалась задача долговечности при $\delta^* = R - \sqrt{\dfrac{Q}{\pi[\sigma]} + r^2}$. Затем задача расчёта долговечности решалась численно и проводилась оценка численного решения $\varepsilon = \varepsilon(n)$. Минимальное количество интервалов n, при котором выполнялось неравенство $\varepsilon(n) \le [\varepsilon]$ считалось эталонным выходным значением для данного образца.

Анализ результатов. Для иллюстрации возможностей нейросетевого алгоритма управления точностью была решена задача определения долговечности 5-стержневой статически неопределимой фермы, представленной на рис. 3.

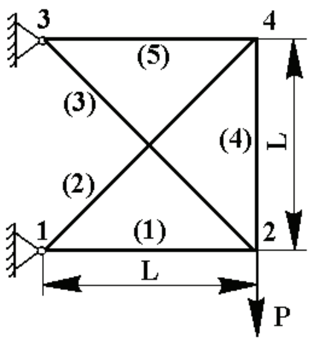


Рисунок 3 – Расчетная схема фермы

Параметры фермы и агрессивной среды полагались известными: L = 200 см; E = 2,1Ч10^5 МПа; $[\sigma]$ = 240 МПа; v_0 = 0,1 см/год, k = 0,003 МПа$^{-1}$. Все стержни имели кольцевое сечение с внешним радиусом R = 4,0 см и внутренним r = 3,0 см. Допустимая погрешность численного решения$[\varepsilon]$ = 0,05. Для определения погрешности использовалось эталонное значение долговечности конструкции. Эталонное решение определялось с помощью численно-аналитического алгоритма при последовательном увеличении количества шагов интегрирования. Предельное количество шагов интегрирования n определялось из условия:

$$\left| t(n) - t(n-1) \right| \le 0{,}0001 . \qquad (11)$$

Предельное состояние конструкции определялось условием исчерпания несущей способности (ограничением по устойчивости) элемента (2). Некоторые результаты решения задачи для нагрузки представлены в таблице 1.Здесь приведены значения напряжений в элементе фермы (2) в различные моменты времени, определяемые по формуле (4) для величины внешней нагрузки P = 250 кН. Количество итераций решения СДУ, полученное с помощью нейронной сети для данной конструкции, равнялось восьми. Эталонное решение, найденное при 43 итерациях, $t_{эт}$ = 3,339 года.

Таблица 1

n	t, лет	Δt, лет	σ, МПа	σ*, МПа
-	0,000	-	71,06	161,92
1	0,996	0,996	82,60	155,76
2	1,697	0,701	93,31	151,41
3	2,217	0,520	103,31	148,17
4	2,615	0,398	112,64	145,67
5	2,926	0,311	121,28	143,70
6	3,170	0,244	129,15	142,14
7	3,359	0,189	136,03	140,93
8	3,489	0,130	139,28*	139,25*

Погрешность численно-аналитического решения, полученного при восьми итерациях, равнялась ε = 0,0449. Отметим, что численно-аналитический алгоритм не предполагает решение задачи НДС на последней итерации; приведенные в таблице значения текущего и критического напряжений в момент исчерпания несущей способности конструкции (при t^* = 3,489 года) были получены путём дополнительных расчётов.

Выводы. Результаты решения задачи определения долговечности корродирующей фермы подтверждают высокую эффективность численно-аналитического алгоритма, использующего нейросетевой модуль выбора количества итераций для решения СДУ данного класса. Использование нейросетевого модуля позволяет обеспечить требуемую точность решения задачи при минимальных вычислительных затратах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинников И.Г., Почтман Ю.М. Тонкостенные конструкции в условиях коррозионного износа. Расчет и оптимизация. – Днепропетровск: ДГУ,1995. – 192 с.

2. Петров В.В., Овчинников И.Г., Шихов Ю.М. Расчет элементов конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой. – Саратов: СГУ, 1987. – 288 с.

 ISSN 1562-9945

3. Зеленцов Д.Г., Кольчик С.В. Моделирование процесса коррозионного износа в задачах оптимального проектирования конструкций, использующих метод конечных элементов // Компьютерные методы в задачах прикладной математики и механики. Сб. научн. трудов ИК НАН Украины. – К., 1998. – с. 40 – 47.

4. Зеленцов Д.Г., Короткая Л.И. Использование нейронных сетей при решении задач долговечности корродирующих конструкций // Вісник Кременчуцького національного університету ім. М.Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2011. – Вип. 3 (68), част. 1. – С. 24 – 27.

5. Зеленцов Д.Г. Об одном алгоритме решения некоторых классов систем дифференциальных уравнений // Придніпровський науковий вісник. Фізико-математичні науки. – 1998. – № 112 (179). – С. 31 – 37.

6. Зеленцов Д.Г., Филатов Г.В. Обзор исследований по применению методов нелинейного математического программирования к оптимальному проектированию конструкций, взаимодействующих с агрессивной средой // Вопросы химии и химической технологии. – 2002. – № 4. – С. 108 – 115.

7. Зеленцов Д.Г., Науменко Н.Ю. Напіваналітичні алгоритми розв’язання систем диференціальних рівнянь у задачах довговічності кородуючих конструкцій // Промислове будівництво та інженерні споруди. – 2008. – № 4. – С. 14 – 18.

8. Долинский В.М. Изгиб тонких пластин, подверженных коррозионному износу // Динамика и прочность машин, Харьков, 1975. – Вып. 21. – с.16 –19.

9. Хайкин, С. Нейронные сети: полный курс, 2-е изд.: пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.

10. Емельянов В. В., Курейчик В. В., Курейчик В. М. Теория и практика эволюционного моделирования. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 432 с.